Über die aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen.

Von **Leopold Gegenbauer** in Innsbruck.

Gauss stellte bekanntlich in der Selbstanzeige seiner zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste in Aussicht, dass in einer späteren Mittheilung von ihm „die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen (außer den gemeinen complexen) liefern können, ihre Beantwortung finden werde". Die in diesem Aufsatze versprochene Arbeit ist nie erschienen und es hat sich auch in dem Gauss'schen Nachlasse keine einschlägige Aufzeichnung vorgefunden. Herr Professor K. Weierstraß hat die von Gauss aufgeworfene Frage in der von ihm geleiteten Abtheilung des mathematischen Seminars an der Berliner Universität wiederholt in erschöpfender Weise erledigt (zuerst im Wintersemester 1861/62), seine diesbezüglichen Untersuchungen schließlich im Jahre 1884 in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht und dadurch den Anstoß zu einer Reihe von interessanten Arbeiten über höhere complexe Zahlen gegeben.

Die in den eben erwähnten Untersuchungen betrachteten complexen Zahlen sind lineare homogene Functionen der n Haupteinheiten $e_1, e_2, \ldots, e_n$, haben also die Form:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

wo die Größen α_λ, die Coordinaten der complexen Zahl, aus einer unbenannten Einheit, für die man, wie es in diesen Zeilen geschehen soll, ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Zahl 1 nehmen kann, gebildet sind und $\alpha_\lambda e_\lambda$ die Größe bezeichnet, welche entsteht, wenn man an Stelle der bei der Bildung von α_λ verwendeten Einheit e_λ schreibt.

Über die n Haupteinheiten werden folgende Voraussetzungen gemacht:

1. Die Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sind von einander linear unabhängig, so dass also eine Gleichung von der Form

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha^n e^n = 0$$

nur bestehen kann, wenn alle reellen Zahlen α_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ den Wert 0 haben.

2. Die Multiplication der Einheiten, deren Producte selbstverständlich Zahlen des Gebietes sind, da sonst das System nicht begrenzt wäre, ist commutativ, associativ und distributiv.

3. Die für die Einheiten geltenden Multiplicationsgesetze sind so beschaffen, dass die Division im allgemeinen ausführbar ist und dass eine algebraische Gleichung nur dann unendlich viele Wurzeln besitzen kann, wenn alle Coefficienten derselben einen Factor der Null als gemeinsamen Theiler haben.

Für die Zahlen eines solchen Gebietes ist die Addition und Multiplication commutativ, associativ und distributiv und es existiert in demselben ein Modul der Multiplication, d. i. eine Zahl, welche jede andere ungeändert lässt, wenn sie mit ihr multipliciert wird.

Da im Gebiete der reellen (aus einer Haupteinheit gebildeten) Zahlen $\sqrt{-1}$ nicht existiert, so dass man schon zur Lösung der quadratischen Gleichungen aus zwei Haupteinheiten gebildete Zahlen verwenden muss, so drängt sich unmittelbar die Frage nach etwaiger Nichtexistenz der Quadratwurzel aus dem negativ genommenen Modul der Multiplication in einem aus n Haupteinheiten abgeleiteten Zahlensysteme auf. Herr Professor Weierstraß hat nun u. a. bewiesen, dass dieselbe nur in den aus einer geraden Anzahl von Haupteinheiten gebildeten Gebieten existieren kann. Da sein Beweis dieses äußerst bemerkenswerten Satzes, der gerade für weitere Kreise von besonderem Interesse sein dürfte, die Kenntnis des Fundamentalsatzes der Algebra voraussetzt, so habe ich einen mit möglichst elementaren Mitteln ausführbaren Beweis desselben gesucht und denselben in der von mir geleiteten Abtheilung des mathematischen Seminars an der hiesigen Universität im Sommersemester 1880 und im Jahre 1885 in den Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien mitgetheilt. Dieser Beweis, welcher eine interessante Anwendung des Multiplicationstheorems der Determinanten bildet, mag nun in etwas veränderter Form in den folgenden Zeilen angegeben werden.

Nimmt man n Zahlen

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \alpha_{11}\, e_1 + \alpha_{12}\, e_2 + \ldots + \alpha_{1n}\, e_n \\
\eta_2 &= \alpha_{21}\, e_1 + \alpha_{22}\, e_2 + \ldots + \alpha_{2n}\, e_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_n &= \alpha_{n1}\, e_1 + \alpha_{n2}\, e_2 + \ldots + \alpha_{nn}\, e_n
\end{aligned}$$

des betrachteten Gebietes, welche von einander linear unabhängig sind, so dass also

$$\left| \alpha_{ik} \right| \gtrless 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, so lassen sich die n Haupteinheiten uud demnach alle Zahlen des Systems als lineare homogene Functionen derselben darstellen, so dass also für die Producte $\eta_\lambda \eta_\mu$ derselben die Gleichungen

$$\eta_\lambda \eta_\mu = (\lambda, \mu)_1 \eta_1 + (\lambda, \mu)_2 \eta_2 + \ldots + (\lambda, \mu)_n \eta_n$$

bestehen, wo die Coefficienten $(\lambda, \mu)_\nu$ reelle Zahlen sind, welche, weil die Multiplication commutativ ist, die Gleichungen

$$(\lambda, \mu)_\varrho = (\mu, \lambda)_\varrho$$

befriedigen, während wegen des Associationsprincips zwischen ihnen die Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\lambda, \mu)_\nu (\nu, \varrho)_\sigma = \sum_{\tau=1}^{\tau=n} (\mu, \varrho)_\tau (\lambda, \tau)_\sigma \qquad (\lambda, \mu, \varrho, \sigma = 1, 2 \ldots, n)$$

bestehen.

Aus dem letzten Gleichungssysteme ergibt sich sofort eine bemerkenswerte Eigenschaft der Zahlen $(\lambda, \mu)_\nu$.

Unter Benützung des Multiplicationstheorems der Determinanten leitet man nämlich mit ihrer Hilfe sofort die Relationen

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\lambda, \mu)_\nu (\nu, \varrho)_\sigma\right| = \left|(\lambda, \varrho)_\sigma\right| \left|(\mu, \varrho)_\sigma\right|_{(\varrho, \sigma = 1, 2, 3, \ldots, n)} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

ab.

Da bei der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Zahlen η_λ die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Determinanten von Null verschieden sind, so ergibt sich der Satz:

Werden die n^2 Producte $\eta_\lambda \eta_\mu$ von n von einander linear unabhängigen Zahlen des aus n mit den angeführten Eigenschaften versehenen Haupteinheiten gebildeten Zahlensystems als lineare homogene Functionen derselben in der Form

$$\eta_\lambda \eta_\mu = (\lambda, \mu)_1 \eta_1 + (\lambda, \mu)_2 \eta_1 + \ldots + (\lambda, \mu)_n \eta_n$$

ausgedrückt, so hat die Determinante

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\lambda, \mu)_\nu (\nu, \varrho)_\sigma\right|_{(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)}$$

das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die zwei Determinanten $\left|(\lambda, \varrho)_\sigma\right|$, $\left|(\mu, \varrho)_\sigma\right|_{(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)}$

gleich bezeichnet sind oder nicht, so dass also speciell die n Determinanten

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\mu, \mu)_\nu (\nu, \varrho)_\sigma\right|_{(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

positiv sind.

Gibt es nun in dem betrachteten Systeme eine Zahl η_τ, welche dem negativ genommenen Quadrate einer anderen η_μ gleich ist, so besteht zwischen diesen zwei Zahlen offenbar keine lineare Beziehung (mit reellen Coefficienten) und demnach lassen sich stets in mannigfacher Weise $n - 2$ andere Zahlen η_λ finden, welche mit den eben genannten ein System von n von einander linear unabhängigen Zahlen bilden. Da in diesem Falle

$$\begin{aligned}(\mu, \mu)_\nu &= 0 \quad (\nu \gtrless \tau)\\(\mu, \mu)_\tau &= -1\end{aligned}$$

ist, so muss nach dem eben aufgestellten Satze die Determinante

$$\left| (\tau, \varrho)_\sigma \right|_{(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)}$$

positiv oder negativ sein, je nachdem die Anzahl der Haupteinheiten gerade oder ungerade ist.

Ist η_τ der Modul der Multiplication, so ist

$$(\tau, \varrho)_\sigma = 0 \quad (\varrho \gtrless \sigma)$$

$$(\tau, \varrho)_\varrho = 1$$

und demnach stets

$$\left| (\tau, \varrho)_\sigma \right|_{(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)} = 1.$$

Man hat daher den Satz:

In einem aus einer ungeraden Anzahl von mit den angegebenen Eigenschaften begabten Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlensysteme ist die Quadratwurzel aus dem negativ genommenen Modul der Multiplication nicht vorhanden.

Der mitgetheilte elementare Beweis des Weierstraßschen Satzes lässt deutlich hervortreten, dass lediglich das Associationsprincip die Ursache des Nichtvorhandenseins der angeführten Quadratwurzel ist.

Da, falls η_τ weder ein Theiler der Null, noch eine Zahl ist, deren Quadratwurzel in dem betrachteten Gebiete nicht vorhanden ist, aus dem Bestehen der Gleichung

$$\eta_\mu^2 = - \eta_\tau$$

die Existenz der Quadratwurzel aus dem negativ genommenen Modul der Multiplication folgt, so lehrt der eben bewiesene Satz, dass diese Gleichung mit etwaiger Ausnahme der besonders zu untersuchenden genannten Fälle in einem aus einer ungeraden Anzahl von Haupteinheiten gebildeten Systeme unmöglich ist.