

Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen.

(Erster Aufsatz.)

Von

J. HORN in Charlottenburg.

Herr Poincaré hat*) das Verhalten der Integrale der linearen Differentialgleichung

$$(A) \quad P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + P_{m-1} \frac{dy}{dx} + P_m y = 0,$$

deren Coefficienten

$$P_\mu = a_\mu x^\mu + \dots \quad (\mu = 0, 1 \dots m)$$

ganze Functionen p^{ten} Grades von x sind, bei der Annäherung der Veränderlichen x an die Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ untersucht, indem er die Integrale in der Form

$$y = \int v e^{zx} dz$$

darstellte, wo $v = v(z)$ der „Laplace'schen Transformirten“

$$(B) \quad (a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m) \frac{d^p v}{dz^p} + \dots = 0,$$

einer linearen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung mit Coefficienten m^{ten} Grades, genügt und der Integrationsweg l passend zu wählen ist. Auf diese Weise ergab sich insbesondere die Bedeutung der im allgemeinen divergenten „Normalreihen“, welche der Differentialgleichung formell genügen.**)

*) Amer. Journ. Bd. 7; Act. math. Bd. 8.

***) Als Grundlage für das Folgende genügt, da zunächst alle Ausnahmefälle ausgeschlossen werden, die einfache Darstellung der Poincaré'schen Methode in Picard's Traité d'Analyse, Bd. 3, Cap. 14. (S. 388 müssen die Glieder der Reihe Σ abwechselnd mit $+$ und $-$ versehen werden.) — Schlesinger's Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen (Bd. I, 6. u. 7. Abschn.) enthält eine eingehendere Darstellung der Laplace'schen Transformation, wobei jedoch die Bedeutung der divergenten Reihen, auf die es im Folgenden hauptsächlich ankommt, nur kurz gestreift wird.

Ich beabsichtige, den von Herrn Poincaré eingeschlagenen Weg weiter zu verfolgen und das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung (A) in der ganzen Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ mit Benutzung der divergenten Reihen eingehender zu untersuchen. Es handelt sich dabei um Fragen von der Art derjenigen, welche ich im 49. Bd. der Math. Ann. für den einfachsten Fall, nämlich für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten, behandelt habe.*)

Es wird im Folgenden vorausgesetzt, dass a_0 nicht gleich Null und die m Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ der charakteristischen Gleichung

$$(C) \quad a_0 \alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \dots + a_{m-1} \alpha + a_m = 0$$

verschieden sind. Die zur singulären Stelle $z = \alpha_h$ ($h = 1, \dots, m$) der Laplace'schen Transformirten (B) gehörige determinirende Gleichung hat die Wurzeln $0, 1, \dots, p-2$ und λ_h ; ganzzahlige Werthe von λ_h werden vorläufig ausgeschlossen.

Im vorliegenden Aufsatz werden die Untersuchungen des Herrn Poincaré über die asymptotische Darstellung der Integrale der Differentialgleichung (A) durch die Normalreihen so weit ergänzt, dass es möglich ist, das Verhalten der Integrale in der ganzen Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ zu übersehen, während es sich bei Herrn Poincaré nur um das Verhalten der Integrale auf einem bestimmten nach der singulären Stelle gehenden Wege handelt. Die in § 1 und § 2 für die allgemeine Differentialgleichung (A) angedeuteten Entwicklungen, bei welchen die Gruppierung der Wurzeln der Gleichung (C) eine Rolle spielt, werden in § 3 für die Differentialgleichung zweiter Ordnung und in § 4 für die Differentialgleichung dritter Ordnung ausgeführt; in § 5 wird die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit linearen Coefficienten behandelt.

Auf Grund der hier entwickelten asymptotischen Darstellungen wird in einem folgenden Aufsatz das Verhalten der Integrale in der Umgebung von $x = \infty$ in ähnlicher Richtung untersucht, wie es im zweiten Theil des Aufsatzes „Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung“**) für den einfachsten Fall geschehen ist.

*) Viele der dortigen Entwicklungen haben allgemeinere Gültigkeit und können im Folgenden theils unverändert, theils mit gewissen Modificationen benutzt werden. — Wie sich die Bedeutung der gewissen auch nicht linearen Differentialgleichungen genügenden divergenten Reihen ohne Benutzung bestimmter Integrale untersuchen lässt, habe ich in Crelle's Journ. (Bd. 118 ff.) gezeigt.

**) Math. Ann. Bd. 49.

§ 1.

Die Laplace'sche Transformirte (B) der Differentialgleichung (A) hat unter den in der Einleitung gemachten Voraussetzungen im Endlichen die singulären Stellen der Bestimmtheit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, während $z = \infty$ eine Stelle der Unbestimmtheit ist. Die zur singulären Stelle α_h ($h = 1, \dots, m$) gehörige determinirende Gleichung hat die Wurzeln $0, 1, \dots, p-2$ und λ_h ; wenn der Voraussetzung gemäss λ_h keine ganze Zahl ist, lässt sich ein Fundamentalsystem von (B) berechnen, welches aus $p-1$ Potenzreihen von $z - \alpha_h$, nämlich $v_{h1}, v_{h2}, \dots, v_{h,p-1}$, und aus einer mit $(z - \alpha_h)^{\lambda_h}$ multiplicirten Potenzreihe

$$v_h = v_{hp} = (z - \alpha_h)^{\lambda_h} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{h\mu} (z - \alpha_h)^\mu$$

besteht. Die Grösse A_{h0} sei bestimmt fixirt.

Wir führen die folgenden Integrale der Differentialgleichung (A) ein, welche, wie sich später zeigen wird, ein Fundamentalsystem bilden:

$$\eta_h = \int_{l_h} v_h e^{zx} dz; \quad (h = 1, \dots, m)$$

wir ziehen in der z -Ebene vom Punkt α_h aus eine Gerade ins Unendliche, welche mit der positiven reellen Axe den Winkel ω bildet, und beschreiben um α_h einen kleinen Kreis, welcher die Gerade im Punkt p schneidet; dann besteht der Integrationsweg l_h aus der von ∞ bis p durchlaufenen Geraden, aus dem im positiven Sinn durchlaufenen Kreis und der von p bis ∞ rückwärts durchlaufenen Geraden. Zur Fixirung der in v_h enthaltenen Potenz $(z - \alpha_h)^{\lambda_h}$ setzen wir im Ausgangspunkt p des kreisförmigen Theiles von l_h $\arg(z - \alpha_h) = \omega$; im allgemeinen genügt es, ω zwischen einem willkürlichen Anfangswerth ω_0 und $\omega_0 - 2\pi$ variiren zu lassen. Derjenige Theil der Umgebung von $x = \infty$, in welchem der Integralausdruck für η_h gültig ist, wird sich nachher ergeben.

Nur für gewisse Werthe von ω ,

$\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1}, \omega_r = \omega_0 - \pi, \omega_{r+1} = \omega_1 - \pi, \dots, \omega_{2r-1} = \omega_{r-1} - \pi$, welche absteigend geordnet seien, kommt es vor, dass die von einem der Punkte α_h in der Richtung ω ins Unendliche gehende Gerade noch andere Punkte α_h trifft. Neben dem Winkel ω_ϱ ($\varrho = 0, 1, \dots, r-1$) kommt in obiger Reihe auch der Winkel $\omega_\varrho - \pi$ vor; denn wenn die von α_i in der Richtung ω_ϱ ins Unendliche gehende Gerade den Punkt α_h trifft, geht die von α_h aus in der Richtung $\omega_\varrho - \pi$ gezogene Gerade durch den Punkt α_i ; es ist

$$\omega_\varrho = \arg(\alpha_h - \alpha_i), \quad \omega_{\varrho+r} = \omega_\varrho - \pi = \arg(\alpha_i - \alpha_h).$$

Wenn alle Punkte $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ auf einer Geraden liegen, ist $r = 1$; liegen niemals mehr als zwei Punkte α_h auf einer Geraden, so hat r den grössten Werth $\frac{m(m-1)}{2}$. Wir setzen $l_h = l_h^{(\varrho)}$ und

$$\eta_h = \eta_h^{(\varrho)}, \quad (\varrho = 1, \dots, 2r)$$

wenn die Richtung ω des geradlinigen Theiles des Integrationsweges l_h zwischen $\omega_{\varrho-1}$ und ω_ϱ liegt. *)

Indem wir uns zur Untersuchung des Verhaltens des Integrals $\eta_h^{(\varrho)}$ in der Umgebung von $x = \infty$ wenden, schreiben wir dafür unter Weglassung der Indices ϱ und h

$$\eta = \int_l v e^{xz} dz, \quad **)$$

wo v in der Umgebung von $z = \alpha$ die Entwicklung besitzt:

$$v = (z - \alpha)^{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} (z - \alpha)^{\mu},$$

oder, wenn wir $z - \alpha$ durch z ersetzen,

$$\eta = e^{\alpha x} \int_l v e^{xz} dz,$$

so dass der Integrationsweg l die singuläre Stelle $z = 0$ umschliesst, in deren Umgebung die Entwicklung besteht:

$$v = z^{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} z^{\mu}. \quad ***)$$

Wir haben jetzt den in Fig. 2, S. 456, Bd. 49 dargestellten Integrationsweg l , und zwar beschränken wir $\arg z = \omega$ auf das Gebiet

$$\omega_{\varrho-1} - \frac{\delta}{2} > \omega > \omega_{\varrho} + \frac{\delta}{2},$$

*) Dabei ist $\omega_{2r} = \omega_0 - 2\pi$. — Wenn wir den Winkel ω das Intervall $\omega_0 \dots \omega_0 - 2\pi$ überschreiten lassen und $\omega_{\varrho \pm 2kr} = \omega_{\varrho} \mp 2k\pi$ setzen, haben wir unendlich viele Integrale $\eta_h^{(\varrho)}$; $\eta_h^{(\varrho)}$ und $\eta_h^{(\varrho+2r)}$ unterscheiden sich aber nur dadurch, dass zur Fixirung der in v_h enthaltenen Potenz $(z - \alpha_h)^{\lambda_h}$ das erste Mal $\arg(z - \alpha_h) = \omega$, das andere Mal gleich $\omega - 2\pi$ gesetzt ist; es ist daher

$$\eta_h^{(\varrho+2r)} = e^{-2\pi i \lambda_h} \eta_h^{(\varrho)}.$$

**) Dabei wird ein ähnlicher Weg eingeschlagen, wie im 49. Bd. der Math. Ann. für das specielle Integral, in welchem $v = (z - i)^{\lambda_1} (z + i)^{\lambda_2}$ ist. Es genügt daher, in Anknüpfung an die frühere Entwicklung die durch die Verallgemeinerung der Function v bedingten Abänderungen anzugeben.

***) Ganzzahlige Werthe von λ sind ausgeschlossen.

wo δ eine beliebig kleine positive Grösse ist. Wir lassen $\arg x$ von $\pi - \omega$ nach beidem Sinn höchstens um $\frac{\pi - \delta}{2}$ abweichen, so dass die Function η durch den Integralausdruck für den durch die Bedingung

$$\frac{\pi}{2} - \omega_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \omega_{\varrho} - \delta$$

bestimmten Theil der Umgebung von $x = \infty$ defnirt ist.*) Wenn wir

$$\frac{\pi}{2} - \omega_{\varrho} = \varphi_{\varrho}$$

setzen, so dass wegen $\omega_{\varrho+r} = \omega_{\varrho} - \pi$

$$\varphi_{\varrho+r} = \varphi_{\varrho} + \pi$$

ist, so ist x auf das Gebiet

$$\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+r} - \delta$$

beschränkt**), und zwar ist

$$(\varphi_{\varrho+r} - \delta) - (\varphi_{\varrho-1} + \delta) = \pi + \omega_{\varrho-1} - \omega_{\varrho} - 2\delta > \pi,$$

wenn δ hinreichend klein angenommen wird.

Da die Reihe für v im allgemeinen nur in der Umgebung von $z = 0$ convergent ist, während sich der Integrationsweg l ins Unendliche erstreckt, so setzen wir, unter n eine beliebige Zahl verstehend,

$$v = z^{\lambda} \left(\sum_{\mu=0}^n A_{\mu} z^{\mu} + R_n \right);$$

auf dem geradlinigen Theil von l setzen wir

$$R_n z^{\lambda} = v - \sum_{\mu=0}^n A_{\mu} z^{\lambda+\mu};$$

auf dem Kreis C mit dem kleinen Radius r ist

$$|R_n| < \frac{g \varrho^{n+1}}{1 - r \varrho} |z|^{n+1},$$

wo ϱ und g positive Grössen sind. Wir haben

*) In Betreff des Verhaltens der Function v in der Umgebung von $z = \infty$ ist, da sich der Integrationsweg l ins Unendliche erstreckt, § 6 der vorliegenden Arbeit heranzuziehen. Vgl. Poincaré, Am. Journ. Bd. 7; Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, S. 360 ff.

**) Für einen Theil der m Integrale $\eta_h^{(\varrho)}$ ($h = 1, \dots, m$) kann die Richtung $\arg z = \omega$ des geradlinigen Theiles des Integrationsweges das Gebiet $\omega_{\varrho-1} > \omega > \omega_{\varrho}$ überschreiten, ohne durch Punkte α hindurchzugehen, so dass die betreffende Function $\eta_h^{(\varrho)}$ durch das Integral in einem grösseren Gebiet der Veränderlichen x als dem oben angegebenen $\varphi_{\varrho-1} < \arg x < \varphi_{\varrho-r}$ dargestellt wird. Vgl. § 2.

$$\eta e^{-\alpha x} x^{\lambda+1} = \sum_{\mu=0}^n A_{\mu} \cdot x^{\lambda+1} \int_{\Gamma} z^{\lambda+\mu} e^{zx} dz + x^{\lambda+1} \int_{\Gamma} R_n z^{\lambda} e^{zx} dz.$$

Da am Anfang des Integrationsweges l im Unendlichen $\arg z$ von $\pi - \arg x$ um weniger als $\frac{\pi - \delta}{2}$ abweicht, so ist

$$x^{\lambda+1} \int_{\Gamma} z^{\lambda+\mu} e^{zx} dz = \frac{e^{\pi i(\lambda+\mu+1)}(e^{2\pi i\lambda} - 1)\Gamma(\lambda + \mu + 1)}{x^{\mu}}.$$

Wenn

$$A_{\mu} = e^{\pi i(\lambda+\mu+1)}(e^{2\pi i\lambda} - 1)\Gamma(\lambda + \mu + 1)A_{\mu}$$

gesetzt wird, besteht die Gleichung

$$\eta e^{-\alpha x} x^{\lambda+1} = \sum_{\mu=0}^n \frac{A_{\mu}}{x^{\mu}} + \frac{\varepsilon_n}{x^n},$$

wo

$$\varepsilon_n = x^{\lambda+n+1} \int_{\Gamma} R_n z^{\lambda} e^{zx} dz$$

ist. Durch Zerlegung des Integrationsweges l in den kreisförmigen Theil C und die geradlinigen Theile G, G' zerfällt ε_n in die drei Theile $\varepsilon'_n, \varepsilon''_n, \varepsilon'''_n$.*) Wie früher wird gezeigt, dass nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse R so angegeben werden kann, dass $|\varepsilon'_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist für $|x| > R, \varphi_{q-1} + \delta < \arg x < \varphi_{q+r} - \delta$.

Weiter ist

$$\varepsilon''_n = \int_G \left(v - \sum_{\mu=0}^n A_{\mu} z^{\lambda+\mu} \right) e^{zx} dz,$$

so dass v an die Stelle des Ausdrucks $z^{\lambda} (z + 2i)^{\lambda}$ auf S. 459, Bd. 49 tritt. Es ist aber jetzt noch eine positive Grösse h so vorhanden, dass für

$$|z| > r, \omega_{q-1} - \frac{\delta}{2} > \arg z > \omega_q + \frac{\delta}{2}$$

der absolute Betrag von v kleiner als $e^{h|z|}$ ist.***) Die folgenden Schlüsse gestalten sich genau wie früher, und ε''_n besitzt die vorhin von ε'_n ausgesprochene Eigenschaft. Dasselbe gilt für ε'''_n . Es lässt sich also nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse R so bestimmen, dass $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ ist für

$$|x| > R, \varphi_{q-1} + \delta < \arg x < \varphi_{q+r} - \delta;$$

*) Bd. 49, S. 458 ist α_n statt ε_n geschrieben.

**) Freilich bedarf diese Behauptung jetzt eines besonderen Beweises, welcher in § 6 nachgetragen wird.

mit anderen Worten, ε_n convergirt für $\lim |x| = \infty$ zur Grenze Null gleichmässig für alle Werthe von $\arg x$ zwischen $\varphi_{\rho-1} + \delta$ und $\varphi_{\rho+r} - \delta$. Bezeichnet man die im allgemeinen divergente Reihe

$$e^{\alpha x} x^{-\lambda-1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots \right)$$

mit S , so drücken wir das durch die Gleichung

$$\eta = e^{\alpha x} x^{-\lambda-1} \left(\sum_{\mu=0}^n \frac{A_\mu}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_n}{x^n} \right)$$

mit der angegebenen Eigenschaft von ε_n dargestellte Verhalten der Function η folgendermassen aus: die Function η wird durch die Reihe S in der Umgebung von $x = \infty$ gleichmässig für die Werthe von $\arg x$ zwischen $\varphi_{\rho-1} + \delta$ und $\varphi_{\rho+r} - \delta$ asymptotisch dargestellt; wir schreiben

$$\eta \sim S \quad (\lim x = \infty, \varphi_{\rho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\rho+r} - \delta).$$

Wir fügen nun die im Verlauf des Beweises weggelassenen Indices ρ und h wieder bei. Wir setzen

$$A_{h\mu} = e^{\pi i(\lambda_h + \mu + 1)} (e^{2\pi i \lambda_h} - 1) \Gamma(\lambda_h + \mu + 1) \cdot A_{h\mu}$$

und

$$S_h = e^{\alpha_h x} x^{-\lambda_h-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_{h\mu}}{x^\mu}. \quad (h = 1, \dots, m)$$

Dann bestehen die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1^{(\rho)} \sim S_1, \dots, \eta_m^{(\rho)} \sim S_m$$

für

$$\lim x = \infty, \varphi_{\rho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\rho+r} - \delta.$$

Dass die Functionen $\eta_1^{(\rho)}, \dots, \eta_m^{(\rho)}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A) bilden, ist jetzt wie bei Picard, *Traité* Bd. III, S. 379 zu ersehen. Dasselbe Reihensystem S_1, \dots, S_m stellt in den verschiedenen Theilen der Umgebung von $x = \infty$ die $2r$ Fundamentalsysteme $\eta_1^{(\rho)}, \dots, \eta_m^{(\rho)}$ ($\rho = 1, \dots, 2r$) asymptotisch dar. Dabei ist, was nochmals bemerkt sein möge, die in S_h enthaltene Potenz $x^{-\lambda_h-1}$ durch Angabe des Argumentes von x so fixirt, dass die Summe aus diesem Argument und dem Argument von $z - \alpha_h$ am Anfang des kreisförmigen Theiles des Integrationsweges von $\eta_h^{(\rho)}$ gleich π ist oder von π um weniger als $\frac{\pi}{2}$ abweicht.

Das Gültigkeitsgebiet

$$\varphi_{\rho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\rho+r} - \delta$$

der asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1^{(\rho)} \sim S_1, \dots, \eta_m^{(\rho)} \sim S_m$$

und das Gültigkeitsgebiet

$$\varphi_{\rho+r-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\rho+2r} - \delta$$

der asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1^{(\rho+r)} \sim S_1, \dots, \eta_m^{(\rho+r)} \sim S_m$$

erfüllen zusammen die ganze Umgebung der Stelle $x = \infty$. Es genügt daher in der Regel, zwei von den $2r$ Fundamentalsystemen beizubehalten:

$$\eta_1 = \eta_1^{(1)}, \dots, \eta_m = \eta_m^{(1)}$$

und

$$\bar{\eta}_1 = \eta_1^{(r+1)}, \dots, \bar{\eta}_m = \eta_m^{(r+1)}.$$

Um das Verhalten eines beliebigen Integrals y der Differentialgleichung (A) bei der Annäherung der Veränderlichen x an die singuläre Stelle $x = \infty$ zu untersuchen, drückt man y einmal durch η_1, \dots, η_m , sodann durch $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_m$ aus

$$y = c_1 \eta_1 + \dots + c_m \eta_m,$$

$$y = \bar{c}_1 \bar{\eta}_1 + \dots + \bar{c}_m \bar{\eta}_m$$

und setzt für η_h bzw. $\bar{\eta}_h$ die asymptotische Reihe S_h . Man hat also die asymptotische Gleichung

$$y \sim c_1 S_1 + \dots + c_m S_m$$

für

$$\varphi_0 + \delta < \arg x < \varphi_{r+1} - \delta$$

und die asymptotische Gleichung

$$y \sim \bar{c}_1 S_1 + \dots + \bar{c}_m S_m$$

für

$$\varphi_r + \delta < \arg x < \varphi_{2r+1} - \delta;$$

d. h. wenn man

$$y = \sum_{h=1}^m c_h e^{\alpha_h x} x^{-\lambda_h-1} \left(\sum_{\mu=0}^n \frac{A_{h\mu}}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_{hn}}{x^n} \right),$$

$$y = \sum_{h=1}^m \bar{c}_h e^{\alpha_h x} x^{-\lambda_h-1} \left(\sum_{\mu=0}^n \frac{A_{h\mu}}{x^\mu} + \frac{\bar{\varepsilon}_{hn}}{x^n} \right)$$

setzt, so convergiren ε_{hn} und $\bar{\varepsilon}_{hn}$ für $\lim x = \infty$ zur Grenze Null und zwar ε_{hn} gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $\varphi_0 + \delta$ und $\varphi_{r+1} - \delta$ und $\bar{\varepsilon}_{hn}$ gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $\varphi_r + \delta$ und $\varphi_{2r+1} - \delta$.

Die reellen Theile der Grössen $\alpha_i x$ und $\alpha_h x$ sind nur dann einander gleich, wenn $\arg x$ bis auf Vielfache von π gleich

$$\frac{\pi}{2} - \arg(\alpha_h - \alpha_i) = \frac{\pi}{2} - \omega_\rho = \varphi_\rho$$

ist. Die Werthe $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ sind also diejenigen Werthe von $\arg x$,

für welche zwei oder mehrere der Grössen $\Re(\alpha_h x)$, $h = 1, \dots, m$, übereinstimmen. Wenn $\arg x$ auf das Gebiet

$$\varphi_{\rho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\rho} - \delta$$

beschränkt wird, sei

$$\Re(\alpha_1 x) > \Re(\alpha_2 x) > \dots > \Re(\alpha_m x),$$

so dass für $\lim x = \infty$ $e^{(\alpha_k - \alpha_1)x}$ ($k = 2, \dots, m$) zur Grenze Null convergirt gleichmässig für die angegebenen Werthe von $\arg x$. Unter η_1, \dots, η_m verstehen wir eines derjenigen Fundamentalsysteme, welche in dem jetzt betrachteten Gebiet durch das Reihensystem S_1, \dots, S_m asymptotisch dargestellt werden. Es sei

$$y = c_1 \eta_1 + \dots + c_m \eta_m,$$

also

$$y = \sum_{h=1}^m c_h e^{\alpha_h x} x^{-\lambda_h-1} \left(\sum_{\mu=0}^n \frac{A_{h\mu}}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_{hn}}{x^n} \right),$$

wo ε_{hn} für $\varphi_{\rho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\rho} - \delta$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt. Wenn c_1 von Null verschieden ist, ist

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} x^{-\lambda_1-1} \left[\sum_{\mu=0}^n \frac{A_{1\mu}}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_{1n}}{x^n} + \frac{c_2}{c_1} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} x^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\sum_{\mu=0}^n \frac{A_{2\mu}}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_{2n}}{x^n} \right) + \dots \right];$$

schreibt man dafür

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} x^{-\lambda_1-1} \left(\sum_{\mu=0}^n \frac{A_{1\mu}}{x^\mu} + \frac{\bar{\varepsilon}_{1n}}{x^n} \right),$$

so convergirt $\bar{\varepsilon}_{1n}$ für $\varphi_{\rho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\rho} - \delta$ gleichmässig zur Grenze Null, d. h. es ist

$$y \sim c_1 S_1$$

für $\varphi_{\rho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\rho} - \delta$. Ist

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_{h-1} = 0; c_h \neq 0,$$

so findet man ebenso

$$y = c_h e^{\alpha_h x} x^{-\lambda_h-1} \left(\sum_{\mu=0}^n \frac{A_{h\mu}}{x^\mu} + \frac{\bar{\varepsilon}_{hn}}{x^n} \right),$$

wo $\bar{\varepsilon}_{hn}$ dieselbe Eigenschaft besitzt wie vorhin $\bar{\varepsilon}_{1n}$, so dass jetzt die asymptotische Gleichung

$$y \sim c_h S_h$$

besteht.

§ 2.

Wir untersuchen jetzt den Zusammenhang zwischen den $2r$ Fundamentalsystemen

$$\eta_1^{(\rho)}, \dots, \eta_m^{(\rho)} \quad (\rho = 1, \dots, 2r)$$

In der z -Ebene ist mindestens eine gegen die reelle Axe unter dem Winkel ω_ρ geneigte Gerade vorhanden, auf welcher zwei oder mehrere Punkte α_h liegen. Die in Fig. 1 dargestellte Gerade gehe durch die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, so dass

$$\omega_\rho = \arg(\alpha_1 - \alpha_2) = \arg(\alpha_2 - \alpha_3) = \dots$$

ist. Statt $\eta_h^{(\rho)}$ und $\eta_h^{(\rho+1)}$ schreiben wir vorübergehend η_h und η'_h . Am Anfang des Integrationsweges l'_h von η'_h sei $\arg(z - \alpha_h) = \omega$, wo ω zwischen ω_ρ und $\omega_{\rho+1}$ liegt; der aus dem Unendlichen kommende Theil des Integrationsweges l_h wird so gedreht, dass an seinem Anfang im Unendlichen ebenfalls

$$\arg(z - \alpha_h) = \omega$$

ist (Fig. 1).

Dann sind die Integrale η_h und η'_h in der Umgebung von $x = \infty$ für $\arg x = \pi - \omega$ gleichzeitig gültig. Der gedrehte Integrationsweg l_1 fällt mit l'_1 zusammen; dagegen ändern die geradlinigen Theile von l_2, l_3, \dots ihre Gestalt, da bei der Abänderung der Integrationswege keiner der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ überschritten werden darf. Durch Zurückführung der

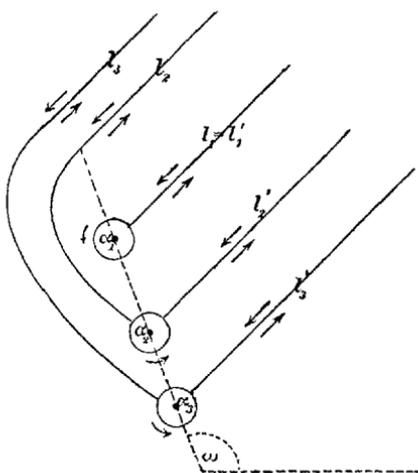


Fig. 1.

in Fig. 1 dargestellten Integrationswege l_1, l_2, l_3, \dots auf l'_1, l'_2, l'_3, \dots findet man, dass $\eta_1 = \eta'_1$, dass η_2 eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten von η'_1 und η'_2 , dass η_3 eine lineare Verbindung von $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3$ ist u. s. w. Auf dem den Punkt α_h ($h = 1, 2, 3 \dots$) umgebenden Kreis nehmen wir den Punkt β_h so an, dass

$$\arg(\beta_h - \alpha_h) = \omega_\rho + \frac{\pi}{2}$$

ist. Zu dem Wege $\alpha_2 \beta_2 \beta_1 \alpha_1$ *) gehöre die Uebergangssubstitution

$$v_2 = M_{21} v_1 + \dots;$$

wenn der Integrationsweg l nur den singulären Punkt $z = \alpha_k$ einschlieset, ist

$$\int_l v_k e^{zx} dz = 0, \quad (\nu = 1, \dots, p-1)$$

also

$$\int_l v_i e^{zx} dz = L_{ip} \int_l v_p e^{zx} dz = M_{ik} \int_l v_k e^{zx} dz.$$

*) Dabei sind zwei auf einander folgende Punkte durch eine gerade Linie verbunden.

die den Wegen $\alpha_3\beta_3\beta_2\alpha_2$ und $\alpha_3\beta_3\beta_2\beta_1\alpha_1$ entsprechenden Uebergangssubstitutionen seien

$$v_3 = M_{32}v_2 + \dots$$

und

$$v_3 = M_{31}v_1 + \dots$$

Zur Fixirung der in v_h ($h = 1, 2, 3, \dots$) enthaltenen Potenz $(z - \alpha_h)^{2h}$ nehmen wir im Punkte $z = \beta_h$ $\arg(z - \alpha_h) = \omega_\rho + \frac{\pi}{2}$ an.*) — Am Anfang von l'_h im Unendlichen war $\arg(z - \alpha_h) = \omega < \omega_\rho$, so dass, wenn man beim Durchlaufen des Integrationsweges l'_h an der Stelle β_h ankommt, $\arg(z - \alpha_h) = \omega_\rho + \frac{\pi}{2}$ ist. Wenn der Weg l_2 auf die nach einander zu durchlaufenden Wege $l'_1, l'_2, l_1'^{-1}$ ** zurückgeführt wird, so ist in β_2 auf l'_2 v_2 durch die Angabe $\arg(z - \alpha_2) = \omega_\rho + \frac{\pi}{2}$ fixirt. Es ist $v_2 = M_{21}v_1 + \dots$; wenn man in β_1 auf l'_1 v_1 durch die Angabe $\arg(z - \alpha_1) = \omega_\rho + \frac{\pi}{2}$ fixirt, so langt man in β_2 mit dem richtigen Werth von v_2 an. Kehrt man nach einer positiven Umkreisung des Punktes α_2 wieder nach β_1 zurück, so hat sich v_2 mit $e^{2\pi i \lambda_2}$ multiplicirt; es ist also in β_1 $v_2 = e^{2\pi i \lambda_2} M_{21}v_1 + \dots$, wo zur Fixirung von v_1 wieder $\arg(z - \alpha_1) = \frac{\pi}{2} + \omega_\rho$ anzunehmen ist. $\int v_2 e^{2x} dz$ nimmt demnach, nach einander über die Wege $l'_1, l'_2, l_1'^{-1}$ erstreckt, bezw. die Werthe $M_{21}\eta_1', \eta_2', -M_{21}e^{2\pi i \lambda_2}\eta_1'$ an. Es ist also

$$\eta_2 = \eta_2' + M_{21}(1 - e^{2\pi i \lambda_2})\eta_1'$$

Wenn man den Weg l'_3 auf die nach einander zu durchlaufenden Wege $l'_1, l'_2, l'_3, l_2'^{-1}, l_1'^{-1}$ zurückführt, findet man ebenso

$$\eta_3 = \eta_3' + (1 - e^{2\pi i \lambda_3})(M_{32}\eta_2' + M_{31}\eta_1')$$

u. s. w. Wenn noch andere gerade Linien von der Richtung ω_ρ vorhanden sind, auf welchen zwei oder mehrere Punkte α_h liegen, so sind die entsprechenden Integrale η_h ebenso zu behandeln. Wenn die durch den Punkt α_i gehende Gerade von der Richtung ω_ρ keine andere Wurzel der Gleichung (C) enthält, ist $\eta_i^{(e)} = \eta_i^{(e+1)}$, weil der Integrationsweg von $\eta_i^{(e)}$ durch Drehung seines geradlinigen Theils in denjenigen von $\eta_i^{(e+1)}$ übergeführt werden kann.

Wir haben somit, wenn die Uebergangssubstitutionen für die Laplace'sche Transformirte (B) bekannt sind, den Zusammenhang zwischen

*) Man kann auch sagen: $v_2 = M_{21}v_1 + \dots$ und $v_3 = M_{32}v_2 + \dots$ sind die den Wegen $\alpha_2\alpha_1$ und $\alpha_3\alpha_2$ entsprechenden Uebergangssubstitutionen, wenn im ersten Fall zwischen α_1 und α_2 $\arg(z - \alpha_1) = \omega_\rho + \pi$, $\arg(z - \alpha_2) = \omega_\rho$ und im zweiten Fall zwischen α_2 und α_3 $\arg(z - \alpha_2) = \omega_\rho + \pi$, $\arg(z - \alpha_3) = \omega_\rho$ angenommen wird.

**) Dabei ist l^{-1} der in entgegengesetztem Sinne durchlaufene Weg l .

zwei verschiedene Wurzeln besitzt, wie in dem Math. Ann. Bd. 49 behandelten Specialfall $p = 1$ auf die Form gebracht werden:

$$(A') \quad (x^p + \dots) \frac{d^2 y}{dx^2} + ((\lambda_1 + \lambda_2 + 2)x^{p-1} + \dots) \frac{dy}{dx} + (x^p + (\lambda_1 - \lambda_2)ix^{p-1} + \dots)y = 0^*.$$

Die Laplace'sche Transformirte

$$(B) \quad (z^2 + 1) \frac{d^p v}{dz^p} - ((\lambda_1 + \lambda_2 - 2p + 2)z + (\lambda_1 - \lambda_2)i) \frac{d^{p-1} v}{dz^{p-1}} + \dots = 0$$

hat im Endlichen die beiden singulären Punkte $z = i$ und $z = -i$, deren determinirende Gleichungen die Wurzeln $0, 1, \dots, p - 2, \lambda_1$ und $0, 1, \dots, p - 2, \lambda_2$ haben**). Die Berechnung der Reihen

$$S_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1 - 1} \left(A_{10} + \frac{A_{11}}{x} + \frac{A_{12}}{x^2} + \dots \right),$$

$$S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1} \left(A_{20} + \frac{A_{21}}{x} + \frac{A_{22}}{x^2} + \dots \right)$$

ist wie in § 1 vorzunehmen. Jetzt ist

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{2}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Wir setzen

$$\eta_h = \int_{l_h} v_h e^{zx} dz,$$

$$\bar{\eta}_h = \int_{\bar{l}_h} v_h e^{zx} dz;$$

($h = 1, 2$)

wir haben am Anfang des kreisförmigen Theiles des Integrationswegs l_h ($h = 1, 2$)

$$\frac{3\pi}{2} > \arg(z - \alpha_h) > \frac{\pi}{2}$$

und am Anfang des kreisförmigen Theils des Integrationswegs \bar{l}_h ($h = 1, 2$)

$$\frac{\pi}{2} > \arg(z - \alpha_h) > -\frac{\pi}{2}.$$

In der Umgebung von $x = \infty$ gelten die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1 \sim S_1, \quad \eta_2 \sim S_2$$

gleichmässig für

$$-\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$$

und die asymptotischen Gleichungen

*) Im Coefficienten von $\frac{d^2 y}{dx^2}$ fehlt das Glied mit x^{p-1} .

**) Ganzzahlige Werthe von λ_1 und λ_2 sind ausgeschlossen.

gleichmässig für $\bar{\eta}_1 \sim S_1, \bar{\eta}_2 \sim S_2$
 $\delta < \arg x < 2\pi - \delta,$

wo δ eine beliebige kleine positive Grösse darstellt.

Wir machen von den Uebergangssubstitutionen der Laplace'schen Transformierten (B') Gebrauch, welche zu den Wegen $\alpha_2 \beta_2 \beta_1 \alpha_1$ (Fig. 2) und $\alpha_1 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \alpha_2$ (Fig. 3) gehören*):

$$\begin{aligned} v_2 &= M_{21} v_1 + \dots, \\ v_1 &= M_{12} v_2 + \dots, \end{aligned}$$

und zwar soll $\arg(z - \alpha_h)$ in β_h gleich π , in $\bar{\beta}_h$ gleich 0 sein. Wir können auch sagen: $v_2 = M_{21} v_1 + \dots$ ist die Uebergangssubstitution für

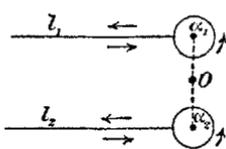


Fig. 2.

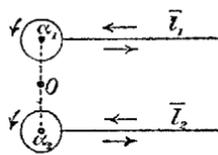


Fig. 3.

den Weg $\alpha_2 \alpha_1$, wenn im Nullpunkt $\arg(z - \alpha_1) = \frac{3\pi}{2}, \arg(z - \alpha_2) = \frac{\pi}{2}$ angenommen wird, und $v_1 = M_{12} v_2 + \dots$ die Uebergangssubstitution für den Weg $\alpha_1 \alpha_2$, wenn v_1 und v_2 durch die Angabe fixirt werden, dass im Nullpunkt $\arg(z - \alpha_1) = -\frac{\pi}{2}, \arg(z - \alpha_2) = \frac{\pi}{2}$ sein soll.

Nach § 2 besteht zwischen dem im positiven Sinn**) fortgesetzten Fundamentalsystem η_1, η_2 und dem Fundamentalsystem $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ der Zusammenhang***)

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \bar{\eta}_1, \\ \eta_2 &= \bar{\eta}_2 + M_{21}(1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \bar{\eta}_1; \end{aligned}$$

ferner haben wir

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1 + M_{12}(1 - e^{2\pi i \lambda_1}) e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2, \\ \bar{\eta}_2 &= e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2, \end{aligned}$$

wenn das Fundamentalsystem $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ in positivem Sinne in das Gültigkeitsgebiet des Fundamentalsystems η_1, η_2 fortgesetzt wird. Wenn das Fundamentalsystem η_1, η_2 bei einem Umlauf in H_1, H_2 übergeht, ist

*) Es ist $\alpha_1 = i, \alpha_2 = -i$.

**) Fussnote am Anfang von § 2.

***) Wegen $\eta_1 = \bar{\eta}_1$ gilt die asymptotische Gleichung $\eta_1 \sim S_1$ für

$$-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$$

und wegen $\bar{\eta}_2 = e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2$ die asymptotische Gleichung $\eta_2 \sim S_2$ für

$$-2\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta.$$

$$H_1 = b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2,$$

$$H_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2,$$

wobei gesetzt ist:

$$b_{11} = e^{-2\pi i\lambda_1},$$

$$b_{12} = M_{12}(1 - e^{2\pi i\lambda_1})e^{-2\pi i\lambda_2},$$

$$b_{21} = M_{21}(1 - e^{2\pi i\lambda_2})e^{-2\pi i\lambda_1},$$

$$b_{22} = (1 + M_{12}M_{21}(1 - e^{2\pi i\lambda_1})(1 - e^{2\pi i\lambda_2}))e^{-2\pi i\lambda_2}.$$

Hieraus erhält man die zur singulären Stelle $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} b_{11} - s & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - s \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$s^2 - s[e^{-2\pi i\lambda_1} + e^{-2\pi i\lambda_2} + M_{12}M_{21}e^{2\pi i\lambda_1}(e^{-2\pi i\lambda_1} - 1)(e^{-2\pi i\lambda_2} - 1)] + e^{-2\pi i(\lambda_1 + \lambda_2)} = 0.$$

Hiernach lässt sich das zu $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem y_1, y_2 durch η_1, η_2 und (unter Benutzung des Zusammenhangs zwischen η_1, η_2 und $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$) auch durch $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ ausdrücken.

Das Verhalten des Integrals

$$y = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 = \bar{c}_1\bar{\eta}_1 + \bar{c}_2\bar{\eta}_2$$

bei der Annäherung der Veränderlichen x an die Stelle $x = \infty$ wird dargestellt durch die für

$$-\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$$

gültige asymptotische Gleichung

$$y \sim c_1 S_1 + c_2 S_2$$

und durch die für

$$\delta < \arg x < 2\pi - \delta$$

gültige asymptotische Gleichung

$$y \sim \bar{c}_1 S_1 + \bar{c}_2 S_2.$$

Man hat

$$y \sim c_1 S_1$$

bei Beschränkung auf das Gebiet

$$-\pi + \delta < \arg x < -\delta$$

und

$$y \sim c_2 S_2$$

bei Beschränkung auf das Gebiet

$$\delta < \arg x < \pi - \delta^*).$$

* Die in der Arbeit des Verf. „Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen Differentialgleichung II“ (Math. Ann. Bd. 49, S. 473) für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten aus den asymptotischen Darstellungen gezogenen Folgerungen

Nehmen wir $p = 1$ an, so ergeben sich die im 49. Bd. der Math. Ann. direct hergeleiteten Sätze über die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten. Die Laplace'sche Transformirte, welche jetzt von der ersten Ordnung ist, hat das Integral

$$v = (z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_2}.$$

Indem wir dasselbe zuerst nach Potenzen von $z-i$, sodann nach Potenzen von $z+i$ entwickeln, setzen wir

$$v_1 = (z-i)^{\lambda_1} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{1\mu} (z-i)^{\mu},$$

$$v_2 = (z+i)^{\lambda_2} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{2\mu} (z+i)^{\mu},$$

wobei

$$A_{10} = (2i)^{\lambda_1}, \quad A_{20} = (-2i)^{\lambda_2}$$

durch die Angabe

$$\arg(2i) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(-2i) = \frac{3\pi}{2}$$

fixirt sind. Dann ist

$$\eta_1 = \int_{l_1} v_1 e^{zx} dz, \quad \eta_2 = \int_{l_2} v_2 e^{zx} dz,$$

$$\bar{\eta}_1 = \int_{\bar{l}_1} v_1 e^{zx} dz, \quad \bar{\eta}_2 = \int_{\bar{l}_2} v_2 e^{zx} dz.$$

Die Integrationswege l_1, l_2 sind in Fig. 2 für $\arg x = 0$, \bar{l}_1, \bar{l}_2 in Fig. 3 für $\arg x = \pi$ dargestellt. Wenn man beim Durchlaufen des Weges l_h bezw. \bar{l}_h zum ersten Mal in β_h bezw. $\bar{\beta}_h$ anlangt, ist

$$\arg(z - \alpha_h) = \pi \text{ bezw. } = 0$$

zu nehmen ($h = 1, 2$). Wir können auch setzen:

$$\eta_h = \int_{l_h} (z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_2} e^{zx} dz, \quad (h = 1, 2)$$

$$\bar{\eta}_h = \int_{\bar{l}_h} (z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_2} e^{zx} dz,$$

wobei die Function v dadurch fixirt wird, dass wir am Anfang von l_1 und l_2 im Unendlichen

$$\arg(z-i) = \pi, \quad \arg(z+i) = \pi,$$

über die Lage der Nullstellen der Integrale in der Umgebung von $x = \infty$ (§ 1 und § 2) und über das Verhalten der reellen Integrale für grosse reelle Werthe von x (§ 4) bleiben für die im gegenwärtigen Paragraphen behandelte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Coefficienten p^{ten} Grades unverändert bestehen.

am Anfang von \bar{l}_1

$$\arg(z-i) = 0, \quad \arg(z+i) = 0$$

und am Anfang von \bar{l}_2

$$\arg(z-i) = 2\pi, \quad \arg(z+i) = 0$$

setzen. Denn auf l_1 am Anfang des Kreises in β_1 ist $\arg(z-i) = \pi$, $\arg(z+i)$ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$, auf l_2 am Anfang des Kreises in β_2 $\arg(z+i) = \pi$, $\arg(z-i)$ nahezu gleich $\frac{3\pi}{2}$; es ist also auf l_1

$$(z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_1} = v_1,$$

auf l_2

$$(z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_2} = v_2,$$

wenn unter v_1 und v_2 die obigen Reihen mit den fixirten Werthen von A_{10} und A_{20} verstanden werden. Ferner ist auf \bar{l}_1 in $\bar{\beta}_1$ am Anfang des Kreises $\arg(z-i) = 0$, $\arg(z+i)$ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$, auf \bar{l}_2 in $\bar{\beta}_2$ am Anfang des Kreises $\arg(z+i) = 0$, $\arg(z-i)$ nahezu gleich $\frac{3\pi}{2}$, so dass auch $(z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_2}$ durch die Reihe v_1 bzw. v_2 dargestellt wird*).

Die zu den Wegen $\alpha_2 \beta_2 \beta_1 \alpha_1$ und $\alpha_1 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \alpha_2$ gehörigen Uebergangsubstitutionen sind $v_2 = v_1$ bzw. $v_1 = e^{-2\pi i \lambda_1} v_2$, so dass

$$M_{21} = 1, \quad M_{12} = e^{-2\pi i \lambda_1}$$

ist. Wir haben demnach die Beziehungen

$$\eta_1 = \bar{\eta}_1,$$

$$\eta_2 = \bar{\eta}_2 + (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \bar{\eta}_2$$

und

$$\bar{\eta}_1 = e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1 + (e^{-2\pi i \lambda_1} - 1) e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2,$$

$$\bar{\eta}_2 = e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2;$$

ferner

$$H_1 = e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1 + (e^{-2\pi i \lambda_1} - 1) e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2,$$

$$H_2 = (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1 + (1 - e^{-2\pi i \lambda_1} + e^{-2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)}) \eta_2;$$

die zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung

$$s^2 - s(e^{-2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)} + 1) + e^{-2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)} = 0$$

hat die Wurzeln

$$s_1 = 1, \quad s_2 = e^{-2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

Die Integrale y_1, y_2 lassen sich als bestimmte Integrale und mittelst beständig convergenter Potenzreihen darstellen (Math. Ann. Bd. 49).

*) Im 49. Bd. der Math. Ann. sind η_1, η_2 und $\bar{\eta}_2$ ebenso fixirt wie hier; dagegen ist die dort mit $\bar{\eta}_1$ bezeichnete Function gleich der mit $e^{2\pi i \lambda_1}$ multiplicirten jetzigen Function $\bar{\eta}_1$.

§ 4.

Wir gehen zur linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(A'') \quad (a_0 x^p + \dots) \frac{d^3 y}{dx^3} + (a_1 x^p + \dots) \frac{d^2 y}{dx^2} \\ + (a_2 x^p + \dots) \frac{dy}{dx} + (a_3 x^p + \dots) y = 0,$$

deren Coefficienten ganze Functionen p^{ten} Grades von x sind ($a_0 \neq 0$) und deren charakteristische Gleichung

$$a_0 \alpha^3 + a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3 = 0$$

drei verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ besitzt. Die Ausführung gestaltet sich verschieden, je nachdem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ auf einer Geraden liegen oder nicht*).

1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ liegen nicht auf einer Geraden.

Wir können annehmen, dass der etwaige stumpfe Winkel des Dreiecks $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ bei α_3 liegt und dass die Seite $\alpha_1 \alpha_2$ auf der reellen Axe senkrecht steht (Fig. 4). Die Winkel des Dreiecks mögen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ heissen.

Unter Benutzung der in § 1 eingeführten Bezeichnung ist

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{2} - \vartheta_1, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta_2, \quad \omega_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1, \quad \omega_4 = -\frac{\pi}{2} + \vartheta_2, \quad \omega_5 = -\frac{\pi}{2},$$

$$\omega_6 = -\frac{\pi}{2} - \vartheta_1 = \omega_0 - 2\pi;$$

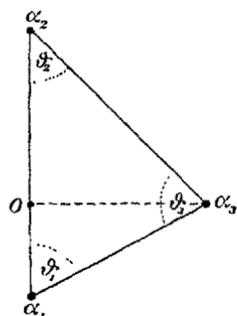


Fig. 4.

die sechs Richtungen ω_ρ sind durch die durch den Anfangspunkt gelegten Parallelen zu den Dreiecksseiten bestimmt. Weiter ist

*) Durch die Substitution

$$y = e^{Ax} y', \quad x = Bx'$$

geht die Gleichung (A'') über in

$$(a_0' x'^p + \dots) \frac{d^3 y'}{dx'^3} + (a_1' x'^p + \dots) \frac{d^2 y'}{dx'^2} + \dots = 0$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$a_0' \alpha'^3 + a_1' \alpha'^2 + a_2' \alpha' + a_3' = 0$$

oder

$$a_0 \left(A + \frac{\alpha'}{B}\right)^3 + a_1 \left(A + \frac{\alpha'}{B}\right)^2 + a_2 \left(A + \frac{\alpha'}{B}\right) + a_3 = 0$$

mit den Wurzeln

$$\alpha'_h = B(\alpha_h - A) \quad (h = 1, 2, 3).$$

Durch passende Wahl der Constanten A, B kann demnach das Punktsystem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in irgend ein ähnliches Punktsystem $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ übergeführt werden.

$$\varphi_0 = -\pi + \vartheta_1, \quad \varphi_1 = -\vartheta_2, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = \vartheta_1, \quad \varphi_4 = \pi - \vartheta_2, \\ \varphi_5 = \pi, \quad \varphi_6 = \pi + \vartheta_1;$$

um die Richtungen φ_ϱ zu erhalten, zieht man die Höhen desjenigen Dreiecks, welches durch Spiegelung des Dreiecks $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ an der imaginären Axe entsteht, und legt durch den Nullpunkt der x -Ebene die Parallelen zu diesen Höhen.

Wir erhalten 6 Fundamentalsysteme

$$\eta_1^{(\varrho)}, \eta_2^{(\varrho)}, \eta_3^{(\varrho)} \quad (\varrho = 1, \dots, 6),$$

je nachdem der geradlinige Theil des Integrationsweges eine Richtung zwischen ω_0 und ω_1, \dots , zwischen ω_5 und ω_6 hat. Die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1^{(\varrho)} \sim S_1, \quad \eta_2^{(\varrho)} \sim S_2, \quad \eta_3^{(\varrho)} \sim S_3 \quad (\varrho = 1, \dots, 6)$$

gelten in der Umgebung von $x = \infty$ gleichmässig in dem Gebiet $\mathfrak{C}^{(\varrho)}$

$$\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x \\ < \varphi_{\varrho+3} - \delta.$$

In Fig. 5 sind die Gültigkeitsgebiete $\mathfrak{C}^{(1)}, \dots, \mathfrak{C}^{(6)}$ der einzelnen Gruppen von asymptotischen Gleichungen durch Kreisbögen mit beigefügten Ziffern dargestellt.

Da die Sektoren $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(1)}$

$$-\pi + \vartheta_1 + \delta < \arg x \\ < \pi - \vartheta_2 - \delta$$

und $\bar{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}^{(4)}$

$$\vartheta_1 + \delta < \arg x \\ < 2\pi - \vartheta_2 - \delta$$

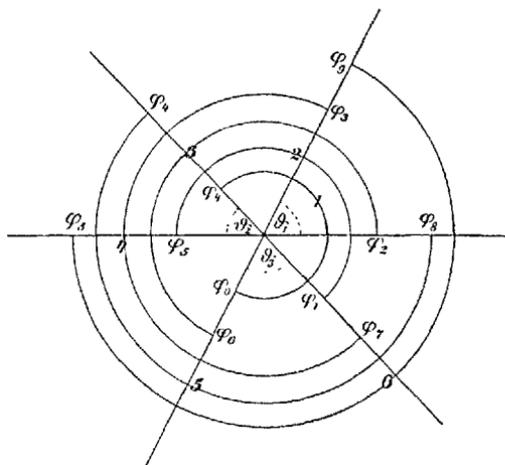


Fig. 5.

zusammen die ganze Umgebung von $x = \infty$ ausfüllen, so können wir uns auf die beiden Fundamentalsysteme

$$\eta_h = \eta_h^{(1)} = \int_{l_h} v_h e^{zx} dz \quad (h = 1, 2, 3)$$

und

$$\bar{\eta}_h = \eta_h^{(4)} = \int_{\bar{l}_h} v_h e^{zx} dz \quad (h = 1, 2, 3)$$

beschränken. Kommt der Integrationsweg l_h parallel zur reellen Axe aus $-\infty$, so gilt der Integralausdruck für η_h und die asymptotische Gleichung $\eta_h \sim S_h$ für grosse reelle positive x ; das Integral für $\bar{\eta}_h$ und die asymptotische Gleichung $\bar{\eta}_h \sim S_h$ sind für negative reelle x gültig,

wenn der Integrationsweg \bar{l}_h parallel zur reellen Axe aus $+\infty$ kommt.

Die Beziehungen zwischen den 6 Fundamentalsystemen $\eta_h^{(g)}$ sind nach § 2 durch die Formeln dargestellt*):

$$\begin{aligned}\eta_1^{(1)} &= \eta_1^{(2)}, \\ \eta_2^{(1)} &= \eta_2^{(2)}, \\ \eta_3^{(1)} &= \eta_3^{(2)} + M_{32}(1 - e^{2\pi i \lambda_2})\eta_2^{(2)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_1^{(2)} &= \eta_1^{(3)} + M_{12}(1 - e^{2\pi i \lambda_1})\eta_2^{(3)}, \\ \eta_2^{(2)} &= \eta_2^{(3)}, \\ \eta_3^{(2)} &= \eta_3^{(3)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_1^{(3)} &= \eta_1^{(4)} + M_{13}(1 - e^{2\pi i \lambda_1})\eta_3^{(4)}, \\ \eta_2^{(3)} &= \eta_2^{(4)}, \\ \eta_3^{(3)} &= \eta_3^{(4)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_1^{(4)} &= \eta_1^{(5)}, \\ \eta_2^{(4)} &= \eta_2^{(5)} + M_{23}(1 - e^{2\pi i \lambda_2})\eta_3^{(5)}, \\ \eta_3^{(4)} &= \eta_3^{(5)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_1^{(5)} &= \eta_1^{(6)}, \\ \eta_2^{(5)} &= \eta_2^{(6)} + M_{21}(1 - e^{2\pi i \lambda_2})\eta_1^{(6)}, \\ \eta_3^{(5)} &= \eta_3^{(6)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_1^{(6)} &= e^{-2\pi i \lambda_1}\eta_1^{(1)}, \\ \eta_2^{(6)} &= e^{-2\pi i \lambda_2}\eta_2^{(1)}, \\ \eta_3^{(6)} &= e^{-2\pi i \lambda_2}\eta_3^{(1)} + M_{31}(1 - e^{2\pi i \lambda_2})e^{-2\pi i \lambda_1}\eta_1^{(1)}.\end{aligned}$$

Dabei ist

$$v_1 = M_{12}v_2 + \dots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_2) = \frac{3\pi}{2},$$

mit

$$\arg(z - \alpha_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_2) = -\frac{\pi}{2},$$

zwischen α_1 und α_2 ;

*) Hieraus ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Fundamentalsystemen η_h und $\bar{\eta}_h$.

mit $v_1 = M_{13}v_3 + \dots$
 $\arg(z - \alpha_1) = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1, \quad \arg(z - \alpha_3) = \frac{3\pi}{2} - \vartheta_1,$
 mit $v_3 = M_{31}v_1 + \dots$
 $\arg(z - \alpha_1) = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1, \quad \arg(z - \alpha_3) = -\frac{\pi}{2} - \vartheta_1,$
 zwischen α_1 und α_3 ;
 mit $v_2 = M_{23}v_3 + \dots$
 $\arg(z - \alpha_2) = \frac{\pi}{2} + \vartheta_2, \quad \arg(z - \alpha_3) = \frac{\pi}{2} + \vartheta_2,$
 mit $v_3 = M_{32}v_2 + \dots$
 $\arg(z - \alpha_2) = \frac{3\pi}{2} + \vartheta_2, \quad \arg(z - \alpha_3) = \frac{\pi}{2} + \vartheta_2,$
 zwischen α_2 und α_3 .

Aus

$$\eta_1^{(1)} = \eta_1^{(2)} \quad \text{und} \quad \eta_1^{(4)} = \eta_1^{(5)} = \eta_1^{(6)} = e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1^{(1)},$$

wofür auch

$$\eta_1^{(-2)} = \eta_1^{(-1)} = \eta_1^{(0)} = \eta_1^{(1)} = \eta_1^{(2)}$$

geschrieben werden kann, folgt, dass die asymptotische Gleichung $\eta_1 \sim S_1$ gleichmässig für

$$\varphi_{-3} + \delta < \arg x < \varphi_3 - \delta$$

oder

$$\vartheta_1 - 2\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$$

gültig.

In Fig. 6 ist der Gültigkeitsbereich jeder einzelnen der asymptotischen

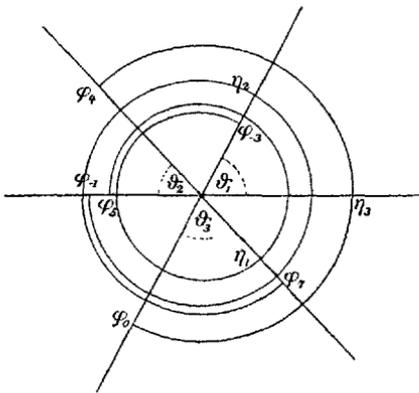


Fig. 6.

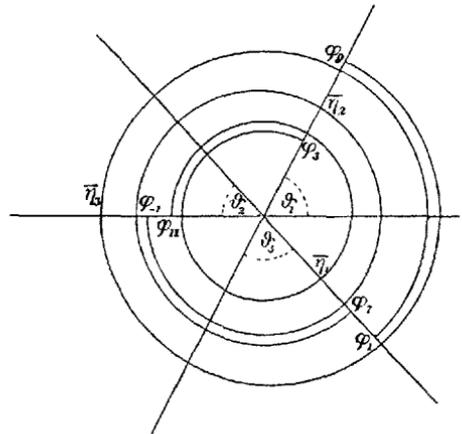


Fig. 7.

Gleichungen $\eta_h \sim S_h$ ($h = 1, 2, 3$) und in Fig. 7 der Gültigkeitsbereich jeder einzelnen der asymptotischen Gleichungen $\bar{\eta}_h \sim S_h$ ($h = 1, 2, 3$)

dargestellt und mit dem Buchstaben η_h bezw. $\bar{\eta}_h$ bezeichnet*). Der Zusammenhang zwischen dem Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 und den bisher betrachteten Fundamentalsystemen η_1, η_2, η_3 und $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3$ ergibt sich wie in § 2. Um das Verhalten eines beliebigen Integrals y bei der Annäherung der Veränderlichen an die Stelle $x = \infty$ zu finden, bringt man dasselbe auf die Form

$$y = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 = \bar{c}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{c}_2 \bar{\eta}_2 + \bar{c}_3 \bar{\eta}_3$$

und hat im Gebiet \mathfrak{S} die asymptotische Gleichung

$$y \sim c_1 S_1 + c_2 S_2 + c_3 S_3,$$

während im Gebiet $\bar{\mathfrak{S}}$

$$y \sim \bar{c}_1 S_1 + \bar{c}_2 S_2 + \bar{c}_3 S_3$$

ist.

Bezeichnet man mit \mathfrak{G}_ρ ($\rho = 1, \dots, 6$) das Gebiet $\varphi_{\rho-1} < \arg x < \varphi_\rho$, so ist in

- $\mathfrak{G}_1 : \Re(\alpha_2 x) > \Re(\alpha_3 x) > \Re(\alpha_1 x),$
- $\mathfrak{G}_2 : \Re(\alpha_3 x) > \Re(\alpha_2 x) > \Re(\alpha_1 x),$
- $\mathfrak{G}_3 : \Re(\alpha_3 x) > \Re(\alpha_1 x) > \Re(\alpha_2 x),$
- $\mathfrak{G}_4 : \Re(\alpha_1 x) > \Re(\alpha_3 x) > \Re(\alpha_2 x),$
- $\mathfrak{G}_5 : \Re(\alpha_1 x) > \Re(\alpha_2 x) > \Re(\alpha_3 x),$
- $\mathfrak{G}_6 : \Re(\alpha_2 x) > \Re(\alpha_1 x) > \Re(\alpha_3 x).$

Demnach wird das allgemeine Integral y in \mathfrak{G}_4 und \mathfrak{G}_5 durch S_1 , in \mathfrak{G}_6 und \mathfrak{G}_1 durch S_2 , in \mathfrak{G}_2 und \mathfrak{G}_3 durch S_3 asymptotisch dargestellt (wobei die Reihe S_h jedesmal mit einem constanten Factor zu versehen ist). In Fig. 8 ist das Gebiet angegeben, in welchem die Reihe S_h ($h = 1, 2, 3$) das allgemeine Integral asymptotisch darstellt, und mit S_h bezeichnet.

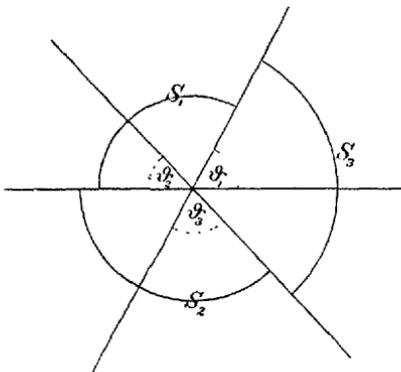


Fig. 8.

2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ liegen auf einer Geraden.

Wir können $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ reell und

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$$

voraussetzen. Jetzt ist

$$\omega_0 = \pi, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\pi = \omega_0 - 2\pi$$

und

*) Setzt man von den auf der positiven reellen Axe dargestellten Functionen η_1, η_2 die erste im negativen, die zweite im positiven Sinne nach der negativen reellen Axe fort, so hat man die Functionen $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ (erstere von einem constanten Factor abgesehen).

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2} = \varphi_0 + 2\pi.$$

Wir haben dann die beiden Fundamentalsysteme

$$\eta_h = \eta_h^{(1)} \quad (h = 1, 2, 3)$$

und

$$\bar{\eta}_h = \eta_h^{(2)} \quad (h = 1, 2, 3).$$

In Fig. 9 sind die Integrationswege l_h und \bar{l}_h in ihrer mittleren Lage dargestellt. In der Umgebung von $x = \infty$ gelten die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_h \sim S_h \quad (h = 1, 2, 3)$$

gleichmässig für

$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

und die asymptotischen Gleichungen

$$\bar{\eta}_h \sim S_h \quad (h = 1, 2, 3)$$

gleichmässig für

$$\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{5\pi}{2} - \delta.$$

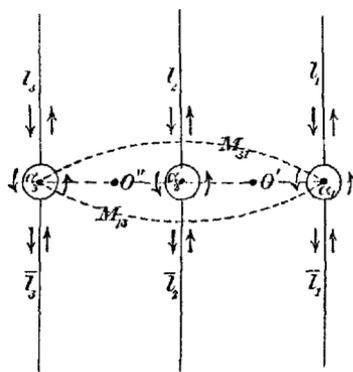


Fig. 9.

Zwischen dem im positiven Sinn fortgesetzten Fundamentalsystem η_h und dem Fundamentalsystem $\bar{\eta}_h$ bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \bar{\eta}_1, \\ \eta_2 &= \bar{\eta}_2 + (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) M_{21} \bar{\eta}_1, \\ \eta_3 &= \bar{\eta}_3 + (1 - e^{2\pi i \lambda_3}) (M_{32} \bar{\eta}_2 + M_{31} \bar{\eta}_1); \end{aligned}$$

die Beziehungen zwischen dem im positiven Sinn fortgesetzten Fundamentalsystem $\bar{\eta}_h$ und dem Fundamentalsystem η_h lauten:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_3 &= e^{-2\pi i \lambda_3} \eta_3, \\ \bar{\eta}_2 &= e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2 + (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) M_{23} e^{-2\pi i \lambda_3} \eta_3, \\ \bar{\eta}_1 &= e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1 + (1 - e^{2\pi i \lambda_1}) (M_{12} e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2 + M_{13} e^{-2\pi i \lambda_3} \eta_3). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$v_2 = M_{21} v_1 + \dots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_1) = \pi; \quad \arg(z - \alpha_2) = 0,$$

$$v_1 = M_{12} v_2 + \dots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_1) = -\pi, \quad \arg(z - \alpha_2) = 0$$

zwischen α_1 und α_2 ;

$$v_3 = M_{32} v_2 + \dots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_2) = \pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0,$$

$$v_2 = M_{23} v_3 + \dots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_2) = -\pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0$$

zwischen α_2 und α_3 ;

$$v_3 = M_{31} v_1 + \dots, \quad v_1 = M_{13} v_3 + \dots$$

entsprechen den in Fig. 9 mit M_{31} bzw. M_{13} bezeichneten punktierten Wegen, und zwar ist zwischen α_1 und α_3 bei der ersten Substitution nahezu

$$\arg(z - \alpha_1) = \pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0,$$

bei der zweiten nahezu

$$\arg(z - \alpha_1) = -\pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0$$

zu nehmen.

Die Darstellung des zu $x = \infty$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems y_h durch η_h und $\bar{\eta}_h$ ergibt sich wie früher.

Ist

$$y = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 = \bar{c}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{c}_2 \bar{\eta}_2 + \bar{c}_3 \bar{\eta}_3,$$

so gelten die asymptotischen Gleichungen

$$y \sim c_1 S_1 + c_2 S_2 + c_3 S_3,$$

$$y \sim \bar{c}_1 S_1 + \bar{c}_2 S_2 + \bar{c}_3 S_3$$

bzw. für

$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

und

$$\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{5\pi}{2} - \delta.$$

Für

$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$$

gilt die asymptotische Gleichung

$$y \sim c_1 S_1,$$

wenn c_1 von Null verschieden ist, und für

$$\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

wenn \bar{c}_3 von Null verschieden ist, die asymptotische Gleichung

$$y \sim \bar{c}_3 S_3.$$

§ 5.

Für die Laplace'sche Differentialgleichung dritter Ordnung

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + (a_1 x + b_1) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_2 x + b_2) \frac{dy}{dx} + (a_3 x + b_3) y = 0$$

ist v von der Form

$$v = (z - \alpha_1)^{\lambda_1} (z - \alpha_2)^{\lambda_2} (z - \alpha_3)^{\lambda_3},$$

wo ganzzahlige Werthe von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ausgeschlossen werden.

1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ liegen nicht auf einer Geraden. Durch Entwicklung von v nach Potenzen von $z - \alpha_h$ erhalten wir

$$v_h = (z - \alpha_h)^{\lambda_h} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{h\mu} (z - \alpha_h)^\mu \quad (h = 1, 2, 3),$$

wobei

$$A_{10} = (\alpha_1 - \alpha_2)^{\lambda_2} (\alpha_1 - \alpha_3)^{\lambda_3},$$

$$A_{20} = (\alpha_2 - \alpha_1)^{\lambda_1} (\alpha_2 - \alpha_3)^{\lambda_3},$$

$$A_{30} = (\alpha_3 - \alpha_1)^{\lambda_1} (\alpha_3 - \alpha_2)^{\lambda_2}$$

durch die Angabe

$$\arg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{3\pi}{2} \quad , \quad \arg(\alpha_1 - \alpha_3) = \frac{3\pi}{2} - \vartheta_1,$$

$$\arg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \arg(\alpha_2 - \alpha_3) = \frac{\pi}{2} + \vartheta_2,$$

$$\arg(\alpha_3 - \alpha_1) = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1, \quad \arg(\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{3\pi}{2} + \vartheta_2$$

fixirt sein mögen.

Wir haben die sechs Fundamentalsysteme $\eta_h^{(\rho)}$ ($\rho = 1, \dots, 6$), von welchen wir insbesondere $\eta_h = \eta_h^{(1)}$ und $\bar{\eta}_h = \eta_h^{(4)}$ betrachten. Wenn die geradlinigen Theile der Integrationswege l_h und \bar{l}_h von η_h und $\bar{\eta}_h$ parallel zur reellen Axe verlaufen, derjenige von η_h aus $-\infty$, derjenige von $\bar{\eta}_h$ aus $+\infty$ kommend, und wenn wir

$$\eta_h = \int_{l_h} v e^{zx} dz, \quad (h = 1, 2, 3)$$

$$\bar{\eta}_h = \int_{\bar{l}_h} v e^{zx} dz$$

setzen, so ist in η_1, η_2, η_3 die Function v durch die Angabe fixirt, dass am Anfang von l_h im Unendlichen

$$\arg(z - \alpha_1) = \arg(z - \alpha_2) = \arg(z - \alpha_3) = \pi$$

sein soll; bei $\bar{\eta}_1$ ist am Anfang des Integrationsweges

$$\arg(z - \alpha_1) = 0, \quad \arg(z - \alpha_2) = 2\pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 2\pi,$$

bei $\bar{\eta}_2$

$$\arg(z - \alpha_1) = 0, \quad \arg(z - \alpha_2) = 0, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0,$$

bei $\bar{\eta}_3$

$$\arg(z - \alpha_1) = 0, \quad \arg(z - \alpha_2) = 2\pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0$$

zu nehmen. Bei dieser Festsetzung besteht am Anfang des kreisförmigen Theiles des Integrationsweges von η_h die oben für v_h angegebene Reihenentwicklung mit $\arg(z - \alpha_h) = \pi$ und am Anfang des kreisförmigen Theiles von $\bar{\eta}_h$ dieselbe Entwicklung mit $\arg(z - \alpha_h) = 0$.

Um den Zusammenhang zwischen den 6 Fundamentalsystemen $\eta_h^{(e)}$ zu erhalten, hat man in den in § 4 aufgestellten Formeln zu setzen:

$$M_{12} = 1, \quad M_{21} = e^{-2\pi i \lambda_2}, \quad M_{13} = 1, \quad M_{31} = e^{-2\pi i \lambda_3}, \\ M_{23} = e^{-2\pi i \lambda_2}, \quad M_{32} = 1,$$

Zwischen η_h und $\bar{\eta}_h$ bestehen die Beziehungen:

$$\eta_1 = \bar{\eta}_1 + (1 - e^{2\pi i \lambda_1})\bar{\eta}_2 + (1 - e^{2\pi i \lambda_1})\bar{\eta}_3, \\ \eta_2 = \bar{\eta}_2, \\ \eta_3 = (1 - e^{2\pi i \lambda_3})\bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_3;$$

$$\bar{\eta}_1 = e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1, \\ \bar{\eta}_2 = (e^{-2\pi i \lambda_2} - 1)e^{-2\pi i(\lambda_1 + \lambda_2)} \eta_1 + e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2 + (e^{-2\pi i \lambda_2} - 1)e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_3, \\ \bar{\eta}_3 = (e^{-2\pi i \lambda_3} - 1)e^{-2\pi i \lambda_3} \eta_1 + e^{-2\pi i \lambda_3} \eta_3.$$

Dabei ist jedesmal die links stehende Function in das Gältigkeitsgebiet der rechts stehenden Function fortgesetzt zu denken.

2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ liegen auf einer Geraden

Die in den Ausdrücken für A_{10}, A_{20}, A_{30} enthaltenen Potenzen sind jetzt durch die Angabe fixirt:

$$\arg(\alpha_1 - \alpha_2) = 0, \quad \arg(\alpha_1 - \alpha_3) = 0, \\ \arg(\alpha_2 - \alpha_1) = \pi, \quad \arg(\alpha_2 - \alpha_3) = 0, \\ \arg(\alpha_3 - \alpha_1) = \pi, \quad \arg(\alpha_3 - \alpha_2) = \pi.$$

In Uebereinstimmung mit der in § 4 gegebenen Definition von η_h und $\bar{\eta}_h$ haben wir

$$\eta_h = \int_{\bar{l}_h} v e^{z\alpha} dz \\ \bar{\eta}_h = \int_{l_h} v e^{z\alpha} dz \quad (h = 1, 2, 3),$$

wenn bei der in Fig. 9 dargestellten Lage der Integrationswege die Function $v = (z - \alpha_1)^{\lambda_1} (z - \alpha_2)^{\lambda_2} (z - \alpha_3)^{\lambda_3}$ durch Angabe der Argumente von $z - \alpha_1, z - \alpha_2, z - \alpha_3$ am Anfang des Integrationsweges folgendermassen fixirt wird: es sei für l_1, l_2, l_3

$$\arg(z - \alpha_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_2) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_3) = \frac{\pi}{2},$$

für \bar{l}_1

$$\arg(z - \alpha_1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_2) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_3) = -\frac{\pi}{2},$$

für \bar{l}_2

$$\arg(z - \alpha_1) = \frac{3\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_2) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_3) = -\frac{\pi}{2},$$

für \bar{l}_3

$$\arg(z - \alpha_1) = \frac{3\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_2) = \frac{3\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_3) = -\frac{\pi}{2}.$$

Es ist jetzt

$$M_{32} = 1, \quad M_{21} = 1, \quad M_{31} = 1, \\ M_{12} = e^{-2\pi i \lambda_1}, \quad M_{23} = e^{-2\pi i \lambda_2}, \quad M_{13} = e^{-2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)},$$

also

$$\eta_1 = \bar{\eta}_1, \\ \eta_2 = \bar{\eta}_2 + (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \bar{\eta}_1, \\ \eta_3 = \bar{\eta}_3 + (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) (\bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2);$$

$$\bar{\eta}_1 = e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1 + (e^{-2\pi i \lambda_1} - 1) (e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2 + e^{-2\pi i (\lambda_2 + \lambda_3)} \eta_3), \\ \bar{\eta}_2 = e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2 + (e^{-2\pi i \lambda_2} - 1) e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_3, \\ \bar{\eta}_3 = e^{-2\pi i \lambda_3} \eta_3.$$

Bei der Laplace'schen Differentialgleichung lässt sich das zur singulären Stelle $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 mittelst bestimmter Integrale darstellen, wobei wir ganzzahlige Werthe von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nicht nur, sondern auch von $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ausschliessen. Wir haben wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ liegen nicht auf einer Geraden.

Der Fusspunkt des von α_3 auf $\alpha_1 \alpha_2$ gefällten Lothes (Fig. 4) sei O .

Wir verstehen unter s_h einen von O ausgehenden und nach positiver Umkreisung von α_h in O endigenden Weg und setzen

$$L_1 = s_1 s_3 s_1^{-1} s_3^{-1}, \quad L_2 = s_2 s_3 s_2^{-1} s_3^{-1};$$

L_3 besteht aus einer aus dem Unendlichen kommenden Geraden, einem die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ einschliessenden Kreis und der rückwärts durchlaufenen Geraden. Wir setzen

$$y_h = \int_{L_h} v e^{xz} dz \quad (h = 1, 2, 3);$$

zur Fixirung von v setzen wir am Anfang von L_1 wie von L_2 in O

$$\arg(z - \alpha_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_2) = \frac{3\pi}{2}, \quad \arg(z - \alpha_3) = \pi;$$

wenn $\arg x = 0$ ist, wird am Anfang von L_3 im Unendlichen

$$\arg(z - \alpha_1) = \arg(z - \alpha_2) = \arg(z - \alpha_3) = \pi$$

angenommen, und wenn sich x ändert, wird der geradlinige Theil von L_3 in bekannter Weise gedreht. Man findet ähnlich wie in Bd. 49, S. 469

$$y_1 = (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \eta_1 - (1 - e^{2\pi i \lambda_1}) \eta_3,$$

$$y_2 = (1 - e^{2\pi i \lambda_3}) \eta_2 - (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \eta_3,$$

$$y_3 = \eta_1 + e^{2\pi i \lambda_1} \eta_3 + e^{2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)} \eta_2$$

und

$$y_1 = (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \bar{\eta}_1 - (1 - e^{2\pi i \lambda_1}) e^{2\pi i \lambda_3} \bar{\eta}_3,$$

$$y_2 = (1 - e^{2\pi i \lambda_3}) e^{2\pi i \lambda_2} \bar{\eta}_2 - (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \bar{\eta}_3,$$

$$y_3 = \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_3.$$

2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ liegen auf einer Geraden.

Der Integrationsweg L_3 wird wie vorhin definiert; um einen für $\arg x = \frac{\pi}{2}$ gültigen Ausdruck von y_3 zu erhalten, nehmen wir am Anfang von L_3 im Unendlichen

$$\arg(z - \alpha_1) = \arg(z - \alpha_2) = \arg(z - \alpha_3) = \frac{\pi}{2}$$

an. Es sei O' ein Punkt zwischen α_1 und α_2 , O'' ein Punkt zwischen α_2 und α_3 ; wir verstehen unter s_h' (s_h'') einen von O' (O'') ausgehenden und nach positiver Umkreisung von α_h dahin zurückkehrenden Weg und setzen

$$L_1 = s_1' s_2' s_1'^{-1} s_2'^{-1}, \quad L_2 = s_2'' s_3'' s_2''^{-1} s_3''^{-1};$$

am Anfang von L_1 in O' werde

$$\arg(z - \alpha_1) = \pi, \quad \arg(z - \alpha_2) = 0, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0$$

und am Anfang von L_2 in O''

$$\arg(z - \alpha_1) = \pi, \quad \arg(z - \alpha_2) = \pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0$$

angenommen. Wenn wir wieder

$$y_h = \int_{L_h} v e^{xz} dz \quad (h = 1, 2, 3)$$

setzen, so drückt sich das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 durch die Fundamentalsysteme η_1, η_2, η_3 und $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3$ folgendermassen aus:

$$y_1 = (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \eta_1 - (1 - e^{2\pi i \lambda_1}) \eta_2,$$

$$y_2 = (1 - e^{2\pi i \lambda_3}) \eta_2 - (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \eta_3,$$

$$y_3 = \eta_3 + e^{2\pi i \lambda_1} \eta_2 + e^{2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)} \eta_1;$$

$$y_1 = (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) e^{2\pi i \lambda_1} \bar{\eta}_1 - (1 - e^{2\pi i \lambda_1}) \bar{\eta}_2,$$

$$y_2 = (1 - e^{2\pi i \lambda_3}) e^{2\pi i \lambda_2} \bar{\eta}_2 - (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \bar{\eta}_3,$$

$$y_3 = \bar{\eta}_3 + \bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_1.$$

In beiden Fällen lassen die Integrale y_1, y_2, y_3 Entwicklungen von der Form

Wenn man diese Gleichungen bezw. mit y_1, \dots, y_n multiplicirt und addirt, erhält man

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (y_1^2 + \dots + y_n^2)}{\partial r} = (a_{11} - \lambda) y_1^2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) y_n^2 + \dots;$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist, wenn man $r \geq r_0$ annimmt und für λ eine hinreichend grosse positive Zahl setzt, eine definite negative quadratische Form von y_1, \dots, y_n . Setzt man

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 = f(r, \omega),$$

so ist für $r \geq r_0$

$$f'_r(r, \omega) < 0.$$

Nun ist aber für $r > r_0$

$$f(r, \omega) = f(r_0, \omega) + (r - r_0) f'_r(r_1, \omega),$$

wo $r_0 < r_1 < r$ ist. Für $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, wo ω_1, ω_2 zwei endliche Werthe sind, liegt $f(r_0, \omega)$ unter einer endlichen Grösse G , da das ursprüngliche Differentialgleichungssystem auf dem Kreisbogen $|t| = r_0$, $\omega_1 \leq \arg t \leq \omega_2$ keine singuläre Stelle besitzt. Es ist also für $r \geq r_0$, $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ auch

$$f(r, \omega) < G$$

und daher auch

$$|y_\alpha| = |x_\alpha| e^{-\lambda r} < G^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$|x_\alpha| < \frac{1}{2} e^{hr} \quad (\alpha = 1, \dots, n),$$

wo h eine positive Grösse ist. Wenn aber der reelle und der imaginäre Theil von X_α dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2} e^{hr}$ sind, so ist

$$|X_\alpha| < e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

für $|t| \geq r_0$, $\omega_1 \leq \arg t \leq \omega_2$.

Wendet man diesen Satz auf die Laplace'sche Transformirte (B) an, welche durch ein System von p Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzt werden kann, das in der Umgebung von $s = \infty$ die oben vorausgesetzte Form hat, so ist die in § 1 aufgestellte Behauptung erwiesen.

Charlottenburg, 29. August 1897.