Sur une formule fondamentale de Kronecker.

Par

J. Franel à Zurich.

On doit à Kronecker une formule extrêmement remarquable qui met en évidence le lien rattachant la théorie des formes binaires quadratiques à celle de la multiplication complexe des fonctions elliptiques. La démonstration de l'illustre auteur, exposée dans les Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin des années 1885 et 1889 est passablement longue et compliquée*).

M. M. Heinrich Weber et Mathias Lerch ont donné de cette formule des démonstrations plus simples et basées sur d'autres principes, dans le cas où les coefficients de la forme quadratique sont des quantités réelles, le premier dans ce journal tome XXXIII et dans son beau livre sur les fonctions elliptiques et les nombres algébriques**), le second dans un mémoire intitulé Sur un théorème de Kronecker***).

La démonstration qu'on va lire nous parait plus directe que celles qui ont été données jusqu'à présent; elle s'applique d'ailleurs quelque soit la nature des coefficients de la forme quadratique.

I.

Soient

$$a = a' + i a'', \quad b = b' + ib'', \quad c = c' + ic'',$$

trois quantités complexes telles que la partie réelle de l'expression $ax^2 + 2bxy + cy^2$, (x et y étant réels) soit une forme positive, ce qui s'exprime par les conditions

$$a' > 0, \quad c' > 0, \quad a'c' - b'^2 = D' > 0$$

dont la première est une conséquence des deux autres. On démontre facilement que, dans ces conditions, le déterminant

$$D = ac - b^2$$

*) Voir aussi la thèse de M. de Séguier: Sur deux formules fondamentales dans la théorie des formes quadratiques et de la multiplication complexe, d'après Kronecker, Gauthier-Villars et Fils.

**) Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, Braunschweig, Vieweg.

***) Prag. Berichte 1893.

n'est jamais négatif, c'est-à-dire qu'il est ou bien imaginaire ou bien réel et positif. On pourra donc faire

$$D = |D|\, e^{i\varphi},$$

l'angle φ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$, les limites exceptées. Nous conviendrons de désigner par $\sqrt{D}$ la valeur principale de la racine carrée de D, celle dont l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ ou, ce qui revient au même, celle dont la partie réelle est positive.

Maintenant x et y désignant des quantités réelles quelconques et $s = \alpha + i\beta$ une variable imaginaire, faisons

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} = e^{-s\log(ax^2+2bxy+cy^2)},$$

où le logarithme a sa valeur principale dont la partie imaginaire est inférieure à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, et envisageons la fonction $F(s)$ définie par l'équation

$$(1) \qquad F(s) = \sum{}' \varphi(m, n),$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs entières de m et de n, le seul système $m = 0$, $n = 0$ excepté, ce que nous indiquons, conformément à l'usage, en affectant le signe Σ d'un accent. La série dans le second membre converge absolument pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle α, que nous désignerons aussi par $R(s)$ est > 1; elle définit pour ces valeurs là de la variable une branche uniforme de la fonction $F(s)$. On peut montrer d'ailleurs que $F(s)$ est uniforme dans tout le plan et n'admet à distance finie qu'un seul point singulier, à savoir le pôle simple $s = 1$. En effet on voit facilement que la partie réelle du quotient

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sqrt{D}} = a_0x^2 + 2b_0xy + c_0y^2, \quad (a_0c_0 - b_0{}^2 = 1)$$

est aussi une forme positive et la formule connue

$$\frac{\Gamma(s)}{g^s} = \Gamma(s)\, e^{-s\log g} = \int_0^\infty e^{-gx}\,.\, x^{s-1}dx,$$

où la partie réelle de g est supposée positive et où $\log g$ a sa valeur principale nous donne immédiatement

$$\left(\frac{\sqrt{D}}{\pi}\right)^s \Gamma(s)\,.\,F(s) = \int_0^\infty \psi(x)\,.\,x^{s-1}\,dx,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\psi(x) = \sum{}' e^{-\pi(a_0m^2+2b_0mn+c_0n^2)x}.$$

Or des formules de transformation des fonctions ϑ résulte que la fonction

$$1 + \psi(x) = h(x)$$

satisfait à l'équation

$$h(x) = \frac{1}{x} h\left(\frac{1}{x}\right), \tag{2}$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{\sqrt{D}}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \,.\, F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \psi(x)\, (x^{s-1} + x^{-s})\, dx. \tag{3}$$

Le produit

$$s(s-1) \left(\frac{\sqrt{D}}{\pi}\right)^s \cdot \Gamma(s)\, F(s)$$

est donc une fanction transcendante entière de la variable s qui ne change pas lorsqu'on remplace s par $1 - s$.

Cette dernière propriété à été établie, croyons-nous, pour la première fois par M. Lerch*); elle est d'ailleurs contenue comme cas particulier dans une proposition encore inédite de M. A. Hurwitz, concernant toute une classe de fonctions analogues. Si l'on fait

$$s = \frac{1}{2} + it,$$

puis qu'on désigne le produit précédent par $\xi_2(t)$, il viendra, en tenant compte de la relation

$$h'(1) + \frac{1}{2} h(1) = 0,$$

qui est une conséquence de l'équation (2)

$$\xi_2(t) = 2 \int_1^\infty \frac{d}{dx} \left(x^2 \,.\, h'(x)\right) x^{-\frac{1}{2}} \cos(t \log x)\, dx.$$

De cette expression de la fonction $\xi_2(t)$**) et du théorème de M. Hadamard sur le genre des fonctions entières résulte que $\xi_2(t)$, considérée comme fonction de t^2, est du genre 0.

Le quotient $\frac{1}{\Gamma(s+1)}$ étant une fonction entière on voit, par la formule (3), qu'on aura pour $F(s)$ un développement de la forme

$$F(s) = \frac{\pi}{\sqrt{D}} \cdot \frac{1}{s-1} + A_0 + A_1 (s-1) + \cdots \tag{4}$$

valable pour toutes les valeurs finies de s différentes de l'unité.

La formule de Kronecker consiste à exprimer le coefficient A_0 au-moyen des fonctions ϑ d'argument 0.

---

*) Studien auf dem Gebiete der Malmsten'schen Reihen etc. Rospravy II, n° 4 (en langue tchèque).

**) Voir Riemann. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer geg. Grenze.

II.

La série $\Sigma' \varphi(m, n)$ étant absolument convergente pour $R(s) > 1$, si l'on fait pour un instant,

$$F_m(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}, \tag{5}$$

m étant un nombre entier différent de 0, puis

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s},$$

et

$$F_0(s) = \frac{1}{c^s} \sum{}' \frac{1}{n^{2s}} = \frac{2}{c^s} \zeta(2s),$$

il viendra

$$F(s) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} F_m(s) = 2\left[\frac{\zeta(2s)}{c^s} + \sum_{m=1}^{m=\infty} F_m(s)\right] \tag{6}$$

puisque évidemment $F_{-m}(s) = F_m(s)$.

Or la fonction $F_m(s)$ est définie par la formule (5) pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle est $> \frac{1}{2}$; elle est développable, dans le voisinage de la valeur $s = 1$, en série de la forme

$$F_m(s) = c_0^{(m)} + c_1^{(m)}(s-1) + c_2^{(m)}(s-1)^2 + \cdots \tag{7}$$

et qui converge certainement à l'intérieur d'un cercle de rayon égal à $\frac{1}{2}$. Le coefficient $c_0^{(m)}$ a pour expression

$$c_0^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{am^2 + 2bmn + 2n^2}. \tag{8}$$

De la formule (6), où le second membre ne converge que si $R(s) > 1$, nous allons déduire, en retranchant de chaque terme une quantité convenable, une équation nouvelle où le second membre converge dès que $R(s) > \frac{1}{2}$. A cet effet introduisons la fonction

$$\psi_m(s) = F_m(s) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(am^2 + 2bmx + cx^2)^s} \tag{9}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(am^2 + 2bmx + cx^2)^s}.$$

On trouve, m étant supposé positif,

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(am^2+2bmx+cx^2)^s} = \sqrt{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)c^{s-1}}{\Gamma(s)\cdot(\sqrt{D})^{2s-1}m^{2s-1}},$$

les puissances ayant toujours leurs valeurs principales, de sorte qu'il vient

$$(11) \qquad F(s) - \frac{2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)(\sqrt{D})^{2s-1}}c^{s-1}\zeta(2s-1) = 2\frac{\zeta(2s)}{c^s} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\psi_m(s),$$

et je dis que le second membre converge maintenant lorsque $R(s) > \frac{1}{2}$. Pour le voir faisons, pour un instant,

$$f(x) = E(x) - x + \tfrac{1}{2},$$

$E(x)$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans la quantité x; nous conviendrons, quand x est compris entre les deux entiers consécutifs n et $n+1$, de prendre $E(x) = n$, même quand n est négatif. La fonction $f(x)$ est alors impaire.

On aura dans ces conditions

$$\psi_m(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d}{dx}(am^2+2bmx+cx^2)^{-s}dx,^{*)}$$

comme on le vérifie tout de suite, le second membre étant égal à

$$-\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\int_n^{n+1}\left(n-x+\tfrac{1}{2}\right)\frac{d}{dx}(am^2+2bmx+cx^2)^{-s}dx,$$

c'est-à-dire égal à

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^s} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(am^2+2bmx+cx^2)^s}.$$

Or la valeur absolue de la fonction $f(x)$ ne surpassant pas $\frac{1}{2}$ on aura

$$|\psi_m(s)| < \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{s(2bm+2cx)}{(am^2+2bmx+cx^2)^{s+1}}\right|dx,$$

d'où l'on conclut facilement, en faisant $s = \alpha + i\beta$, (α et β réels) que le module de $\psi_m(s)$ est inférieur à $\frac{A}{m^{2\alpha}}$; A désignant une quantité

---

*) Voir dans ce journal tome 47 notre travail intitulé: Sur la formule sommatoire d'Euler.

quantité fixe, indépendante de m, que l'on peut choisir, par exemple, égale à

$$\frac{2|s|(c')^{\alpha-1} e^{\frac{\pi}{2}|\beta|}}{D'^{\alpha}}\left[|c|\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+1)^{\alpha+1}}+\frac{|b'c''-c'b''|}{D'^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^{\alpha+1}}\right].$$

La série

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \psi_m(s)$$

est donc absolument convergente lorsque $R(s) > \frac{1}{2}$; en outre elle converge uniformément dans toute région finie du plan située en entier dans le domaine illimité défini par l'inégalité $R(s) > \frac{1}{2}\cdot$ Un terme quelconque $\psi_m(s)$ de notre série étant développable en série de la forme

$$\psi_m(s) = B_0^{(m)} + B_1^{(m)}(s-1) + B_2^{(m)}(s-1)^2 + \cdots$$

pour les valeurs de $s-1$ de module moindre que $\frac{1}{2}$, on aura un développement de même forme pour la somme de la série:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \psi_m(s) = B_0 + B_1(s-1) + B_2(s-1)^2 + \cdots$$

et l'on aura généralement

$$B_r = \sum_{m=1}^{m=\infty} B_r^{(m)}.$$

En particulier

$$B_0 = \sum B_0^{(m)} = \sum_{m=1}^{m=\infty}\left(c_0^{(m)} - \frac{\pi}{m\sqrt{D}}\right), \tag{12}$$

en vertu des formules (7), (9) et (10).

En remarquant que la fraction

$$\frac{1}{am^2+2bmn+2n^2}$$

est égale à

$$\frac{1}{2im\sqrt{D}}\left(\frac{1}{n-m\omega} - \frac{1}{n+m\omega'}\right)$$

où

$$\omega = \frac{-b+i\sqrt{D}}{C}$$

et

$$\omega' = \frac{b+i\sqrt{D}}{C}$$

la formule (8) nous donnera

$$c_0^{(m)} = \frac{1}{2imVD}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{n-m\omega} - \frac{1}{n+m\omega'}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2imVD}(\operatorname{cotg} m\pi\omega + \operatorname{cotg} m\pi\omega').$$

Les quantités ω et $-\omega'$ sont les racines de l'équation du second degré

$$cx^2 + 2bx + a = 0$$

on vérifie sans peine que les parties imaginaires de ω et de ω' sont positives.

Si l'on substitue la valeur précédente de $c_0^{(m)}$ dans l'équation (12) on obtient

$$B_0 = -\frac{\pi}{2iVD}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[\frac{\operatorname{cotg} m\pi\omega + i}{m} + \frac{\operatorname{cotg} m\pi\omega' + i}{m}\right]$$

$$= \quad \frac{\pi}{VD}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\left[\frac{e^{2m\pi i\omega}}{1-e^{2m\pi i\omega}} + \frac{e^{2m\pi i\omega'}}{1-e^{2m\pi i\omega'}}\right]$$

et, après une transformation facile

$$B_0 = -\frac{\pi}{VD}\sum_{m=1}^{m=\infty}[\log(1-e^{2m\pi i\omega}) + \log(1-e^{2m\pi i\omega'})]$$

$$= -\frac{\pi}{VD}\left[\log\eta(\omega).\eta(\omega') - \frac{\pi i}{2}(\omega+\omega')\right]$$

$$= -\frac{\pi}{VD}\log\eta(\omega).\eta(\omega') - \frac{\pi^2}{6c},$$

en faisant, avec M. M. Dedekind et Weber*)

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i\omega}{12}}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2n\pi i\omega}).$$

En se rappelant que dans le développement de $\zeta(s)$ suivant les puissances de $s-1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + \cdots$$

*) Dedekind, Ueber die Theorie der ellipt. Modulfunctionen, Journal de Crelle, t. 83, Weber, Ellipt. Functionen und algebr. Zahlen.

le second coefficient est égal à la constante d'Euler

$$c = -\Gamma'(1),$$

on tire de la formule (11) la valeur du coefficient A_0 sous la forme

$$(13)\quad A_0 = \frac{\pi}{\sqrt{D}}[\log c - \log 4 - 2\log\sqrt{D} - 2\Gamma'(1) - 2\log\eta(\omega).\eta(\omega')]$$

c'est dans cette équation que consiste le théorème de Kronecker. La formule (11) permet de calculer également les autres coefficients $A_1, A_2, \ldots$ du développement de la fonction $F(s)$ suivant les puissances de $s-1$ *).

Zurich, juillet 1896.

*) Comparer la méthode qui vient d'être exposée avec celle qu'a suivie M. Jensen dans sa note sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Comptes-Rendus t. CIV, 1887.