die gegebene untersuchen. Findet sich, dafs sie nicht so viel reelle Wurzeln haben kann, als sie Zeichenwechsel hat, so kann die gegebene Gleichung auch nicht mehr reelle Wurzeln haben, als sie, weil die Quadratwurzeln ebenfalls imaginair sind.

Auch lassen sich aus dem obigen Kennzeichen verschiedene andere Folgerungen ziehen; wie leicht zu sehen.

22.

Bemerkungen über Figuren, die aus beliebigen, von geraden Linien umschlossenen Figuren zusammengesetzt sind.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

Es sei eine Figur gegeben, wie z. B. (Fig. 1. Taf. 3.) vorstellt. Sie sei aus

a ebenen Dreiecken,
b ebenen Vierecken,
c ebenen Fünfecken

u. s. w. zusammengesetzt, und es sei

$$1)\quad a + b + c \ldots\ldots = F.$$

Die Zahl der Eckpuncte, welche im äufseren Umfange der ganzen Figur liegen, wie A, B, H, I, M etc., sei n, die Zahl der Eckpuncte im Innern der Figur, wie C, D, G, F, E etc., sei m und

$$2)\quad m + n = S.$$

Die Zahl sämmtlicher gerader Linien, welche die zusammengesetzte Figur inund auswendig begrenzen, sei

$$3)\quad = A,$$

wobei zu bemerken, dafs die geradlinigen Grenzen der Figur, sowohl innerhalb als aufserhalb, immer nur von einem Eckpuncte bis zum nächsten, welchen sie begrenzen, gerechnet werden, auch dann, wenn mehrere Eckpuncte in einer und derselben geraden Linie liegen. Liegen z. B. die Eckpuncte A, B, C in einer geraden Linie, so werden AB und BC für zwei einzelne Grenzlinien gerechnet, und die Figur $ABCDEF$ wird nicht als ein Fünfeck, sondern als ein Sechseck betrachtet. Liegen E, L, K in einer geraden Linie, desgleichen N, M, I, H, so werden EL, LK, NM, MI, IH für einzelne Grenzen gerechnet, und die Figur *EDGHIKL* ist nicht ein Sechseck, sondern ein Siebeneck, u. s. w.

Man stelle sich nun einen Augenblick vor, die einzelnen F ebenen Figuren, aus welchen die ganze Figur zusammengesetzt ist, grenzten nicht aneinander, so würde die gesammte Zahl ihrer Seiten

$$3a + 4b + 5c + 6d \ldots\ldots\ldots$$

sein. Stofsen dagegen die Figuren, wie es sein soll, aneinander, so wird jede innere Seite zwei Figuren zugleich begrenzen. Rechnet man daher zu der obigen Zahl von Seiten der abgesonderten Figuren noch die Zahl der äufseren Seiten der zusammengesetzten Figur, so wird die ganze Summe doppelt so grofs sein, als die Zahl aller äufseren und inneren Grenzen der zusammengesetzten Figur. Die Zahl der äufseren Seiten der zusammengesetzten Figur ist aber offenbar der Zahl n ihrer äufseren Eckpuncte gleich, und also ist

$$4)\quad 3a + 4b + 5c + 6d \ldots\ldots + n = 2A.$$

Nun hat Cauchy im *Journal de l'école polytechnique* bewiesen, dafs immer

$$5)\quad S + F = A + 1$$

ist *). Daraus folgt $3S + 3F = 3A + 3$. Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke von S, F und A (2. 1 und 4.), so findet man

---

*) Anmerkung des Herausgebers. Dieser Satz von Cauchy steht im *Journal de l'école polytechnique* (Band IX. Heft 16. Seite 80). Cauchy giebt davon zwei Beweise. Ich will sie für Leser, welche dieses Journal nicht zur Hand haben, wörtlich hersetzen.

„1) Erster Beweis. Man theile die einzelnen Polygone in Dreiecke, indem man in jedem, aus einem seiner Scheitel, nach den übrigen, nicht daran grenzenden Scheiteln, Diagonalen zieht. Die Zahl dieser sämmtlichen Diagonalen sei n, so wird $F + n$ die Zahl der durch dieselben abgetheilten Dreiecke, und $A + n$ die Zahl ihrer Seiten sein. (Denn gesetzt, in den verschiedenen Figuren würden, der Reihe nach, $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots\ldots$ Diagonalen gezogen, so entstehen dadurch $\nu_1 + 1$, $\nu_2 + 1$, $\nu_3 + 1$ u. s. w. Dreiecke, überhaupt also $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \ldots\ldots\ldots + F$ Dreiecke, weil F Figuren vorhanden sind, folglich, weil $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \ldots\ldots\ldots = n$ sein soll, $F + n$ Dreiecke. Und da die Zahl der Seiten der ungetheilten Figur A war, und n Diagonalen hinzukommen, so ist die Zahl aller Seiten der getheilten Figur $A + n$. D. H.). Die Zahl der Ecken der Dreiecke ist der Zahl S der Ecken der Polygone gleich (denn durch die Diagonalen ist keine neue Ecke hinzugekommen, d. H.). Nun setze man, es würden nach und nach die verschiedenen Dreiecke weggenommen, bis zuletzt nur noch ein einziges übrig bleibt, und zwar auf die Weise, dafs man mit dem Wegnehmen bei denjenigen Dreiecken anfängt, welche am äufseren Umfange der Figur liegen, hernach aber vorzugsweise diejenigen wegnimmt, von welchen eine oder zwei Seiten, durch das Wegnehmen der vorigen, in den äufseren Umfang gekommen

$$3m + 3n + 3a + 3b + 3c \ldots = A + 3a + 4b + 5c \ldots + n + 3, \text{ oder}$$

$$6) \quad 3m + 2n - 3 - b - 2c - 3d \ldots\ldots = A.$$

Nun sind zur Bestimmung sämmtlicher Eckpuncte der zusammengesetzten Figur $2(S-2)+1 = 2S-3$ gerade Linien nöthig. Denn man setze, aus den Endpuncten irgend einer der äufseren oder inneren Seiten der Figur wären nach allen übrigen $S-2$ Eckpuncten gerade Linien gezogen, welches $2(S-2)$ gerade Linien wären, so sind durch dieselben, zusammengenommen mit der einen Linie, durch deren Endpuncte sie gehen, alle Eckpuncte der Figur gegeben. Bezeichnet man diese Zahl $2S-3$ durch B, so ist vermöge (2.)

$$7) \quad B = 2m + 2n - 3,$$

also ist aus (6.)

$$8) \quad A - B = m - b - 2c - 3d \ldots\ldots$$

---

sind. Es sei h' die Zahl der Dreiecke, welche, indem man sie wegnimmt, eine Seite, und h'' die Zahl derjenigen Dreieke, welche alsdann zwei Seiten in dem äufseren Umfange der Figur haben, so verschwinden durch das Wegnehmen jedes Dreiecks der ersten Art eine Seite und durch das Wegnehmen jedes Dreiecks der zweiten Art zwei Seiten und eine Ecke der Figur. Daraus folgt, dafs, nachdem alle Dreiecke bis auf ein einziges weggenommen worden, zusammen $h' + h''$ Dreiecke, $h' + 2h''$ Seiten und h'' Scheitel weggefallen sind. Die Zahl der übrigbleibenden Dreiecke ist also

$$F + n - (h' + h'') = 1,$$

die Zahl der übrig gebliebenen Seiten ist

$$A + n - (h' + 2h'') = 3,$$

und die Zahl der übrig gebliebenen Eckpuncte

$$S - h'' = 3.$$

Addirt man die erste und dritte dieser drei Gleichungen, und zieht von der Summe die zweite ab, so findet man

$$S + F - A = 1 \text{ oder } S + F = A + 1.$$

2) Zweiter Beweis. Man stelle sich die verschiedenen Figuren rund um eine von ihnen liegend vor. Es sei a die Zahl der Seiten, und s die Zahl der Eckpuncte des ersten Polygons, a' die Zahl derjenigen Seiten, und s' die Zahl derjenigen Eckpuncte des zweiten Polygons, welche es mit dem ersten nicht gemein hat, u. s. w. Alsdann ist offenbar

$$a = s, \quad a' = s' + 1, \quad a'' = s'' + 1 \text{ etc.}$$

Nimmt man die Summe dieser Gleichungen, deren Zahl F ist, so findet man

$$(a + a' + a'' \ldots\ldots = s + s' + s'' \ldots\ldots + F - 1. \text{ D. H.}),$$

$$\text{weil} \quad a + a' + a'' \ldots\ldots = A$$

$$\text{und} \quad s + s' + s'' \ldots\ldots = S \text{ ist},$$

$$A = S + F - 1 \text{ oder } S + F = A + 1."$$

Cauchy leitet aus diesem Satze noch andere, z. B. auch die bekannte Euler'sche Gleichung zwischen der Zahl der Ecken, Seiten und Kanten eines beliebigen Polyëders ab.

Aus diesem Resultat lassen sich mancherlei Folgerungen ziehen. Zum Beispiel:

I. Die gegebene Figur sei aus lauter Dreiecken zusammengesetzt, so ist $b = 0$, $c = 0$ etc,, und folglich

$$9) \quad A - B = m,$$

das heifst: wenn alle inneren und äufseren Seiten der zusammengesetzten Figur gegeben sind, so sind m Seiten, also gerade so viel, wie die zusammengesetzte Figur innere Eckpuncte hat, mehr gegeben, als zur Bestimmung aller Eckpuncte der Figur, und folglich der Figur selbst, nöthig sind. Diese Bemerkung kann z. B. in der Geodäsie (*géodésie*, Feldmefskunst. D. H.) nützlich sein. Sie lehrt, dafs wenn man von einer, aus Dreiecken zusammengesetzten Figur (von einem Dreiecks-Netz. D. H.) alle Seiten gemessen oder berechnet hat, so viel Seiten von den übrigen abhängen, als die Figur innere Eckpuncte hat.

II. Wenn die Zahl der sämmtlichen inneren und äufseren Seiten der zusammengesetzten Figur gerade so grofs ist, als die Zahl der zur vollständigen Bestimmung der Figur nöthigen geraden Linien, so ist $A - B = 0$, folglich vermöge (8.)

$$10) \quad b + 2c + 3d \ldots\ldots\ldots = m.$$

Das heifst: eine zusammengesetzte Figur, die durch ihre äufseren und inneren Seiten vollständig gegeben sein soll, darf nicht nothwendig blos aus Dreiecken bestehen, sondern es können auch in derselben b Vierecke, c Fünfecke, d Sechsecke etc. sein, wenn nur die Summe von b, $2c$, $3d$ etc. gleich der Zahl m der inneren Eckpuncte der Figur ist. Dieser Satz kann ebenfalls in der Geodäsie nützlich sein.

III. Da Alles, worauf die Gleichung (6.) beruhet (auch der Cauchy'sche Satz. D. H.), auch dann noch gilt, wenn die zusammengesetzte Figur nicht in einer und derselben Ebene liegt, sondern aus ebenen Figuren zusammengesetzt ist, deren jede in einer anderen Ebene liegen kann, so kann man das Resultat (6.), oder vielmehr das Resultat (9.), auch auf Polyëder anwenden, z. B. auf folgende Weise:

Man stelle sich die in irgend einer Ecke E eines beliebigen Polyëders zusammenstofsenden Seiten-Ebenen desselben aus der nemlichen Ecke, desgleichen die übrigen Seiten-Ebenen des Polyëders, jede aus einer beliebigen ihrer Ecken durch Diagonalen in Dreiecke getheilt, und alle Kanten des Polyëders, nebst allen, in den Seiten-Ebenen gezogenen Diagonalen, gegeben vor. Ferner stelle man sich vor, es wären aus der Ecke E des Polyëders nach allen seinen übrigen Ecken gerade Linien gezogen, die wir durch L_1, L_2, L_3 etc. bezeichnen wollen, und durch diese Linien und die daran stofsenden Kanten und Diagonalen des Polyëders wären Ebenen gelegt, alle diese Ebenen aber, sammt den Seiten-Ebenen, die in der Ecke zusammenstofsen, schnitten irgend eine beliebige Ebene, die durch P bezeichnet werden mag, so werden die Durchschnitte der durch die Linien L_1, L_2, L_3 ...... und durch die Kanten und Diagonalen des Polyëders gelegten Ebenen, so wie der Seiten-Ebenen, welche in der Ecke E zusammenstofsen, mit der Ebene P, welche Durchschnitte durch D_1, D_2, D_3 ..... bezeichnet werden mögen, auf der Ebene P eine aus lauter Dreiecken zusammengesetzte Figur bilden, welche gerade so viel Seiten haben wird, als das Polyëder Kanten und in seinen Seiten-Ebenen Diagonalen hat. Wäre diese Figur, sammt den Linien L_1, L_2, L_3 ...... gegeben, so wäre offenbar das Polyëder selbst vollständig gegeben. Nun werden die Durchschnittslinien D_1, D_2, D_3 ...... sammt den Linien L_1, L_2, L_3 ...... offenbar auf irgend eine Weise von den gegebenen Kanten und Diagonalen des Polyëders abhängen. Die Zahl der Linien D_1, D_2, D_3 ...... ist, wie gesagt, der Zahl der Kanten des Polyëders und der Diagonalen in seinen Seiten-Ebenen gleich. Die Zahl der Linien L_1, L_2, L_3 ...... ist der Zahl der inneren Ecken der auf der Ebene P entstandenen Figur gleich. Also übertrifft die Zahl der Linien D_1, D_2, D_3 ...... und L_1, L_2, L_3 ...... zusammengenommen die Zahl der Kanten des Polyëders um die Zahl der inneren Ecken der Figur auf der Ebene P. Aber eben so viel Linien sind, vermöge des Satzes (9.), mehr bekannt, wenn man alle Linien D_1, D_2, D_3 ....., der Figur auf der Ebene P kennt. Also kann man schliefsen, dafs durch diese Figur die Linien L_1, L_2, L_3 ...... zugleich mit gefunden werden, und dafs also das Polyëder schon durch seine Kanten und Diagonalen in den Seiten-Ebenen allein vollständig bestimmt ist. Nun aber werden durch die Kanten und Diagonalen in den Seiten-Ebenen die Seiten-Ebenen selbst bestimmt: also wird ein Polyëder durch seine Seiten-Ebenen, welche es auch sein mögen, vollständig gegeben, und zwei convexe Polyëder sind congruent, wenn sie gleiche Seiten-Ebenen in gleicher Lage haben; welchen Satz zuerst Cauchy (ebenfalls in dem oben angeführten Hefte des *Journal de l'école polytechnique*. D. H.) auf anderem Wege bewiesen hat. (Man findet den Beweis von Cauchy auch in der XII. Anmerkung der Geometrie von Legendre. D. H.)