In particular, if $\eta=0$, $\zeta=0$, $\omega=0$, then we have the foregoing equation $X=0$; and the like for the equations $Y=0$, $Z=0$, and $W=0$ respectively.

Take a, b, c, f, g, h for the six coordinates of the line through the point

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & t \\ \xi, & \eta, & \zeta, & \omega \end{vmatrix}$$

that is, write

$$\begin{aligned} \mathrm{a} &= y\zeta - z\eta, & \mathrm{f} &= x\omega - t\xi, \\ \mathrm{b} &= z\xi - x\eta, & \mathrm{g} &= y\omega - t\eta, \\ \mathrm{c} &= x\eta - y\xi, & \mathrm{h} &= z\omega - t\zeta, \end{aligned}$$

where, of course,

$$\mathrm{af} + \mathrm{bg} + \mathrm{ch} = 0.$$

Then the foregoing equation of the cone is

$$\left.\begin{array}{l} A\mathrm{a}^2 + B\mathrm{b}^2 + C\mathrm{c}^2 + F\mathrm{f}^2 + G\mathrm{g}^2 + H\mathrm{h}^2 \\ -2A'\mathrm{bc} - 2B'\mathrm{ca} - 2C'\mathrm{ab} + 2F'\mathrm{gh} + 2G'\mathrm{hf} + 2H'\mathrm{fg} \\ +2P\mathrm{af} + 2M\mathrm{ag} - 2N'\mathrm{ah} \\ -2L'\mathrm{bf} + 2Q\mathrm{bg} + 2N\mathrm{bh} \\ +2L\mathrm{cf} - 2M'\mathrm{cg} + 2R\mathrm{ch} \end{array}\right\} = 0.$$

And this may be regarded as the equation of the *conic* in terms of the twenty-one coordinates of the conic, and of the six coordinates of an arbitrary line meeting the conic. It is, in fact, the general form of the equation given in the paper—Cayley "On a new Analytical Representation of a Curve in Space," Quart. Math. Jour., t. iii. (1860), see p. 233.

Déduction de différents Théorèmes géométriques d'un seul Principe Algébrique. *Par* H. G. Zeuthen.*

Le principe algébrique dont nous allons exposer ici plusieurs applications géométriques s'exprime par le Théorème suivant :

Soit donnée une forme algébrique entière, homogène et du second degré par rapport à chacune de deux couples de variables x_1, x_2 et ξ_1, ξ_2 ; formons les deux discriminants de cette forme, qui seront des formes quartiques contenant la couple des variables regardées comme constantes pendant la formation du discriminant : je dis que ces deux discriminants auront les mêmes invariants.

J'ai déduit ce théorème général d'une de ses applications géomé-

* Received from the Author too late for communication at the Meeting on June 12.

triques, qui est bien connue (la 2^me^) ; mais il sera juste d'en communiquer ici une démonstration algébrique directe, que je dois à un de mes élèves, Mr. E. Schmidt, à qui j'avais communiqué le théorème. On y fait usage du calcul symbolique de *Aronhold* et *Clebsch.**

Soient $$a_x^2 \alpha_\xi^2 = b_x^2 \beta_\xi^2 = c_x^2 \gamma_\xi^2 = d_x^2 \delta_\xi^2 = e_x^2 \epsilon_\xi^2 = f_x^2 \phi_\xi^2$$

des représentations symboliques équivalentes de la forme donnée, et

$$A_x^4 = B_x^4 = C_x^4 = (\alpha\beta)^2 a_x^2 b_x^2 = (\gamma\delta)^2 c_x^2 d_x^2 = (\epsilon\phi)^2 e_x^2 f_x^2 \ldots \quad \ldots(1)$$

des représentations de son discriminant par rapport aux variables ξ. On en déduit, par formation successive de polaires, et par des permutations de symboles équivalents,

$$4A_x^3 A_y = (\alpha\beta)^2 (2a_x a_y b_x^2 + 2a_x^2 b_x b_y) = 4(\alpha\beta)^2 a_x a_y b_x^2,$$

$$3A_x^2 A_y^2 = (\alpha\beta)^2 (a_y^2 b_x^2 + 2a_x a_y b_x b_y),$$

ou bien, à cause de l'identité

$$2a_x a_y b_x b_y = a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - (ab)^2 (xy)^2,$$

$$3A_x^2 A_y^2 = (\alpha\beta)^2 [3a_x^2 b_y^2 - (ab)^2 (xy)^2] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

La forme $A_x^4 = B_x^4 = C_x^4$ a les deux invariants indépendents entre eux :

$$I = (AB)^4, \quad J = (AB)^2 (BC)^2 (CA)^2.$$

Les formules (1) et (2), où l'on peut substituer des symboles (B_2 et $-B_1$; a_2 et $-a_1$, etc.) aux variables, nous permettront d'exprimer I et J par les symboles de la forme donnée. On aura

$$I = (AB)^4 = (\gamma\delta)^2 (Ac)^2 (Ad)^2$$
$$= \tfrac{1}{3} (\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 [3(ac)^2 (bd)^2 - (ab)^2 (cd)^2] ;$$

et, en posant

$$K = (\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 (ac)^2 (bd)^2 = (\alpha\gamma)^2 (\beta\delta)^2 (ab)^2 (cd)^2 \ldots\ldots\ldots(3),$$

$$L = (\alpha\beta)^2 (ab)^2 = (\gamma\delta)^2 (cd)^2 = (\epsilon\phi)^2 (ef)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

on trouve $$I = K - \tfrac{1}{3} L^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Les invariants K et L dépendent d'une manière symétrique des symboles grecs et romains ; l'invariant I appartient donc aussi au discriminant pris par rapport aux variables x.

---

* Voir par exemple *Clebsch-Lindemann :* Vorlesungen über Geometrie, T. I., 3^me^ section. On reconnaîtra, au point de départ de la démonstration actuelle, les opérations dont se sert Clebsch pour former une expression de $H_x^2 H_y^2$.

On trouve de même, par la formule (2),

$$\begin{aligned} 3J &= 3\,(AB)^2\,(BC)^2\,(CA)^2 \\ &= 3\,(BC)^2\,(a\beta)^2\,(aB)^2\,(bC)^2 - (a\beta)^2\,(ab)^2\,(BC)^4 \\ &= 3\,(a\beta)^2\,(aB)^2\,(bC)^2\,(BC)^2 - LI \\ &= 3\,(a\beta)^2\,(aB)^2\,(bC)^2\,(BC)^2 - KL + \tfrac{1}{3}L^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6). \end{aligned}$$

Le premier terme de cette expression se transforme de la manière suivante,

$$\begin{aligned} 3\,(a\beta)^2(aB)^2(bC)^2(BC)^2 &= (a\beta)^2\,(bC)^2\,(\gamma\delta)^2\,[3\,(ca)^2\,(dC)^2 - (cd)^2\,(aC)^2] \\ &= 3\,(a\beta)^2\,(\gamma\delta)^2\,(ca)^2\,(bC)^2\,(dC)^2 - L\,(AC)^4 \\ &= 3\,(a\beta)^2\,(\gamma\delta)^2\,(ca)^2\,(bC)^2\,(dC)^2 - KL + \tfrac{1}{3}L^3 \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7). \end{aligned}$$

Nous transformerons encore le premier terme de cette dernière expression,

$$\begin{aligned} &3\,(a\beta)^2\,(\gamma\delta)^2\,(ca)^2\,(bC)^2\,(dC)^2 \\ &\quad = 3\,(a\beta)^2(\gamma\delta)^2(ca)^2(\epsilon\phi)^2(eb)^2(fd)^2 - (a\beta)^2(\gamma\delta)^2(ca)^2(\epsilon\phi)^2(ef)^2(bd)^2. \end{aligned}$$

Le dernier terme est égal à $-KL$; le premier terme est un invariant $3M$, qui prend, par inversion 1° des symboles $b\beta$ et $c\gamma$, 2° des symboles $d\delta$ et $e\epsilon$ de la forme donnée, la même forme qui résulterait de la substitution de symboles grecs à des symboles romains, et réciproquement, de façon que

$$\begin{aligned} M &= (a\beta)^2\,(\gamma\delta)^2\,(\epsilon\phi)^2\,(ac)^2\,(be)^2\,(df)^2 \\ &= (a\gamma)^2\,(\beta\epsilon)^2\,(\delta\phi)^2\,(ab)^2\,(cd)^2\,(ef)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(8). \end{aligned}$$

Des formules (6), (7) et (8) résulte, par des substitutions successives,

$$J = M - KL + \tfrac{2}{3}L^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9).$$

La formation de J présente donc la même symétrie par rapport aux symboles grecs et romains que celle de I. Le théorème est donc démontré.

Si $x_1 : x_2$ et $\xi_1 : \xi_2$ sont les paramètres qui déterminent *les éléments x et ξ de deux séries unicursales* (de points d'une courbe, de tangentes à une courbe, etc.), on aura, en égalant la forme donnée à zéro, une relation qui fait correspondre à chaque point x deux points ξ, et à chaque point ξ deux points x; réciproquement, si l'on sait qu'une relation de cette espèce se fait exprimer algébriquement, on saura aussi que l'équation qui l'exprime a la forme indiquée. En égalant un des discriminants à zéro on déterminera les quatre éléments x (ou ξ) dont les éléments correspondants ξ (ou x) coïncident. Les deux discriminants ayant le même invariant absolu $\frac{I^3}{J^2}$, on voit que *les 6 rapports an-*

harmoniques des quatre éléments x *auxquels correspondent des éléments coïncidents* ξ, *sont égaux à ceux des quatre éléments* ξ *auxquels correspondent des éléments coïncidents* x. Nous allons en indiquer plusieurs applications.

1. Soient les éléments x les tangentes d'une conique plane, et soient les éléments ξ correspondant à une tangente x ses points d'intersection avec une autre conique dans le même plan. Les deux points ξ, correspondant à une tangente x, coïncident si x est tangente commune aux deux coniques, et les deux tangentes x correspondant à un point ξ coïncident, si ξ est point d'intersection des deux coniques. On voit donc que les tangentes communes à deux coniques ont, sur l'une de ces coniques, les mêmes rapports anharmoniques que les quatre points d'intersection ont sur l'autre.

2. Soient les éléments correspondants x et ξ les droites joignant deux points fixes d'une courbe plane du troisième ordre à un point mobile de la même courbe. La correspondance demandée a évidemment lieu entre les droites des deux faisceaux. On obtient ainsi le théorème connu, que les 6 rapports anharmoniques des quatre tangentes qu'on peut mener d'un point P d'une courbe du troisième ordre à cette courbe sont indépendents de la position de P sur la courbe.

La correspondance ayant encore lieu, si les droites correspondantes des faisceaux joignent deux points doubles d'une courbe du quatrième ordre à un point variable de la même courbe, on voit que les groupes de quatre tangentes qu'on peut mener à une courbe do quatrième ordre à deux points doubles de ces deux points ont les mêmes rapports anharmoniques. Ce théorème résulte aussi, en cas particulier, de l'application suivante.

3. Soient les éléments x des génératrices d'une des générations d'une surface du second ordre, et les éléments correspondants ξ les génératrices d'une des générations d'une autre surface qui rencontrent les droites x. La correspondance demandée a lieu, et l'on voit que : dans un faisceau de surfaces du second ordre, tous les groupes de 4 génératrices de la même génération d'une surface du faisceau qui sont tangentes à la courbe d'intersection ont les mêmes rapports anharmoniques.

En projetant la courbe d'intersection d'un point quelconque sur un plan, on obtient une courbe du quatrième ordre à deux points doubles, et qui n'est soumise à aucune autre particularité. Les contours apparents des surfaces du faisceau forment un système de coniques tangentes quatre fois à la courbe. On voit que les 8 tangentes communes à la courbe et à une conique de ce système forment deux groupes de quatre, et que tous les groupes de tangentes communes qu'on obtient en considérant toutes les coniques ont, sur les coniques respectives, les mêmes rapports anharmoniques.*

4. Soit x une tangente variable à une courbe du quatrième ordre et de la quatrième classe, et soient les éléments correspondants ξ les deux points d'intersection de x avec la courbe. Selon les formules Plückeriennes la courbe aura, si elle n'est pas composée (voir l'application 1), un point double et deux points cuspidaux, une tangente double et deux tangentes d'inflexion.

La correspondance demandée a lieu ici. Les deux points ξ qui correspondent à une tangente x coïncident, 1° si x est la tangente double, et 2° si x est la tangente menée d'un des points cuspidaux (mais à un autre point de contact). Les quatre racines $x_1 : x_2$ de l'un des discriminants sont donc—1° les deux paramètres qui déterminent la tangente double (ou ses deux points de contact), 2° les paramètres qui déterminent les tangentes menées des deux points cuspidaux. Les quatres racines $\xi_1 : \xi_2$ de l'autre discriminant déterminent, selon le principe de dualité, 1° le point double (ou les deux tangentes en ce point), 2° les points d'intersection des tangentes d'inflexion avec la courbe.

Ici, où les deux discriminants se décomposent en deux facteurs rationnels, se présente encore la question sur l'ordre des éléments x et ξ, déterminés par les discriminants, qui ont des rapports anharmoniques égaux. Faut-il, en effet, faire correspondre aux deux paramètres x qui déterminent la tangente double les deux paramètres ξ du point double, ou ceux des points d'intersection des tangentes d'inflexion, ou un paramètre de chacun des deux couples? A cause de l'identité des rapports anharmoniques

$$(\xi\xi'\xi''\xi^{\text{iv}}) = (\xi'\xi\xi^{\text{iv}}\xi'') = (\xi''\xi^{\text{iv}}\xi\xi') = (\xi^{\text{iv}}\xi''\xi'\xi),$$

les deux premières hypothèses ne diffèrent pas entre elles. Pour décider si l'une ou l'autre des deux hypothèses différentes qui restent encore possibles a lieu, il suffit de considérer un cas particulier, par exemple celui où les deux points de contact de la tangente double, et en même temps les deux tangentes d'inflexion, coïncident.† Alors, si x' et x'' représentent la tangente double, ξ'' et ξ^{iv} les points d'intersection des tangentes d'inflexion, on aura $(x'x''x''x^{\text{iv}}) = 1 = (\xi\xi'\xi''\xi^{\text{iv}})$,

* Nous avons démontré autrement le même théorème dans un mémoire sur les courbes du quatrième ordre à deux points doubles, qui est sous presse pour être inséré dans le bulletin ("Oversigter") de l'Académie Royale Danoise, 1879.

† Ce cas est possible sans qu'en même temps d'autres des éléments x, ou des éléments ξ, que nous considérons, coïncident. Voir la dernière page de mon mémoire sur les *systèmes de courbes planes* (Mémoires de l'Académie Royale Danoise 1873), où je détermine les nombres de courbes ayant la propriété indiquée ici (ou plutôt la propriété réciproque), et satisfaisant à des conditions données.

pendant que tous les rapports anharmoniques où ξ''' et ξ^{iv} ne composent pas la première ou la dernière couple du rapport anharmonique des ξ sont égaux à zéro ou à l'infini. La dernière hypothèse est donc impossible, et la première doit être juste.

Nous avons donc démontré la propriété suivante des courbes planes du quatrième ordre et de la quatrième classe; les deux* rapports anharmoniques des deux points de contact de la tangente double et des deux points de contact des tangentes menées des points cuspidaux, sont égaux à ceux des deux tangentes au point double et des tangentes aux points d'intersection des tangentes d'inflexion. (Dans cet énoncé nous avons, pour plus de commodité, substitué les points de contact aux tangentes, et réciproquement.)

5. Considérons ensuite une courbe gauche caractérisée par les nombres Cayleyens suivants†

$$m = n = 5, \quad r = 6, \quad h = g = 4,$$
$$x = y = 5, \quad \alpha = \beta = 2.$$

On déduit de formules connues que la même courbe a 2 tangentes qui rencontrent encore une fois la courbe, et 2 plans osculateurs qui y sont encore une fois tangentes. Ces deux nombres résultent du reste aussi de l'application actuelle de notre principe.

Nous prenons pour éléments x les plans osculateurs à cette courbe unicursale. Chacun de ces plans a encore deux points d'intersection avec la courbe, que nous prenons pour éléments ξ correspondant au plan x. Réciproquement, par chaque point ξ passent 2 plans x osculateurs en des points différents de ξ. La correspondance demandée a donc lieu. Le premier discriminant de l'équation qui exprime cette correspondance détermine—1° les 2 plans osculateurs qui sont encore une fois tangentes, 2° les 2 plans qui passent par un point cuspidal ou stationnaire, et sont osculateurs en un autre point.‡ L'autre discriminant détermine—1° les 2 points de la courbe qui se trouvent sur des tangentes en d'autres points, 2° les 2 points d'intersection de la courbe avec les plans stationnaires.

Dans le cas particulier où un plan rencontre la courbe en cinq points consécutifs, les deux plans stationnaires—et par conséquent aussi leurs points d'intersection—et les deux plans osculateurs qui sont encore une fois tangents se confondent. On se sert—comme dans l'application 4—de

* L'ordre des deux couples, ainsi que celui des éléments des couples, étant inconnu, le rapport anharmonique a ici deux valeurs différentes.

† Nous les désignons par les mêmes lettres que M. Salmon dans la "Geometry of three Dimensions."

‡ Par chacun des $\beta = 2$ points cuspidaux passe un seul de ces plans (Geometry of three Dimensions 3m éd., p. 302.)

ce cas particulier pour déterminer les ordres des éléments x et ξ qui ont le même rapport anharmonique. On trouve ainsi la propriété suivante de la courbe : les deux rapports anharmoniques des 2 plans osculateurs qui sont encore une fois tangents et des 2 plans osculateurs qui passent par les points stationnaires (sans être osculateurs en ces points), sont égaux à ceux des 2 points où passent des tangentes en d'autres points et des 2 points d'intersection des plans stationnaires.

6. Soit donnée une surface du quatrième ordre à une droite double, et prenons pour éléments x les points de cette droite, pour éléments ξ correspondant à un point x, les plans tangents à la surface en x. La correspondance demandée a lieu alors entre les points x de la droite, et les plans ξ, qui forment un faisceau ayant la même droite pour axe. Les deux plans ξ tangents en un point x coïncident, si x est un point-pince (*pinch-point*) de la droite double ; les deux points de contact x d'un plan ξ coïncident, si ξ est un plan stationnaire de la droite double, c'est à dire un plan ayant sur la droite un contact qui le fait appartenir aux (β') plans tangents stationnaires de l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface.* On voit donc que les quatre points-pinces sur une droite double d'une surface du quatrième ordre ont les mêmes rapports anharmoniques que les quatre plans stationnaires de la droite.

Si la surface a deux droites doubles, elle sera réglée, et les plans stationnaires de l'une des droites passeront par les points-pinces de l'autre. On voit donc que les points-pinces de l'une des droites ont les mêmes rapports anharmoniques que ceux de l'autre.

7. Une généralisation du dernier cas dont nous avons traité dans le No. 6 se présente presque immédiatement. Soient x et ξ des points mobiles de deux courbes unicursales dans l'espace, C_m et C_μ, des ordres m et μ, et soit donnée une relation entre les paramètres de x et ξ qui fait correspondre à chaque point x deux points ξ, et à chaque point ξ deux points x. Alors les droites x, ξ engendreront une surface gauche de l'ordre $2(m+\mu)$† et ayant les courbes C_m et C_μ pour courbes doubles. Notre principe nous montre que chacune de ces courbes a 4 points-pinces, et que les deux groupes de points-pinces ont les mêmes rapports anharmoniques.

Si les deux courbes sont planes et se trouvent dans le même plan, l'enveloppe des droites x, ξ sera une courbe de la classe $2(m+\mu)$. Les points-pinces seront alors remplacés par des points de cette enveloppe, qui ne seront pas en général ses seuls points d'intersection avec les courbes C_m et C_μ, mais qui seront déterminés par des facteurs rationnels

* Voir mon article : Sur les droites multiples des surfaces (Mathematische Annalen IV., p. 8.)

† On trouve, en effet, par le principe de correspondance, ce nombre de points d'intersection avec une droite quelconque.

du quatrième degré des premiers membres des équations servant à déterminer ces points d'intersection.

Il serait facile de multiplier ces applications,—nous proposons par exemple la discussion de la génération d'une courbe plane du troisième ordre comme lieu des points de contact des coniques d'un faisceau avec les droites d'un faisceau;—mais nous croyons avoir montré déjà suffisamment l'unité de propriétés de figures très-différentes qu'établit le principe algébrique.

Note by Prof. Cayley.

The algebraical principle employed by Dr. Zeuthen, and from which he has deduced such interesting results, is certainly a well-known one. It is, for instance, assumed in my paper "On the Porism of the in-and-circumscribed Polygon, and on the (2, 2) Correspondence of the Points on a Conic," Quart. Math. Jour., t. xi. (1871), pp. 83—91, see p. 84, where I say that the two quartic functions are linearly transformable the one into the other. The two functions may be written

$$(ax^2+2bx+c)\,(a''x^2+2b''x+c'')-(a'x^2+2b'x+c')^2=(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d},\mathrm{e}\between x,1)^4;$$

and

$$(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'')-(by^2+2b'y+b'')^2=(A,B,C,D,E\between y,1)^4;$$

the coefficients consequently are

$$\begin{array}{ll|ll} \mathrm{a} = & aa'' - a'^2 & A = & ac - b^2 \\ 4\mathrm{b} = & 2ab''+2a''b - 4a'b' & 4B = & 2ac' + 2a'c - 4bb' \\ 6\mathrm{c} = & ac''+a''c+4bb''-2a'c'-4b'^2 & 6C = & ac''+a''c+4a'c'-2bb''-4b'^2 \\ 4\mathrm{d} = & 2bc''+2b''c - 4b'c' & 4D = & 2a'c''+2a''c' - 4b'b'' \\ \mathrm{e} = & cc'' - c'^2 & E = & a''c''-b''^2. \end{array}$$

I was under the impression that I had actually calculated the invariants of the two functions. For the invariant I, it can be done without difficulty; the two forms of $12I$ are

$$\begin{aligned} &12\,(aa''-a'^2)(cc''-c'^2)\\ &-12\,(ab''+a''b-2a'b')(bc''+b''c-2b'c')\\ &+\quad(ac''+a''c+4bb''-2a'c'-4b'^2)^2, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &12\,(ac-b^2)(a''c''-b''^2)\\ &-12\,(ac'+a'c-2bb')\,(a'c''+a''c'-2b'b'')\\ &+\quad(ac''+a''c+4a'c'-2bb''-4b'^2)^2, \end{aligned}$$