

**7. Versuch einer Anwendung
der Quantenhypothese auf die elektrische
Entladung von heißen Körpern;
von William Wilson.**

Die von Hrn. Planck zur Ableitung der Strahlungsformel eingeführte Quantentheorie hat auch jedenfalls in vielen anderen Richtungen eine fundamentale Bedeutung. In neuerer Zeit ist z. B. Hughes¹⁾ zur Ansicht gekommen, daß die Energie der von ultravioletttem Lichte freigemachten Elektronen gleich ist dem Produkte $h\nu$, wo h eine der Planckschen Konstante sehr naheliegende Konstante ist, und ν die Schwingungszahl des Lichtes bedeutet. Auch sind die Herren O. W. Richardson und Compton²⁾ zu ähnlichen Schlüssen gekommen. Ferner haben die Herren Barkla und Martyn³⁾ für die Wellenlänge der von ihnen benützten Röntgenstrahlen einen Wert gefunden, welcher demjenigen sehr nahe liegt, den man aus der Gleichung

$$(1) \quad \frac{1}{2} m v^2 = h \nu$$

erhält, wenn man für m und v resp. die Masse und Geschwindigkeit der Elektronen einsetzt, die emittiert werden, wenn solche Röntgenstrahlen von einem Metalle absorbiert werden, und wenn man ferner für h den von Hrn. Planck gegebenen Wert $6,4 \cdot 10^{-27}$ Erg-Sek. einsetzt. Auch Hr. J. W. Nicholson⁴⁾ hat die Quantenhypothese in seinen wertvollen Untersuchungen über die Sonnenkorona mit ausgezeichnetem Erfolge gebraucht. Er ist der Meinung, daß das Hinaustreiben eines Elektrons aus dem Atome mit einer diskontinuierlichen Änderung der Winkelbewegungsgröße des Atoms begleitet wird.

1) A. L. Hughes, Phil. Trans. 212 (A). p. 205. 1912.

2) O. W. Richardson und K. Compton, Phil. Mag. 24. p. 576. 1912.

3) C. G. Barkla u. G. H. Martyn, Proc. Phys. Soc. of London 25. p. 214. 1913. Die in Gleichung (1) ausgedrückte Annahme ist schon von Hrn. A. Einstein (Ann. d. Phys. 17. p. 145. 1905 u. 20. p. 199. 1906) für lichtelektrische Elektronen ausgesprochen und dieselbe Annahme für Röntgenstrahlen ist von Hrn. W. Wien (Göttinger Nachr. 5. p. 598. 1907) gemacht worden.

4) J. W. Nicholson, Monthly Notices of R. A. S. Juni 1912.

In der gegenwärtigen Arbeit wird der Versuch gemacht, die Plancksche Hypothese der diskontinuierlichen Energieemission auf die elektrische Entladung von heißen Körpern anzuwenden. Wir nehmen an, der heiße Körper (z. B. Platin) befinde sich in einem Felde schwarzer Strahlung, und zwar wollen wir dabei von folgenden Hypothesen Gebrauch machen: Erstens werden die diskontinuierlichen Emissionen durch das Hinaustreiben eines Elektrons aus dem Resonator bzw. Atome vermittelt; zweitens ist die Energie eines solchen Elektrons im Augenblicke der Emission gleich einem ganzen Vielfachen von $h\nu$, wobei unter h die bekannte Plancksche Konstante, und unter ν die Schwingungszahl des Resonators zu verstehen ist. Schließlich nehmen wir an, daß die Energie dieser Elektronen der Strahlungsenergie von der Schwingungszahl ν bei der Absorption der Elektronen übertragen wird.¹⁾

Es wird zweckmäßig sein, zwei Größen \mathfrak{R}_ν und \mathfrak{P}_ν zu definieren. Unter \mathfrak{R}_ν verstehen wir die spezifische Strahlungsintensität.²⁾ Die unpolarisierte Strahlungsenergie im Schwingungsintervalle $\nu - \nu + d\nu$, welche in der Zeit dt durch das im heißen Körper befindliche Flächenelement $d\sigma$ in der Richtung des Kegels $d\Omega$ hindurchgestrahlt wird, ist gleich:

$$(2) \quad 2dt d\sigma \cos \vartheta d\Omega \mathfrak{R}_\nu d\nu,$$

wo ϑ den zwischen der Normale zum Flächenelement $d\sigma$ und der Achse des Elementarkegels $d\Omega$ enthaltenen Winkel, und $d\Omega$ den Öffnungswinkel des Kegels bezeichnet. Die zweite Größe \mathfrak{P}_ν definieren wir auf analoge Weise durch folgenden Ausdruck:

$$(3) \quad dt d\sigma \cos \vartheta d\Omega \mathfrak{P}_\nu d\nu,$$

welche die Anzahl der Elektronen darstellt, die von Oszillatoren im Schwingungsintervalle $\nu - \nu + d\nu$ emittiert sind, und in der Zeit dt durch $d\sigma$ in der Richtung des Elementarkegels

1) In einer wichtigen Veröffentlichung von Hrn. M. Planck (Ber. d. K. Preuß. Akad. vom 3. April 1913) sind ähnliche Hypothesen zugrunde gelegt worden. In der Planckschen Arbeit ist aber angenommen worden, daß bei jeder Emission neben der Energie eines fortgeschleuderten Elektrons ein gewisser Betrag von elektromagnetischer Energie vom Oszillator emittiert wird.

2) Vgl. z. B. M. Planck, Vorl. über die Theorie der Wärmestrahlung, zweite Ausgabe.

$d\Omega$ hindurchfliegen. Die Größen $2\mathfrak{R}_\nu$ und \mathfrak{P}_ν haben also analoge Bedeutungen.

Nun ist bekanntlich bei *stationärem* Zustand die im Volumen v des betreffenden Mediums in der Zeit dt emittierte Strahlungsenergie im Intervalle $\nu - \nu + d\nu$ gleich:

$$(4) \quad dt v 8\pi \alpha_\nu \mathfrak{R}_\nu d\nu,$$

wo α_ν den Absorptionskoeffizienten der Strahlung bezeichnet. Einen entsprechenden Ausdruck erhält man für die im Volumen v emittierten Elektronen, nämlich:

$$(5) \quad dt v 4\pi \alpha'_\nu \mathfrak{P}_\nu d\nu.$$

Hierbei ist unter α'_ν der Absorptionskoeffizient der Elektronen zu verstehen.

Nun ist, wie schon oben gesagt, die Energie eines Elektrons im Augenblicke der Emission gleich $n h \nu$, wobei n eine ganze von einem Elektron zum anderen im allgemeinen verschiedene Zahl bezeichnet. Wenn wir den Mittelwert von n mit \bar{n} bezeichnen, so ergibt sich aus (5) für die im Volumen v während der Zeit dt emittierte Energie den Ausdruck:

$$(6) \quad dt v 4\pi \bar{n} h \nu \alpha'_\nu \mathfrak{P}_\nu d\nu$$

und demgemäß nach den oben eingeführten Hypothesen und mit Berücksichtigung von (4) erhalten wir folgende Beziehung zwischen \mathfrak{P}_ν und \mathfrak{R}_ν :

$$(7) \quad \mathfrak{P}_\nu = \frac{2\alpha \mathfrak{R}_\nu}{\alpha'_\nu \bar{n} h \nu}.$$

Es ist nun leicht, \bar{n} als Funktion von ν zu berechnen. Zu diesem Zwecke betrachten wir N Resonatoren von der Schwingungszahl ν und bezeichnen die Anzahl derjenigen Resonatoren, welche im n ten Gebiete liegen, deren Energie zwischen $(n-1)h\nu$ und $n h \nu$ liegt, mit X_n . Zunächst berechnen wir X_n . Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Resonator, dessen Energie gerade ein ganzes Vielfaches von $h\nu$ ist, eine Emission vollzieht, bezeichnen wir nach Planck mit η . Während der Zeit (welche wir τ nennen wollen), die ein Resonator nötig hat, um $h\nu$ Energieeinheiten zu absorbieren, werden alle X_n -Resonatoren ihre Energie mindestens bis $n h \nu$ vermehrt haben. Unter diesen werden $X_n \eta$ emittieren, so daß $X_n \eta$ Resonatoren aus dem n ten in das erste Gebiet, die übrigen in das $(n+1)$ te Gebiet eintreten. In das n te Gebiet treten $X_{n-1}(1-\eta)$ Reso-

natoren aus dem $(n-1)$ ten Gebiet ein. Da wir einen stationären Zustand voraussetzen, so muß

$$X_n = X_{(n-1)}(1 - \eta)$$

sein.

Daraus folgt unmittelbar:

$$(8) \quad X_n = X_1 (1 - \eta)^{n-1}.$$

Wir haben ferner:

$$N = \sum_1^{\infty} X_n,$$

also mit Berücksichtigung von (8):

$$X_1 = N\eta$$

und

$$(9) \quad X_n = N\eta(1 - \eta)^{n-1}.$$

Die während der Zeit τ von den N Resonatoren emittierte Energie E_τ ist gleich:

$$\sum_1^{\infty} X_n \eta n h \nu$$

und wenn wir die Definition von \bar{n} berücksichtigen, so erhalten wir ferner:

$$E_\tau = \bar{n} h \nu \sum_1^{\infty} X_n \eta.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke für E_τ ergibt sich

$$\sum_1^{\infty} X_n \eta n h \nu = \bar{n} h \nu \sum_1^{\infty} X_n \eta,$$

woraus wir nach (9) erhalten:

$$(10) \quad \bar{n} = \frac{1}{\eta}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit η einer Emission haben wir nach Planck:¹⁾

$$\eta = \frac{e^{\frac{h \nu}{k T}} - 1}{\frac{h \nu}{k T}},$$

wobei k die absolute Gaskonstante, berechnet für ein Molekül, und T die Temperatur der vorausgesetzten schwarzen Strahlung bedeutet. Schließlich ergibt sich nach (10)

$$(11) \quad \bar{n} = \frac{e^{\frac{h \nu}{k T}}}{\frac{h \nu}{k T} - 1}$$

1) M. Planck, l. c. Gleichungen (223), (264).

Wenn ν genügend groß ist, so wird \bar{n} nur wenig von Eins abweichen.

Setzen wir diesen Ausdruck für \bar{n} in (7) ein, und für \mathfrak{R}_ν seinen aus der Strahlungsformel gegebenen Wert,¹⁾ so bekommen wir:

$$\mathfrak{P}_\nu = \frac{2\alpha_\nu n^2}{\alpha'_\nu c^2} \nu^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}},$$

wobei unter n der Brechungsindex des heißen Körpers und unter c die Lichtgeschwindigkeit im Äther zu verstehen ist. Wir setzen diesen Ausdruck für \mathfrak{P}_ν in (3) ein und erhalten für die durch einen Quadratzentimeter in der Sekunde hindurchfliegenden Elektronen, welche von Resonatoren bzw. Atomen im Schwingungsintervalle $\nu - \nu + d\nu$ emittiert werden:

$$dN = \frac{2\alpha_\nu n^2}{\alpha'_\nu c^2} \nu^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\varphi d\vartheta d\sigma dt,$$

wobei $d\Omega$ durch $\sin \vartheta \cdot d\varphi \cdot d\vartheta$ ersetzt worden ist. Nach Ausführung der Integration erhalten wir:

$$dN = \frac{2\pi \alpha_\nu n^2}{\alpha'_\nu c^2} \nu^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu$$

oder indem wir $h\nu$ durch ε ersetzen:

$$(13) \quad dN = \frac{2\pi \alpha_\nu n^2}{\alpha'_\nu c^2 h^3} \varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon.$$

Bildet nun der in Rede stehende Quadratzentimeter einen Teil der Oberfläche des Körpers, so nehmen wir an, daß nur solche Elektronen den Körper verlassen können, deren Energie einen gewissen minimalen Wert w übersteigt. Um daher die Anzahl der in der Sekunde von einem Quadratzentimeter der Oberfläche kommenden Elektronen zu erhalten, müssen wir die Gleichung (13) zwischen den Grenzen w und ∞ integrieren. Hierbei ist angenommen worden, daß \bar{n} (Gleichung (10)) sehr wenig von Eins verschieden ist. Diese Annahme wird sich später rechtfertigen lassen. Auf diese Weise erhalten wir

$$(14) \quad N = \frac{2\pi}{h^3 c^2} \int_w^\infty \frac{\alpha_\nu n^2}{\alpha'_\nu} \varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon.$$

1) Vgl. M. Planck, l. c. Gleichung (300).

Ohne zu wissen wie $\alpha_\nu n^2/\alpha'_\nu$ von ν , d. h. von ϵ , abhängt, können wir die Integration nicht ausführen. Indes die Arbeiten von Hagen und Rubens¹⁾ machen es wahrscheinlich, daß die Größe α_ν für Platin innerhalb eines ziemlich beträchtlichen Spektralgebiets von der Wellenlänge, also von ϵ , fast unabhängig ist. Um eine Annäherung gewinnen zu können, wollen wir die Annahme machen, daß sich die Größe $\alpha_\nu n^2/\alpha'_\nu$ innerhalb eines hinreichend großen Schwingungsintervalls nur sehr wenig mit der Schwingungszahl ändert. Wir bekommen sodann, wenn wir (14) integrieren, und unter K eine passend zu wählende Konstante verstehen, für die von einem Quadrat-zentimeter der Platinoberfläche in der Sekunde entweichende Elektrizitätsmenge:

$$(15) \quad Q = K T \left(1 + 2 \frac{k}{w} T + 2 \frac{k^2}{w^2} T^2 \right) e^{-\frac{w}{k T}}.$$

Diese Formel ist in der Tat sehr ähnlich der bekannten von Richardson²⁾, welche lautet:

$$(16) \quad Q = K^1 T^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{w}{k T}}.$$

Die Größen w haben in beiden Formeln die gleiche Bedeutung, aber nicht genau denselben numerischen Wert, und es ist k in beiden Formeln die für ein Molekül berechnete Gaskonstante.

Die Formel (15) stellt die experimentellen Ergebnisse der Versuche Richardsons und H. A. Wilsons gut dar. Man findet leicht, daß der Term $2(k^2/w^2)T^2$ gegen Eins zu vernachlässigen ist, so daß die Formel in die folgende Gestalt gesetzt werden kann:

$$(17) \quad \frac{Q}{T \left(1 + 2 \frac{k}{w} T \right)} = K 10^{-\frac{R}{T}}.$$

Wir nehmen jetzt, indem wir einem Verfahren Richardsons³⁾ folgen, die Logarithmen beider Seiten dieser Gleichung, und erhalten so:

$$\log \frac{Q}{T \left(1 + 2 \frac{w}{k} T \right)} = \log K - \frac{R}{T}$$

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 447. 1902.

2) O. W. Richardson, Phil. Trans., 201 (A). p. 497. 1903.

3) O. W. Richardson, l. c.

oder, wenn wir für

$$\log \frac{Q}{T \left(1 + 2 \frac{k}{w} T \right)}$$

$\frac{1}{T}$ und $\log K$ resp. ψ , φ und M einzusetzen,

$$(18) \quad \psi = M - R \varphi.$$

Eine ganz analoge Gleichung, nämlich

$$(19) \quad \psi_1 = M_1 - R_1 \varphi$$

erhält man aus Gleichung (16).

Tabelle I.

Temperatur in Grad Celsius	$\psi + 12$	$\psi_1 + 12$	$10^4 \varphi$
1323	3,374	5,044	6,266
1298	3,191	4,817	6,365
1269	2,935	4,556	6,485
1243	2,726	4,343	6,596
1224	2,660	4,274	6,680
1190	2,286	3,894	6,835
1170	2,089	3,694	6,931
1146	1,825	3,426	7,047
1105	1,322	2,916	7,257
1058	0,770	2,356	7,513
1031	0,263	1,844	7,669

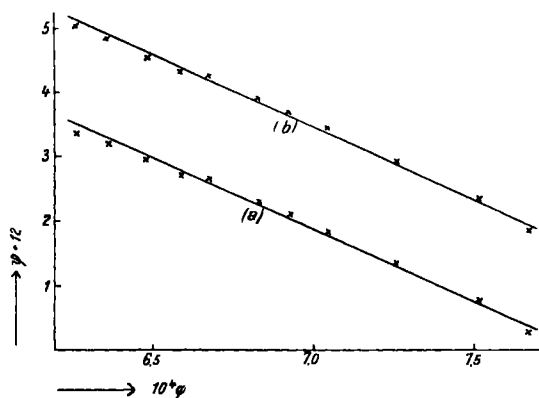


Fig. 1.

Die aus Versuchen Richardsons¹⁾ berechneten Werte von ψ , ψ_1 und φ sind in der Tabelle I gegeben und in Fig. 1 graphisch dargestellt.

Die Punkte (a) beziehen sich auf Gleichung (18), die Punkte (b) auf Gleichung (19). Man sieht, daß in beiden Fällen die Punkte sehr gut auf geraden Linien fallen und daß in der Tat die Formel (15) die experimentellen Ergebnisse ebensogut als die Richardsonsche Formel darstellt. Der aus Fig. 1 (a) gegebene Wert von R beträgt 22 600, woraus sich w zu $6,9 \cdot 10^{-12}$ Erg berechnet.

Die Energie aller Elektronen, welche die Metalloberfläche verlassen, wird also mindestens diese Größe erreichen, und wenn wir diesen Wert für $h\nu$ in Gleichung (11) einsetzen, finden wir, daß in der Tat \bar{n} für solche Elektronen sehr nahe Eins ist.

Die ersten drei Kolonnen der Tabelle II sind aus einer Arbeit H. A. Wilsons²⁾ entnommen worden.

Tabelle II.

Temperatur in Grad Celsius	Beobachtete Entladung in Amp. pro cm ²	Berechnete Entladung nach Richardsons Formel	Berechnete Entladung nach Formel (15)
1375	$1,57 \cdot 10^{-8}$	$1,49 \cdot 10^{-8}$	$1,57 \cdot 10^{-8}$
1408,5	$3,43 \cdot 10^{-8}$	$3,33 \cdot 10^{-8}$	$3,46 \cdot 10^{-8}$
1442	$7,46 \cdot 10^{-8}$	$7,18 \cdot 10^{-8}$	$7,41 \cdot 10^{-8}$
1476	$15,2 \cdot 10^{-8}$	$15,3 \cdot 10^{-8}$	$15,57 \cdot 10^{-8}$
1510,5	$32,3 \cdot 10^{-8}$	$31,8 \cdot 10^{-8}$	$32,18 \cdot 10^{-8}$
1545	$63,8 \cdot 10^{-8}$	$64,5 \cdot 10^{-8}$	$64,7 \cdot 10^{-8}$
1580	$128 \cdot 10^{-8}$	$128,5 \cdot 10^{-8}$	$128 \cdot 10^{-8}$

Seine Versuche wurden an einem mit Salpetersäure behandelten Platindraht ausgeführt. Die vierte Kolonne enthält die nach Formel (15) berechnete Entladung. Die Konstanten K und w wurden aus den extremen Werten der Entladung berechnet, d. h. aus $1,57 \cdot 10^{-8}$ bei 1375° C. und aus $128 \cdot 10^{-8}$ bei 1580° C. Der dabei benutzte Wert R (vgl. Gleichung (17)) betrug 27 690, woraus sich w zu $8,5 \cdot 10^{-12}$ Erg berechnet.

1) O. W. Richardson, l. c.

2) H. A. Wilson, Phil. Trans. (A). 202. p. 258. 1904.

Man sieht, daß Formel (15) die Wilsonsche Beobachtungen etwas besser darstellt als die Richardsonsche Formel.

Das Vorangehende mag auf folgende Weise kurz zusammengefaßt werden:

1. Eine Theorie der elektrischen Entladung von heißen Körpern ist versucht worden, deren Grundlage in der Planckschen Quantenhypothese liegt. Die dabei abgeleitete Formel stellt die experimentellen Resultate mindestens ebensogut dar als die bisher gebrauchte Formel von Richardson.

2. Die Theorie bringt das Phänomen der elektrischen Entladung von heißen Körpern in Zusammenhang mit anderen Phänomenen, z. B. der durch Bestrahlung mit Röntgenstrahlen und mit ultraviolettem Lichte verursachten Entladungen, welche bisher als wesentlich verschieden von dem Phänomen der Entladung von heißen Körpern angesehen worden sind.

London, Wheatstone Laboratory, King's College,
15. August 1913.

(Eingegangen 24. August 1913.)