

## 11.

# Quelques observations sur les quatre droites données dans l'espace et non comprises deux à deux dans un même plan.

(Par Mr. *Garbinsky*, prof. à l'univ. et directeur de l'école polyt. à Varsovie.)

§. 1. Quoique l'on possède déjà trois solutions du problème suivant: „Construire rigoureusement la droite qui coupe à la fois quatre droites  $A, B, C, D$  données dans l'espace, non comprises deux à deux dans un même plan \*);” il ne sera peut-être pas sans quelque utilité de le considérer de nouveau comme on va le voir par ce qu'il suit:

Imaginons un hyperboloïde dont les trois directrices sont les trois droites  $A, B, C$ , et designons par  $d$  et  $d'$  les deux points d'intersection de cette surface avec la quatrième droite  $D$ ; si maintenant par chacun de ces points et par l'une quelconque de trois directrices, par exemple  $C$ , on mène deux plans  $P$  et  $P'$ , et que l'on désigne leurs intersections avec la directrice  $A$  par  $a$  et  $a'$ , et leurs intersections avec la directrice  $B$  par  $b, b'$ ; les deux droites  $ab, a'b'$  seront les droites demandées, c'est à dire, les deux droites qui coupent à la fois les quatre droites données  $A, B, C, D$ . Donc en dernière analyse le problème proposé se trouve ramené à construire rigoureusement les intersections d'une droite  $D$  avec la surface gauche du second degré, nommée hyperboloïde à une nappe, et ayant pour ses trois directrices les droites  $A, B, C$ .

§. 2. Pour trouver les points  $d, d'$ , menons par la droite  $A$  un plan  $M$  parallèle à la droite  $D$ , et par la droite  $D$  un plan  $M'$  parallèle à la droite  $A$ , ce dernier plan coupera évidemment l'hyperboloïde suivant une hyperbole, puisqu'il est parallèle à la droite  $A$ , et à une autre droite  $A'$  qui sera entièrement sur cette surface, et qu'on déterminera, en menant une droite par les deux points d'intersection des lignes  $B$  et  $C$  avec le plan  $M'$ . Donc tout se réduit maintenant à déterminer les points d'in-

\*) Ce problème a été résolu, dans les *Annales de Mathématiques* de Mr. Gergonne v. T. XVIII. p. 182. — 184. par Mr. Bobillier et moi, et dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* par Mr. Steiner II. Band 3. Heft.

tersection de l'hyperbole et de la droite  $D$ ; car ces deux points seront évidemment les points  $d$  et  $d'$ . — Désignons par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les trois points de l'hyperbole mentionnée, qu'on obtiendrait en cherchant l'intersection du plan  $M'$  avec les droites  $B$ ,  $C$ , et une troisième droite quelconque  $B'$ , qui coupe les trois droites  $A$ ,  $B$ ,  $C$  à la fois. Pour obtenir les asymptotes de l'hyperbole, il faut se rappeler qu'elles sont les intersections de deux plans passants respectivement par les droites  $A$  et  $A'$  et tangens à l'hyperboloïde aux points situés sur ces deux droites dans l'infini, avec un troisième plan  $M$ ; car les lignes  $A$  et  $A'$  étant parallèles au plan  $M'$ , sont coupées par ce plan dans l'infini. — Déterminons l'un de ces plans tangens, celui par exemple qui passe par la droite  $A$ : on sait, que le plan tangent à l'hyperboloïde passe toujours par deux droites situées entièrement sur la surface, et dont l'intersection est le point de contact. De là on conclut facilement, qu'en menant par chacune de deux droites  $B$  et  $C$  un plan, respectivement parallèle à la droite  $A$ , l'intersection commune de ces deux plans sera une autre droite qui coupe les droites  $B$  et  $C$ , et qui est parallèle à la ligne  $A$ : donc le plan passant par la droite ainsi déterminée et par la droite  $A$ , touchera l'hyperboloïde dans l'infini; donc enfin l'intersection de ce plan avec le plan  $M$  sera l'une des asymptotes de cette courbe. On déterminera l'autre asymptote en cherchant l'intersection du plan  $M'$  avec le plan passant par la droite  $A'$  et sa parallèle, situées entièrement sur l'hyperboloïde; cette dernière droite doit être l'intersection de deux plans parallèles à la droite  $A'$ , et dont l'un passe par la droite  $B'$  et l'autre par la droite  $C'$ . Les deux droites  $B'$  et  $C'$  sont quelconques, mais situées entièrement sur la surface, en coupant les droites données  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , comme directrices de d'hyperboloïde. Menons par le point  $\alpha$ , intersection de deux asymptôtes, une droite, qui partage l'angle de ces asymptôtes en deux parties égales, et de manière qu'elle ne coupe pas l'hyperbole, cette droite sera l'axe imaginaire de la courbe. Si maintenant l'hyperbole mentionnée fait une révolution autour de son axe imaginaire, elle engendrera un hyperboloïde de révolution, et les trois points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  décriront trois cercles  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ , situés entièrement sur cette surface et dont les plans seront perpendiculaires à l'axe imaginaire. Mais on sait, que l'hyperboloïde de révolution n'est qu'un cas particulier de l'hyperboloïde à une nappe; donc, le même hyperboloïde de révolution pourrait encore être engendré par une droite quelconque qui

coupe à la fois tous les trois cercles  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ , en faisant une révolution complète autour de l'axe imaginaire. — On déterminera l'une de ces droites de la manière suivante: Imaginons une surface conique ayant pour sommet un point du cercle  $S$  et pour directrice ou base le cercle  $S'$ , on voit clairement que cette surface conique sera coupée par le plan du troisième cercle  $S''$  suivant un autre cercle; après avoir construit les deux intersections de ce cercle avec le cercle  $S''$ , une droite  $\varrho$  passant par l'un de ces deux points et le sommet du cône, coupera à la fois tous les trois cercles  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ , et sera par conséquent toute entière sur l'hyperboloïde de révolution. — Mais on voit, que les deux points cherchés  $d$  et  $d'$  sont situés en même temps sur l'hyperboloïde de révolution et sur la droite  $D$  qui coupe en un point  $\gamma$  l'axe imaginaire de l'hyperbole. On trouvera donc ces points si on détermine les deux cercles communs à l'hyperboloïde de révolution et au cône qui serait engendré par la révolution de la droite  $D$  autour de l'axe de révolution de l'hyperboloïde, car les intersections de ces deux cercles avec la droite  $D$  seront évidemment les deux points cherchés. Imaginons un plan passant par la droite  $\varrho$  et le sommet  $\gamma$  du cône et déterminons les deux génératrices d'intersection de ce même plan avec le cône, elle seront coupées, généralement parlant, en deux points par la droite  $\varrho$ ; abaissant de chacun de ces deux points une perpendiculaire à l'axe de rotation, on obtiendra les rayons des deux cercles cherchés, et les points situés sur ces cercles de la droite  $D$  seront les points demandés  $d$  et  $d'$ .

§. 3. Avant de donner une autre construction de la ligne demandée, il faut se rappeler quelques propositions dont les unes sont bien connues aux géomètres et les autres peuvent être démontrées aisément:

a. Un pôle et le milieu de sa pôlaire à l'égard d'une section conique quelconque, sont situés sur un même diamètre conjugué avec un autre diamètre parallèle à la pôlaire.

b. Si l'axe étant réel,  $F$ ,  $F'$  sont les foyers d'une hyperbole quelconque et qu'un cercle est décrit du foyer  $F'$  comme centre avec un rayon égal à l'axe réel de l'hyperbole, après avoir ensuite décrit d'un point donné comme centre un cercle passant par l'autre foyer  $F$ , et déterminé ses deux points d'intersection  $t$  et  $t'$  avec le cercle primitif: si de plus on mène du point donné deux droites passant par les milieux des cordes

*Ft* et *Ft'*: on obtiendra ainsi les deux tangentes qu'on pourra mener par le point donné à l'hyperbole; l'intersection de la droite *F't* avec la première tangente donnera son point de contact, et le point de contact de l'autre tangente, sera son point d'intersection avec la droite *F't'*.

c. On démontre facilement que les deux tangentes trouvées sont respectivement perpendiculaires aux cordes *Ft*, *Ft'*, d'où l'on tire une méthode très facile, pour mener une tangente à l'hyperbole, parallèlement à une droite donnée; car après avoir tiré du foyer *F* une droite perpendiculaire à la droite donnée, et après avoir construit les deux points *u* et *u'* d'intersection de cette perpendiculaire avec le cercle primitif, les deux parallèles à la droite donnée, tirées des milieux de deux cordes *Fu*, *Fu'* seront les tangentes demandées. On déterminera leurs points de contact comme précédemment \*).

d. Si l'on observe que les milieux de toutes les cordes *Ft*, *Ft'*, *Fu*, *Fu'* etc. sont situées sur un cercle décrit avec l'axe réel de l'hyperbole comme diamètre, on démontre sans aucune difficulté que, si de l'un quelconque de deux foyers *F* et *F'* on mène deux tangentes au cercle décrit sur l'axe de l'hyperbole pris pour diamètre, les deux rayons de ce cercle prolongés à l'infini et passant par les points de contact de deux tangentes, seront les asymptotes de la courbe; et vice versa: si des points d'intersection d'une des asymptotes avec le cercle, ayant l'axe réel de l'hyperbole pour diamètre, on mène des tangentes à ce cercle, les deux intersections de ces tangentes avec l'axe réel de la courbe seront ses deux foyers *F* et *F'*.

Partant de ce point, supposons pour le moment que la droite  $\rho$  (§. 2.) soit déterminée d'une manière quelconque, qu'on a mené une perpendiculaire à l'axe de rotation par le milieu  $x$  de l'hyperbole sur laquelle se trouvent les deux points  $d$ ,  $d'$  et qu'on ait déterminé la distance du point d'intersection de ce plan avec la droite  $\rho$  au point  $x$  milieu de l'hyperbole, décrivant avec cette distance du point  $x$  comme milieu un cercle sur le plan de la courbe, et menant une tangente à ce cercle, au

---

\*) Tout ce que je dis relativement aux tangentes menées à l'hyperbole d'un point donné ou parallèlement à une droite donnée, a également lieu pour toutes les sections coniques, en observant seulement que pour la parabole le cercle primitif n'est autre chose que la droite directrice de cette courbe et que le cercle passant par les milieux des cordes *Ft*, *Ft'*, *Fu*, *Fu'* etc. est une autre droite parallèle à la directrice et tirée du sommet de la parabole.

point où il est coupé par l'asymptote: l'intersection de cette tangente avec l'axe réel prolongé fera connoître l'un de foyers des l'hyperbole. Avec ces données on déterminera facilement les deux points de contact avec la courbe de deux tangentes parallèles à la droite  $D$ , et par cela même la grandeur du diamètre conjuguée avec celui qui est parallèle à la droite  $D$ . Je prends le diamètre conjugué que j'ai trouvé pour le diamètre d'un cercle et je mène du point  $z$ , intersection de ce diamètre avec la droite  $D$ , deux tangentes à ce cercle: il est bien clair que, la corde passant par les points de contact de ces tangentes avec le cercle, coupera le diamètre conjugué en un point  $z$  qui sera le pôle de la droite  $D$  à l'égard de l'hyperbole. Donc les deux points de contact de l'hyperbole avec ses deux tangentes tirées du point  $z$ , feront connoître les deux points cherchés  $d$  et  $d'$  \*).

§. 4. Faisons voir maintenant comment on pourrait resoudre analytiquement le problème proposé, et quelles seraient les équations des conditions pour les diverses positions des quatre droites données  $A, B, C, D$ .

Si pour plus de commodité nous allons prendre la ligne  $A$  pour l'axe des coordonnées  $z$ , et pour les axes des coordonnées de  $y$  et  $x$  deux lignes menées d'un point quelconque de la droite  $A$ , parallèlement aux deux droites  $B$  et  $C$ , les équations des quatre droites données pourront être exprimées comme il suit:

$$1. \quad A. \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad B. \begin{cases} z=c \\ x=a \end{cases} \quad C. \begin{cases} y=b \\ z=c' \end{cases} \quad D. \begin{cases} x=a'z+m \\ y=b'z+m' \end{cases}.$$

\*) Cette manière de construire les points d'intersection d'une droite avec une hyperbole dont on connaît l'axe réel et les foyers, s'applique également aux autres sections coniques, en observant, que pour trouver le pôle de la corde  $dd'$  relativement à une ellipse, il faut décrire un cercle sur un diamètre conjugué avec le diamètre parallèle à la corde  $dd'$ , élever une perpendiculaire sur ce diamètre du point d'intersection de ce diamètre avec la corde, déterminer les deux points d'intersection de cette perpendiculaire avec le cercle; l'intersection commune des deux tangentes aux cercles menées par ces deux points, sera le pôle de la corde  $dd'$ , relativement à l'ellipse donnée. Pour la parabole dont tous les diamètres sont parallèles à l'axe, la construction est très simple, car si après avoir déterminé le point de contact de la tangente parallèle à  $dd'$ , on mène par ce point une parallèle au grand axe, et qu'on détermine son intersection  $z$  avec la corde  $dd'$ , un autre point  $z'$  situé de côté opposé sur le prolongement du diamètre conjugué, à la même distance du point de contact que le premier point  $z$ , sera le pôle de la corde ou de la polaire  $dd'$  relativement à la parabole donnée.

Mr. Coste a donné une autre construction du même problème dans les Annales de Mathématique de Mr. Gergonne T. VII. p. 304., mais je crois plus directe et plus facile dans la pratique celle que nous venons de présenter.

Un plan quelconque passant par la droite  $A$  aura pour équation:

$$2. \quad y = qx.$$

Les deux points d'intersection de ce plan avec les droites  $B$  et  $C$  auront pour coordonnées:

$$3. \quad (x=a, y=qa, z=c); \quad \left(x=\frac{b}{q}, y=b, z=c\right).$$

Donc la droite déterminée par ces deux points, ayant pour équations:

$$4. \quad x-a = \frac{(qa-b)}{q(c-c')}(z-c); \quad y-qa = \frac{q(qa-b)}{q(c-c')}(z-c),$$

coupera à la fois les trois droites  $A, B, C$ ; donc pour une certaine valeur de  $q$  elle sera l'une des génératrices de l'hyperboloïde ayant les trois droites  $A, B, C$  pour directrices. Éliminant donc  $q$  entre les équations (4.) ou entre l'une quelconque de ces deux équations et entre celle (2.), on aura:

$$5. \quad (c-c')yx + (z-c)bx - (z-c')ay = 0.$$

Cette équation exprimera évidemment une relation entre tous les points de toutes les génératrices de l'hyperboloïde qui a les droites  $A, B, C$ , pour directrices, ou ce qui est la même chose: cette équation sera celle de l'hyperboloïde lui même.

Mettant dans cette équation pour  $x$  et  $y$  leurs valeurs correspondantes tirées des équations de la droite  $D$ , transposant et décomposant en facteurs, on aura:

$$6. \quad [a'b'(c-c') + a'b - ab']z^2 + [(b'm + a'm')(c-c') + b(m-a'c) - a(m'-b'c')]z + mm'(c-c') + ac'm' - bcm = 0,$$

ce qui prouve que, généralement parlant, l'hyperboloïde (5.) sera coupé, en deux points  $d$  et  $d'$  par la droite  $D$ , et que les deux génératrices de l'hyperboloïde, qu'on menerait par ces points, resoudront le problème proposé.

§. 5. Considérons à présent les cas particuliers. On tire de l'équation (6.):

$$7. \quad z = - \frac{[(b'm + a'm')(c-c') + b(m-a'c) - a(m'-b'c')]}{2[a'b'(c-c') + a'b - ab']} \\ + \frac{\left\{ \sqrt{[(b'm + a'm')(c-c') + b(m-a'c) - a(m'-b'c')]^2} \right.}{-2[a'b'(c-c') + a'b - ab'] [mm'(c-c') + ac'm' - bcm]} \left. \right\}}{2[a'b'(c-c') + a'b - ab']}$$

et on peut faire relativement à la quantité comprise sous le radical les trois suppositions suivantes:

$$8. \begin{cases} 1) [(bm + a'm')(c - c') + b(m - a'c) - a(m' - b'c')]^2 \\ - 2[a'b'(c - c') + a'b - ab'] [mm'(c - c') + ac'm' - bcm] > 0, \\ 2) [(bm + a'm')(c - c') + b(m - a'c) - a(m' - b'c')]^2 \\ - 2[a'b'(c - c') + a'b - ab'] [mm'(c - c') + ac'm' - bcm] = 0, \\ 3) [(bm + a'm')(c - c') + b(m - a'c) - a(m' - b'c')]^2 \\ - 2[a'b'(c - c') + a'b - ab'] [mm'(c - c') + ac'm' - bcm] < 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas la droite  $D$  sera une sécante de l'hyperboloïde et il y aura deux droites qui résoudront le problème; dans l'autre cas la droite  $D$  sera tangente et il n'y aura qu'une seule solution; dans le troisième cas les deux valeurs de  $z$  seront imaginaires et la droite  $D$  n'aura aucun point de commun avec l'hyperboloïde, où en d'autres termes, la solution du problème sera impossible.

§. 6. Si entre les coefficients de l'équation (6.) on suppose une relation telle qu'on ait à la fois:

$$9. \begin{cases} a'b'(c - c') + a'b - ab' = 0, \\ (bm + a'm')(c - c') + b(m - a'c) - a(m' - b'c') = 0, \\ mm'(c - c') + ac'm' - bcm = 0; \end{cases}$$

on suppose par là que  $z$  a une infinité de valeurs, ou que la droite  $D$  a une infinité de points sur l'hyperboloïde, ce qui veut dire en d'autres termes que cette droite  $D$  est entièrement sur l'hyperboloïde; donc les équations (8.) expriment les conditions nécessaires de ce que les quatre droites  $A, B, C, D$ , soient sur un même hyperboloïde.

§. 7. Enfin nous ferons remarquer que l'équation

$$10. a'b'(c - c') + a'b - ab' = 0,$$

peut subsister isolément, ou bien que les deux équations

$$11. \begin{cases} a'b'(c - c') + a'b - ab' = 0, \\ (bm + a'm')(c - c') - b(m - a'c) - a(m' - b'c') = 0 \end{cases}$$

peuvent avoir lieu en même tems. Dans le premier cas une des valeurs de  $z$  sera déterminée et l'autre infinie, dans le second cas toutes les deux valeurs de  $z$  seront infinies. Pour montrer clairement la différence entre ces deux cas, il faut se rappeler que par un point donné sur un hyperboloïde on peut mener deux lignes droites situées entièrement sur cette surface et que le plan déterminé par ces deux droites est un plan tangent à la surface au point donné. Si donc le point donné

étoit dans l'infini, les deux droites de la surface, dont le plan est un plan tangent à l'hyperboloïde dans ce point, seroient parallèles entre elles.

Cela posé, il est aisé de voir que dans les deux suppositions (10.) et (11.) il y aura sur l'hyperboloïde qui a  $A, B, C$ , pour directrices une génératrice parallèle à la droite  $D$ , mais que si dans le premier cas on fait passer un plan par la droite  $D$  et par sa génératrice parallèle, ce plan coupera l'hyperboloïde suivant une autre droite, dont l'intersection avec la droite  $D$  sera un point déterminé; tandis que dans l'autre cas le plan passant par la droite  $D$  et par sa génératrice parallèle, coupera l'hyperboloïde suivant une autre droite qui sera aussi parallèle à la droite  $D$ . Donc dans la première supposition la ligne  $D$  quoiqu'elle ait à une distance infinie un point commun avec l'hyperboloïde, n'est qu'une sécante de cette surface, tandis que dans la seconde supposition cette droite est une asymptôte de la surface, où ce qui est la même chose, une des génératrices de la surface conique, asymptotique relativement à l'hyperboloïde. On se rendra raison d'une manière encore plus évidente de tous ces résultats quand on remarque que l'hyperbole qui est l'intersection du plan  $M'$  avec l'hyperboloïde, ayant  $A, B, C$ , pour directrices (§. 2.), peut être remplacée dans des cas particuliers par un système de deux droites dont l'intersection commune sera ou déterminée ou dans l'infini.

Le 31. Août 1829, à Varsovie.