Einige arithmetische Sätze.

Von **L. Gegenbauer** in Innsbruck.

Ist die über alle Theiler der ganzen complexen Zahl m erstreckte Summe

$$\sum_{d} f(d) = F(m)$$

so besteht bekanntlich die Relation

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) f(x) = \sum_{x=(n)} F(x)$$

wo $\mathfrak{A}(n)$ die Anzahl aller ganzen complexen Zahlen des betrachteten Zahlengebietes, deren Norm nicht größer als die reelle Zahl n ist, vorstellt und $\sum\limits_{x=(n)} \varphi(x)$ die Summe der Werte ist, welche die willkürliche Function $\varphi(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle $\mathfrak{A}(n)$ Individuen des genannten Complexes durchläuft. Wenn das betrachtete Zahlengebiet das Gebiet der reellen Zahlen ist, so tritt an die Stelle von $\mathfrak{A}(n)$ die Anzahl aller ganzen n nicht überschreitenden Zahlen, d. i. $[n]$, so dass in diesem Falle die Gleichung

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} F(x)$$

besteht.

Summen von der Form

$$\sum_{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) f(x) \text{ bez. } \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] f(x)$$

welche sich als naturgemäße Erweiterungen der oben genannten darbieten, wurden bisher nur für einige wenige specielle Functionen $f(x)$ ermittelt. So hat beispielsweise Herr Bugajef im 13. Bande der „Nouvelles Annales" folgenden Satz ohne Beweis mitgetheilt:

Ist $\varphi(x)$ die Anzahl aller zu x theilerfremden reellen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots x$, $[\alpha]$ die in α enthaltene größte ganze Zahl und

$$g_\tau(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}) = p_1^{\left[\frac{\alpha_1}{\tau}\right]} p_2^{\left[\frac{\alpha_2}{\tau}\right]} \cdots p_s^{\left[\frac{\alpha_s}{\tau}\right]}$$

wo $p_1, p_2, \ldots, p_s$ verschiedene Primzahlen sind, so besteht die Gleichung

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right] \varphi(x) = \sum_{x=1}^{x=n} g_2(x).$$

Ich habe später in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften die Relationen

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] \varphi_k(x) = \sum_{x=1}^{x=n} g^k_\rho(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] \varphi^{(k)}(x) = \sum_{x=1}^{x=n} S_k\,(g_\rho(x))$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] \lambda_r(x) = A(n)$$

abgeleitet, wo

$\varphi_k(x)$ die Anzahl der Systeme von k ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots x$ ist, welche ein zu x theilerfremdes Zahlensystem bilden,

$x^k \overset{(k)}{\varphi}(x)$ die Summe der k^{ten} Potenzen aller zu x theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots x$ bedeutet,

$A(n)$ die Anzahl jener n nicht übersteigenden ganzen Zahlen ist, in denen sämmtliche Exponenten der dieselben zusammensetzenden Primzahlpotenzen nach dem Modul $r\,\varrho$ einer unterhalb ϱ befindlichen ganzen Zahl congruent sind

$\lambda_r(x)$ den Wert 0 besitzt, wenn x einen Primfactor in einer Potenz enthält, deren Exponent nach dem Modul r einer von 0 oder 1 verschiedenen ganzen Zahl congruent ist, in allen anderen Fällen aber gleich $(-1)^\tau$ ist, wo τ die Anzahl jener Primfactoren von x ist, welche zu einem Exponenten von der Form $k\,r + 1$ erhoben werden, endlich

$$x^k\, S_k(x) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + x^k$$

ist.

Ich habe ferner u. a. auch gezeigt, dass die Summe

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \mu(x)$$

im Gebiete der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen und im reellen Gebiete die Summe

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] \mu(x)$$

die Anzahl aller durch keine ϱ^{te} Potenz einer Primzahl theilbaren ganzen Zahlen des bezüglichen Complexes darstellt, wenn $\mu(x)$ den Wert 0 besitzt, falls x durch ein Quadrat (außer 1) theilbar ist, in allen anderen Fällen aber gleich $(-1)^{\tilde{\omega}(x)}$ ist, wo $\tilde{\omega}(x)$ die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von x vorstellt. Für das Gebiet der reellen Zahlen haben wenigstens für specielle Fälle die Herren Bugajef und Cesaro den Wert dieser Summe ebenfalls ermittelt.

Diese und viele andere, theils bekannte, theils neue interessante Sätze folgen aus einem allgemeinen arithmetischen Theoreme, welches ich in dieser Mittheilung ableiten werde, und von welchem ich sodann mehrere besonders bemerkenswerte specielle Fälle nebst einigen aus denselben sich ergebenden Folgerungen angeben will.

Hat $\mu_\rho(x)$ den Wert 1, wenn x eine Einheit oder durch keine ϱ^{te} Potenz theilbar ist, während diese Function gleich Null ist, wenn x mindestens durch die ϱ^{te} Potenz einer Primzahl theilbar ist, so ist

$$\mu_\rho(x) = \sum_{d_\rho} \mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{x}{d_\rho}}\right)$$

wenn die Summe bezüglich d_ρ über alle Theiler der ganzen Zahl x erstreckt wird, deren complementärer Divisor eine ϱ^{te} Potenz ist.

Ist nämlich x durch keine ϱ^{te} Potenz theilbar, so ist der einzige Wert, welchen d_ρ annehmen kann, x selbst und daher die Summe gleich 1. Sind die verschiedenen in x aufgehenden ϱ^{ten} Potenzen aus den τ verschiedenen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_\tau$ zusammengesetzt, so hat jede $\sqrt[\rho]{\frac{x}{d_\rho}}$ die Form $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\tau^{\alpha_\tau}$, wo jede der Größen α_k mindestens die zwei Werte 0, 1 annehmen kann, und daher ist

$$\sum_{d_\rho} \mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{x}{d_\rho}}\right) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\tau} \mu\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\tau^{\alpha_\tau}\right).$$

Nun ist aber nach der Definition der Function $\mu(x)$ für jedes theilerfremde Wertepaar x, y

$$\mu(xy) = \mu(x)\,\mu(y)$$

und daher verwandelt sich die letzte Relation in

$$\sum_{d_\rho} \mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{x}{d_\rho}}\right) = \prod_{k=1}^{\tau} \sum_{\alpha_k} \mu\left(p_k^{\alpha_k}\right)$$

aus welcher wegen

$$\sum_{\alpha_k} \mu\left(p_k^{\alpha_k}\right) = 0$$

folgt

$$\sum_{d_\rho} \mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{x}{d_\rho}}\right) = 0.$$

Ist

$$x = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_s^{\beta_s} = p_1^{\gamma_1\tau+\delta_1} p_2^{\gamma_2\tau+\delta_2} \ldots p_s^{\gamma_s\tau+\delta_s} \quad (0 \leqq \gamma_\lambda < \tau)$$

so hat jeder Theiler d_τ von x die Form

$$p_1^{\varepsilon_1\tau+\delta_1} p_2^{\varepsilon_2\tau+\delta_2} \ldots p_3^{\varepsilon_s\tau+\delta_s} \quad (0 \leqq \varepsilon_\lambda \leqq \gamma_\lambda)$$

und daher kann $\mu_\rho(d_\tau)$, falls $\tau \geqq \varrho$ ist, überhaupt nur für den einzigen Wert

$$d_\tau = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_s^{\delta_s}$$

und auch für diesen nur dann von Null verschieden sein, wenn sämmtliche Zahlen $\delta_\lambda < \varrho$ sind.

Es hat demnach die über alle Theiler d_τ von x ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_\tau} \mu_\rho(d_\tau) f\left(\sqrt[\tau]{\frac{x}{d_\tau}}\right) = \sum_{d_\tau} f\left(\sqrt[\tau]{\frac{x}{d_\tau}}\right) \sum_{d'_\rho} \mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{d_\tau}{d'_\rho}}\right)$$

wo d'_ρ einen Theiler von d_τ vorstellt, dessen complementärer Divisor eine ϱ^{te} Potenz ist, den Wert $f(g_\tau(x))$ oder 0, je nachdem alle Exponenten der die Zahl x zusammensetzenden Primzahlpotenzen nach dem Modul τ einer ganzen Zahl unterhalb ϱ congruent sind oder nicht.

Ist nun die Function $f(x)$ so beschaffen, dass die über alle der Gleichung

$$N(y^\rho z^\tau) = N(x)$$

genügenden ganzzahligen Wertepaare y, z ausgedehnte Summe

$$\sum_{z, y} \mu(y) f(z)$$

den Wert $\chi(n)$ oder 0 hat, je nachdem x eine ϱ^{te} Potenz ist oder nicht, so wird, wie man sofort sieht,

$$\sum_{d_\sigma} \chi\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right) = \sum_{d_\tau} f\left(\sqrt[\tau]{\frac{x}{d_\tau}}\right) \sum_{d'_\rho} \mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{d_\tau}{d'_\rho}}\right)$$

oder nach der eben ermittelten Relation

$$\sum_{d_\sigma} \chi\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right) = \begin{cases} 0 \\ f(g_\tau(x)) \end{cases}.$$

Hat die zahlentheoretische Function $\varepsilon(\alpha)$ den Wert 1 oder 0, je nachdem $N(\alpha) \geqq 1$ (bez. $\alpha \geqq 1$) ist oder nicht, so ist

$$\mathfrak{A}(m) = \sum_{x=(m)} \varepsilon\left(\frac{m}{N(x)}\right) \text{ bezw. } [m] = \sum_{x=1}^{x=\infty} \varepsilon\left(\frac{m}{x}\right)$$

und daher ist

$$\sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\sigma)}\right) \chi(x) = \sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n}),\, y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x^\sigma y)}\right) \chi(x)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right) \left(\sum_{d_\sigma} \chi\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right)\right)$$

oder nach der letzten Gleichung

$$\sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\sigma)}\right)\chi(x) = \sum_{x=(n)}^{(\rho)} f(g_\tau(x)) \text{ bezw. } \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]}\left[\frac{n}{x^\sigma}\right]\chi(x) = \sum_{x=1}^{(\rho)\, x=n} f(g_\tau(x))$$

wo die Marke am Summenzeichen andeutet, dass nur jene ganzen Zahlen x des betreffenden Gebietes zu nehmen sind, bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen alle Exponenten nach dem Modul τ einer unterhalb ϱ liegenden ganzen Zahl congruent sind.

Man hat daher den Satz:

Hat die Function $\mu(x)$ den Wert 0, wenn die ganze Zahl x durch ein Quadrat (außer 1) theilbar ist, in allen anderen Fällen aber den Wert $(-1)^{\tilde{\omega}(x)}$, wo $\tilde{\omega}(x)$ die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von x vorstellt, ist ferner die Function $f(x)$ so beschaffen, dass die über alle der Relation

$$N(y^\varrho z^\tau) = N(x) \qquad (\tau \geqq \varrho) \qquad (\text{bezw. } y^\varrho z^\tau = x)$$

genügenden ganzen Wertepaare y, z erstreckte Summe

$$\sum_{y,z} \mu(y) f(z)$$

den Wert $\chi(x)$ oder 0 besitzt, je nachdem x eine σ^{te} Potenz ist oder nicht, so ist

$$\sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\sigma)}\right)\chi(x) = \sum_{x=(n)}^{(\rho)} f(g_\tau(x)) \left(\text{bezw. } \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]}\left[\frac{n}{x^\sigma}\right]\chi(x) = \sum_{x=1}^{(\rho)\, x=n} f(g_\tau(x))\right)$$

wo

$$g_\tau(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}) = p_1^{\left[\frac{\alpha_1}{\tau}\right]} p_2^{\left[\frac{\alpha_2}{\tau}\right]} \dots p_s^{\left[\frac{\alpha_3}{\tau}\right]}$$

ist und die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene ganzen Zahlen x des betreffenden Gebietes zu nehmen sind, bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen alle Exponenten nach dem Modul τ einer ganzen Zahl unterhalb ϱ congruent sind.

Ist speciell $\tau = \varrho$, so lässt sich dieser Satz auch in folgender Weise aussprechen·

Ist die über alle Theiler der ganzen Zahl x ausgedehnte Summe

$$\sum_d \chi(d) = f(n)$$

so besteht die Relation

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\chi(x) = \sum_{x=(n)} f(g_\rho(x)) \left(\text{bezw. } \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]}\left[\frac{n}{x^\rho}\right]\chi(x) = \sum_{x=1}^{x=n} f(g_\rho(x))\right)$$

wo

$$g_\rho(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}) = p_1^{\left[\frac{\alpha_1}{\rho}\right]} p_2^{\left[\frac{\alpha_2}{\rho}\right]} \dots p_s^{\left[\frac{\alpha_s}{\rho}\right]}$$

ist.

Von den in dieser allgemeinen Formel enthaltenen speciellen Relationen mögen die folgenden bisher nicht veröffentlichten angeführt werden:

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \sigma_r(x) = \sum_{x=(n)}^{(\rho)} \mu\,(g_{r\varrho}(x))$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) f_{\beta-1}(x) = \sum_{x=(n)} f_\beta\,(g_\varrho(x))$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \lambda(x)\,\omega(x) = \sum_{x=(n)} \lambda\,(g_\varrho(x))$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \omega(x) = \sum_{x=(n)} \psi\,(g_\varrho{}^2(x))$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \mu_2(x) = \sum_{x=(n)} \omega\,(g_\varrho(x))$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \psi(x^2) = \sum_{x=(n)} \psi^2\,(g_\varrho(x))$$

$$\tau \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] \left(\frac{\Delta}{x}\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\Delta,\, g_\varrho(x))$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] \lambda(x)\,\chi(\Delta, x) = \sum_{x=1}^{x=n} \lambda(g_\varrho(x)) \left(\frac{\Delta}{g_\varrho(x)}\right)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) p(x) = \sum_{x=(n)}' f\,(g_\varrho(x))$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \nu(x) = \log N\Big(\prod_{x=(n)} g_\varrho(x)\Big)$$

wo die Marke am Summenzeichen in der vorletzten Gleichung angibt, dass nur jene ganzen Zahlen x des betrachteten Gebietes zu nehmen sind, bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen ein Exponent unterhalb $2\,\varrho$ und nicht unterhalb ϱ liegt, während alle anderen kleiner als ϱ sind,

$f_\beta(x)$ die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung $N(n_1\, n_2 \ldots n_\beta) = N(x)$ ist,

$\omega(x)$ die Anzahl der Zerlegungen von $N(x)$ in ein Product von zwei theilerfremden Factoren vorstellt,

$\lambda(x)$ den Wert $+1$ oder -1 hat, je nachdem x aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt ist,

$\psi(x)$ die Anzahl der Theiler der ganzen Zahl x bedeutet,

$\sigma_r(x)$ gleich Null ist, wenn x durch eine andere, als eine erste, r^{te} oder $(r+1)^{\text{te}}$ Potenz einer Primzahl theilbar ist, und in allen anderen Fällen den Wert $(-1)^k$ besitzt, wo k die Anzahl jener Primzahlen vorstellt, welche in x in keiner höheren als der ersten oder r^{ten} Potenz enthalten sind.

$\left(\frac{\Delta}{x}\right)$ das Legendre-Jacobi'sche Symbol,

$\chi(\Delta, x)$ die Anzahl der Lösungen der Congruenz $y^2 \equiv \Delta \,(mod.\ x)$,

τ die Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst,

$\varphi(\Delta, x)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen Anzahl x durch das System der quadratischen Formen der Discriminante Δ ist,

$p(1) = p(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}) = 0$, wenn nur eine der Zahlen α_k größer als 2 ist, oder mindestens zwei von ihnen größer als 1 sind,

$p(p_1^2 p_2 \dots p_s) = (-1)^s f(p_1)$,

$p(p_1 p_2 \dots p_s) = (-1)^{s+1} \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s} f(p_\lambda)$ ist, endlich

$\nu(x)$ den Wert 0 besitzt, wenn x keine Primzahlpotenz ist und den Wert log. $N(p)$ für $x = p^\alpha$.

Aus der vorletzten von diesen Gleichungen ergibt sich sofort, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich groß ist.

Gäbe es nämlich nur eine endliche Anzahl von Primzahlen in der betrachteten Classe complexer Zahlen, so müsste jede ganze Zahl, deren Norm oberhalb einer bestimmten Grenze liegt, mindestens einen Primfactor in einer höheren als der zweiten oder mehr als einen in einer höheren als der ersten Potenz enthalten und demnach würde die Summe auf der linken Seite der erwähnten Relation, wenn nur n hinlänglich groß genommen wird, die Anzahl ihrer Glieder und die Werte der Coefficienten der Größen $\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)$ bei Vergrößerung von n unverändert beibehalten. Es würde ferner die auf der linken Seite stehende Summe ihren Wert von einem bestimmten n an nicht mehr ändern können, da in allen ganzen Zahlen, deren Norm eine gewisse angebbare Grenze übersteigt, entweder ein Primfactor in einer höheren als der $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ oder mindestens zwei in einer höheren als der $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Potenz auftreten müssten. Die erwähnte Relation würde daher in diesem Falle eine Function von n liefern, welche einerseits für alle oberhalb einer bestimmten endlichen Grenze liegenden Werte von n eine endliche Constante wäre, andererseits mit wachsendem n wächst und dies ist unmöglich.

Die letzte Gleichung liefert eine Verallgemeinerung der berühmten Tchebychef'schen Relation. Beschränkt man sich nämlich auf das reelle Gebiet, so ist nach einer von mir früher abgeleiteten Relation

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]} \left[\frac{n}{x^\sigma}\right] \nu(x) = \sum_{x=1}^{x=p} \left[\frac{n}{x^\sigma}\right] \nu(x) + \sum^{x=\left[\frac{n}{(p+1)^\sigma}\right]} N_1\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{n}{x}}\right]\right) - \left[\frac{n}{(p+1)^\sigma}\right] N(p)$$

wo
$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \nu(\lambda) = N_1(m)$$
gesetzt wurde. Da nun, wie man leicht sieht und wie auch Herr E. Cesaro gezeigt hat
$$N_1(m) = \vartheta(m) + \vartheta(m^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(m^{\frac{1}{3}}) + \vartheta(m^{\frac{1}{4}}) + \dots$$
ist, wo nach Tchebychef $\vartheta(k)$ die Summe der natürlichen Logarithmen aller k nicht übersteigenden Primzahlen ist, so entsteht die Gleichung
$$\sum_{x=1}^{x=p} \left[\frac{n}{x^\sigma}\right] \nu(x) + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{(p+1)^\sigma}\right]} \left(\vartheta\left(\sqrt[\sigma]{\frac{n}{x}}\right) + \vartheta\left(\sqrt[2\sigma]{\frac{n}{x}}\right) + \vartheta\left(\sqrt[3\sigma]{\frac{n}{x}}\right) + \dots\right) -$$
$$-\left[\frac{n}{(p+1)^\sigma}\right] \left\{\vartheta(p) + \vartheta(p^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(p^{\frac{1}{3}}) + \vartheta(p^{\frac{1}{4}}) + \dots\right\} = \log \prod_{x=1}^{n} g_\sigma(x)$$
aus welcher die speciellen Relationen
$$\sum_{x=1}^{x=\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]} \left[\frac{n}{x^\sigma}\right] \nu(x) + \sum_{x=1}^{x=\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]} \left\{\vartheta\left(\sqrt[\sigma]{\frac{n}{x}}\right) + \vartheta\left(\sqrt[2\sigma]{\frac{n}{x}}\right) + \vartheta\left(\sqrt[3\sigma]{\frac{n}{x}}\right) + \dots\right\} -$$
$$-\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right] \left\{\vartheta\left(n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right) + \vartheta\left(n^{\frac{1}{2(1+\sigma)}}\right) + \vartheta\left(n^{\frac{1}{3(1+\sigma)}}\right) + \dots\right\} = \log \prod_{x=1}^{n} g_\sigma(x)$$
$$\sum_{x=1}^{x=n} \left\{\vartheta\left(\sqrt[\sigma]{\frac{n}{x}}\right) + \vartheta\left(\sqrt[2\sigma]{\frac{n}{x}}\right) + \vartheta\left(\sqrt[3\sigma]{\frac{n}{x}}\right) + \dots\right\} = \log \prod_{x=1}^{n} g_\sigma(x)$$
folgen, von denen die letzte für $\sigma = 1$ in die Tchebychef'sche Gleichung übergeht.

Schließlich erwähne ich noch den aus den obigen Entwicklungen leicht abzuleitenden Satz:

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Darstellung einer aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahl durch ein Product von Primzahlpotenzen kein Exponent auftritt, welcher nach dem Modul $r\varrho$ der ganzen Zahl ϱ oder einer größeren congruent ist, beträgt im Mittel $\frac{\zeta(r\varrho)\,\mathfrak{L}_{r\varrho}}{\zeta(\varrho)\,\mathfrak{L}_{\varrho}}$, wo
$$\zeta(s) = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^s}$$
$$\mathfrak{L}_s = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{(-1)^{x-1}}{(2x-1)^s}.$$