

Lehrsätze und Aufgaben über die Kugel.

VON FR. G. AFFOLTER IN SOLOTHURN.

Der grosse Geometer Steiner veröffentlichte im Band 1. des Journals für reine und angewandte Mathematik eine Menge von Lehrsätzen und Constructionen über den Kreis. Am gleichen Orte wies er jedoch auf einige Aufgaben hin, als: 1. *Drei Kreise durch einen vierten unter gegebenen*, und 2. *Vier Kreise durch einen fünften unter gleichen Winkeln zu schneiden*, ohne dass er irgendwo die zugehörigen Lösungen und Constructionen angegeben hätte. Die Constructionen der der ersteren genannten Aufgabe entsprechenden im Raume: *Vier Kugeln durch eine fünfte unter gegebenen Winkeln zu schneiden*, habe ich in Band 16. der Zeitschrift für Mathematik und Physik gegeben, während ich hier die Lösungen zu der der zweiten im Raume entsprechenden: *Fünf Kugeln durch eine sechste unter gleichen Winkeln zu schneiden*, so wie die Lösungen zu einigen andern mit dieser verwandten Aufgaben angeben werde.

I.

Schneiden wir zwei Kugeln k_1 und k_2 durch eine äussere oder innere Aehnlichkeitslinie, so entstehen auf derselben je zwei *äussere* oder *innere direkte* und *inverse Punktepaare*. Das Produkt der Abschnitte, gebildet aus dem entsprechenden Aehnlichkeitspunkt und den Punkten des zugehörigen inversen Paares ist constant und gleich *der äusseren oder inneren gemeinsamen Potenz* der Kugeln k_1 und k_2 . Bezeichnen wir die Aehnlichkeitspunkte mit a_{12} und i_{12} , die Radien der Kugeln k_1 und k_2 mit r_1 und r_2 ; ihre Centrallinie mit q_{12} und die gemeinsamen Potenzen mit p_a und p_i , so sind die Werthe dieser Grössen durch die Gleichungen

$$(1) \quad p_a = \frac{r_1 r_2 [q_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2]}{(r_1 - r_2)^2}; \quad p_i = \frac{r_1 r_2 [r_1 + r_2]^2 - e_{12}^2}{(r_1 + r_2)^2}$$

gegeben.

Beschreiben wir aus den Punkten a_{12} und i_{12} , als Mittelpunkten, die Kugeln a_{12} und i_{12} mit den Radien $\sqrt{p_a}$ und $\sqrt{p_i}$; so kann man, nach dem Princip der reciproken Radien die Kugeln k_1 und k_2 als

reciproke Kugeln ansehen, in Bezug auf a_{12} und i_{12} als transformative Kugeln. Es gehören somit die Kugeln a_{12} und i_{12} der durch die Kugeln k_1 und k_2 gebildeten Kugelschaar an und schneiden sich folglich rechtwinkelig. Wir bezeichnen diese Kugeln mit dem Namen der *äusseren und inneren orthogonalen Potenzkugeln* oder auch bloss als *Potenzkugeln*.

Schneidet eine Kugel M die eine oder andere Potenzkugel rechtwinkelig, so ist sie ihre eigene reciproke. Denn jede durch den Mittelpunkt der Potenzkugel gelegte Gerade wird von dieser und der Kugel M in vier harmonischen Punkten geschnitten. Da sich zwei Kugeln unter dem nämlichen Winkel schneiden, wie ihre reciproken und da die Mittelpunkte der Kugeln k_1 und k_2 auf derselben Seite von a_{12} und zu verschiedenen Seiten von i_{12} liegen, so folgt:

1. *Jede Kugel, welche eine Kugel orthogonal schneidet, schneidet zwei auf diese bezogene reciproke Kugeln gleichwinkelig. Und umgekehrt.*

2. *Jede Kugel, welche zwei gegebene Kugeln gleichwinkelig schneidet, wird von der diesen zwei Kugeln zugehörigen äusseren oder inneren Potenzkugel rechtwinkelig geschnitten. Die Schnittkreise, in denen die erstere Kugel die zwei gegebenen schneidet, liegen auf einem Kegel, dessen Spitze mit dem äusseren oder inneren Ähnlichkeitspunkt zusammenfällt.*

Die Kugel M bezeichnen wir als äussere oder innere Kugel, je nachdem sie die Kugeln k_1 und k_2 gleich oder ungleichartig unter gleichen Winkeln schneidet.

Legen wir von einem der Ähnlichkeitspunkte eine Tangente an die gleichnamige Kugel M , so ist nun leicht ersichtlich, dass die Entfernung l des Mittelpunktes der Kugel M von dem zugehörigen Ähnlichkeitspunkt durch die Gleichungen

$$(2) \quad l_a^2 = p_a + R^2; \quad l_i^2 = p_i + R^2$$

gegeben ist. Diese Gleichungen gelten für die Entfernungen aller Mittelpunkte solcher Kugeln M , deren Radius gleich R ist. Man hat daher:

3. *Die Mittelpunkte aller Kugeln, welche mit einem bestimmten Radius beschrieben, zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln gleichwinkelig und gleich- oder ungleichartig schneiden, liegen auf Kugeln, deren Mittelpunkte mit den Ähnlichkeitspunkten jener zwei Kugeln zusammenfallen und deren Radien l_a und l_i beziehlich durch die Gleichungen (2) gegeben sind. Wir heissen diese Kugeln äussere und innere Mittelpunktenkugeln, dem Radius R zugeordnet.*

Die beiden einander zugeordneten äusseren und inneren Mittelpunktenkugeln a_{12} und i_{12} schneiden einander in einem Kreise, dessen

Punkte Mittelpunkte sowohl von äusseren als von inneren Kugeln M sind, d. h. sie sind die Mittelpunkte solcher Kugeln M , die die Kugeln k_1 und k_2 orthogonal schneiden. Dieser Schnittkreis liegt daher in der Potenzebene der Kugeln k_1 und k_2 . Wir haben somit:

4. Die Potenzebene von zwei Kugeln ist auch die Potenzebene von zwei einander und einem bestimmten Radius zugeordneten, zu jenen zwei Kugeln gehörenden, Mittelpunktenkugeln.

5. Die Mittelpunkte aller Kugeln von gegebenem Radius, die zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln rechtwinkelig schneiden, liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt in den Durchschnittpunkt der Centralnlinie mit der Potenzebene der zwei Kugeln fällt.

Lassen wir den Radius R der Kugel M gleich Null werden, so hat man

$$(3) \quad l_a^2 = p_a; \quad l_i^2 = p_i,$$

d. h.

6. Die Punkte der Potenzkugeln zweier Kugeln lassen sich als Kugeln von dem Radius Null ansehen, die diese zwei gleichwinkelig schneiden.

Folgerungen 1. Mit Hilfe der bis dahin erhaltenen Resultate kann man nachfolgende Aufgaben lösen:

1. Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkt als Mittelpunkt eine Kugel so zu beschreiben, dass sie zwei der Lage und Grösse nach gegebene gleichwinkelig schneide:

Man legt von dem gegebenen Punkte und an jede der zu den zwei Kugeln gehörenden Potenzkugeln Tangenten, sind die Längen dieser Linien die Radien der gesuchten Kugeln. Wir haben somit zwei Lösungen und folglich ist:

7. Jeder Punkt des Raumes ist Mittelpunkt von zwei (reellen, einer reellen und einer imaginären, oder von zwei imaginären) Kugeln, (einer äusseren und einer inneren), welche zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln gleichwinkelig schneiden.

2. Aufgabe. Mit einem gegebenen Radius R eine Kugel so zu beschreiben, dass sie zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln gleichwinkelig schneide und ausserdem ihren Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegend habe.

Man construirt mit Hilfe der Gleichungen (2) die dem Radius R zugeordneten Mittelpunktenkugeln, so sind alsdann die Schnitte dieser Kugeln mit der gegebenen Geraden die Mittelpunkte der verlangten Kugeln. Es genügen also zwei äussere und zwei innere Kugeln der Aufgabe. Die Mittelpunkte dieser Kugeln liegen zu den Fusspunkten der von dem äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt auf die gegebene Gerade gefällten Normalen. Die beiden äusseren Kugeln

— M_1 und M_2 — schneiden die äussere Potenzkugel a_{12} rechtwinkelig, d. h. der äussere Aehnlichkeitspunkt a_{12} ist Potenzpunkt in Bezug auf die Kugeln M_1 und M_2 . Die Potenzebene dieser Kugeln geht somit durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt. Ebenso zeigt man, dass die Potenzebene der beiden inneren Kugeln M_1' und M_2' durch den inneren Aehnlichkeitspunkt i_{12} der Kugeln k_1 und k_2 geht. Wir haben so:

8. Die Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln gleichwinkelig und zwar gleich- oder ungleichartig schneiden und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, bilden je eine Kugelschaar. Ihre Potenzebene geht im ersten Fall durch den äusseren und im zweiten Fall durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der zwei gegebenen Kugeln.

An diese Sätze schliessen sich ohne weiteres die zwei nachfolgenden an.

9. Die Punkte einer beliebigen Ebene, welche als Mittelpunkte von Kugeln von bestimmtem Radius, die zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden, anzusehen sind, liegen auf zwei Kreisen. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind die Fusspunkte der aus den Aehnlichkeitspunkten auf die Ebene gefällten Lothe. Sie sind also immer reell, während die Kreise selbst imaginär sein können.

10. Es gibt zwei Kugeln von bestimmtem Radius, die zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln rechtwinkelig schneiden und ihre Mittelpunkte in einer beliebigen Ebene liegend haben.

II.

Nehmen wir zu den zwei Kugeln k_1 und k_2 noch eine dritte, die Kugel k_3 hinzu, so erhalten wir sechs Aehnlichkeitspunkte zu je drei auf vier Geraden — den Aehnlichkeitsachsen liegend. Wir erhalten ebenso viele mit diesen Punkten gleichbezeichnete Potenzkugeln und je einem bestimmten Radius zugeordnete Mittelpunktenkugeln. Wir bezeichnen die zu den Kugeln k_x und k_y gehörenden Aehnlichkeitspunkte mit a_{xy} und i_{xy} , wo x und y ungleich aber die Zahlen 1, 2, 3 bedeuten. Von diesen Aehnlichkeitspunkten liegen

1. a_{12} ; a_{13} ; a_{23} auf der Aehnlichkeitsaxe A_{123} .
2. a_{12} ; i_{13} ; i_{23} „ „ „ „ $A_{3,12}$.
3. i_{12} ; a_{13} ; i_{23} „ „ „ „ $A_{2,31}$.
4. i_{12} ; i_{13} ; a_{23} „ „ „ „ $A_{1,23}$.

Die Potenzebenen l_{12} ; l_{13} ; l_{23} , zu je zwei der drei Kugeln k gehörend, schneiden sich in einer Geraden, der Potenzgeraden g_{123} .

Die Potenzkugeln a_{12} ; a_{13} schneiden sich in einem Kreise, dessen Punkte nach Satz 6. als Kugeln von dem Radius Null anzufassen sind, die sowohl k_1 und k_2 als k_1 und k_3 , doch alle drei Kugeln k

gleichwinkelig und gleichartig schneiden. Dieser Kreis muss daher auch auf der Potenzkugel a_{23} liegen. Es schneiden sich also alle drei Potenzkugeln a_{12} ; a_{13} ; a_{23} in einem Kreise. Ebenso zeigt man, dass sich die Potenzkugeln a_{12} ; i_{13} ; i_{23} ; und

$$i_{12}; a_{13}; i_{23} \text{ wie}$$

$$i_{12}; i_{13}; a_{23} \text{ je in einem Kreise schneiden.}$$

Man hat daher.

11. *Die sechs zu drei Kugeln gehörenden Potenzkugeln schneiden sich viermal zu je dreien in einem Kreise und zwar einmal alle drei äussere und dreimal je zwei innere mit der nicht zugehörigen äusseren.*

Ist die Kugel M in Bezug auf die Kugeln k_1 ; k_2 ; k_3 eine äussere, so muss sie die drei äusseren Potenzkugeln rechtwinkelig schneiden, d. h. der Mittelpunkt M liegt auf der Potenzebene ε_{123} der drei Potenzkugeln a_{12} ; a_{13} ; a_{23} . Ist hingegen die Kugel M in Bezug auf zwei der drei Kugeln eine äussere, hingegen in Bezug auf die Kugelpaare, gebildet durch die übrige dritte Kugel und je einer von diesen zweien eine innere, so muss sie die zugehörigen äusseren und inneren Potenzkugeln rechtwinkelig schneiden. Der Mittelpunkt dieser Kugel muss daher auf der Potenzebene dieser drei Potenzkugeln liegen. Wir bezeichnen diese Potenzebenen mit $\varepsilon_{1,23}$; $\varepsilon_{2,31}$; $\varepsilon_{3,12}$, so dass $\varepsilon_{1,23}$ zu den Potenzkugeln a_{23} ; i_{12} ; i_{13} , u. s. w. gehören. Diese vier Ebenen ε gehen sämtlich durch die Potenzlinie g_{123} ; denn die Punkte dieser Geraden sind Mittelpunkte solcher Kugeln, welche die drei Kugeln k_1 ; k_2 ; k_3 rechtwinkelig, d. h. sowohl gleich- als ungleichartig schneiden. Wie ersichtlich, stehen die Ebenen ε_{123} u. s. w. beziehlich auf den Aehnlichkeitsachsen A_{123} u. s. w. normal; so dass:

12. *Die Mittelpunkte aller Kugeln, die drei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden, auf vier durch die Potenzlinie hindurchgehenden, auf den Aehnlichkeitsachsen beziehlich normal stehenden Ebenen liegen.*

Construiren wir zu den drei Kugeln k die einem Radius R beigeordneten Mittelpunktenkugeln, so schneiden sich, wie ersichtlich, die sechs entstehenden Kugeln viermal zu je dreien in einem Kreise und zwar in gleichen Gruppen wie die Potenzkugeln und haben so:

13. *Die Mittelpunkte aller Kugeln von gegebenem Radius, die drei Kugeln gleichwinkelig schneiden, auf Kreisen liegen. Diese Kreise schneiden sich in den nämlichen zwei Punkten der Potenzlinie, der drei Kugeln. Es giebt daher zwei Kugeln von bestimmten Radien, die drei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln rechtwinkelig schneiden. Ihre Mittelpunkte liegen symmetrisch zu der Ebene, in der die Mittelpunkte der Kugeln k liegen.*

Folgerungen 2. Schneiden wir die vier Mittelpunkteebenen ε zu drei Kugeln k durch eine Gerade, so folgt augenblicklich:

14. *Es giebt vier Kugeln, welche drei der Lage und Grösse nach gegebene gleichwinkelig schneiden und ihre Mittelpunkte auf einer Geraden liegend haben.*

Unter Beachtung des Lehrsatzes 13. hat man:

15. *Es giebt acht Kugeln, die mit einem gegebenen Radius beschrieben drei Kugeln gleichwinkelig schneiden und die ihre Mittelpunkte auf einer Ebene liegend haben. Die acht Mittelpunkte dieser Kugeln liegen viermal zu je zweien auf einer Geraden, die alle durch einen Punkt hindurchgehen. Diese vier Geraden bilden den Ort der Punkte in der Ebene, die sich als Mittelpunkte von Kugeln auffassen lassen, die drei gegebene gleichwinkelig schneiden.*

III.

Tritt zu den drei Kugeln k noch eine vierte — die Kugel k_4 — hinzu, so erhalten wir die Aehnlichkeitspunkte

$$a_{12}; a_{13}; a_{14}; a_{23}; a_{24}; a_{34}$$

$$i_{12}; i_{13}; i_{14}; i_{23}; i_{24}; i_{34}$$

die je zu dreien auf den Aehnlichkeitsachsen

$$A_{123}; A_{124}; A_{134}; A_{234}$$

$$A_{1,23}; A_{1,24}; A_{1,34}; A_{2,34}$$

$$A_{2,31}; A_{2,41}; A_{3,41}; A_{3,42}$$

$$A_{3,12}; A_{1,12}; A_{4,13}; A_{4,23}$$

und achtmal zu je sechsen in einer Ebene, den Aehnlichkeitsebenen

$$e_{1234}; e_{1,234}; e_{2,134}; e_{3,124}; e_{4,123}$$

$$e_{12,34}; e_{13,24}; e_{14,23}$$

liegen.

Die Potenzgeraden $g_{123}; g_{124}; g_{134}; g_{234}$, zu je drei der vier Kugeln k gehörend, schneiden sich in dem Potenzpunkt P oder P_{1234} der vier Kugeln. Je drei der vier Kugeln k besitzen vier Mittelpunkteebenen ε , welche je durch die zugehörige Potenzlinie und folglich alle durch den Potenzpunkt P hindurchgehen. Wir haben die Mittelpunkteebenen

$$\varepsilon_{123}; \varepsilon_{1,23}; \varepsilon_{2,31}; \varepsilon_{3,12}$$

$$\varepsilon_{124}; \varepsilon_{1,24}; \varepsilon_{2,41}; \varepsilon_{4,12}$$

$$\varepsilon_{134}; \varepsilon_{1,34}; \varepsilon_{3,41}; \varepsilon_{4,13}$$

$$\varepsilon_{234}; \varepsilon_{2,34}; \varepsilon_{3,24}; \varepsilon_{4,23}$$

Von diesen gehen je die in horizontaler Reihe geschriebenen durch die Potenzgeraden $g_{123}; g_{124}; g_{134}; g_{234}$. Diese Ebenen schneiden sich in $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ durch P gehenden Geraden. Zu diesen gehören die Potenzgeraden g als sechsfache Linien. Wir haben nun noch die 96 übrigen

Schnittlinien aufzusuchen, und ihre Bedeutung zu ermitteln. Die Ebene ϵ_{123} wird von allen zwölf Ebenen ϵ_{124} bis $\epsilon_{4,23}$ geschnitten. Die Schnittlinie mit der Ebene ϵ_{124} sei mit g_{1234} bezeichnet. Jeder Punkt dieser Geraden ist erstens als Mittelpunkt einer Kugel, die die Kugeln $k_1; k_2; k_3$ und zweitens als Mittelpunkt einer Kugel, die die Kugeln $k_1; k_2; k_3$ gleichartig und gleichwinkelig schneidet, aufzufassen. Diese beiden Kugeln fallen daher zusammen, weil diese beiden Kugeln in Bezug auf k_1 und k_2 äussere sind und nach Lehrsatz 7. jeder Punkt des Raumes in Bezug auf zwei Kugeln Mittelpunkt von nur einer äusseren Kugel ist. Die Punkte der Geraden g_{1234} sind also Mittelpunkte von Kugeln, die alle vier Kugeln k gleichwinkelig und gleichartig schneiden. Durch diese Geraden müssen daher auch die Ebenen ϵ_{134} und ϵ_{234} gehen. Die Ebene ϵ_{123} wird von der Ebene $\epsilon_{4,12}$ in Geraden $g_{4,123}$ geschnitten. Jeder Punkt dieser Geraden ist Mittelpunkt einer Kugel, welche die Kugeln $k_1; k_2; k_3$ gleichartig und eine Kugel, welche die Kugeln k_1 und k_2 gleichartig, hingegen aber je die Kugelpaare k_1 und k_4 wie k_2 und k_4 ungleichartig schneiden. Es fallen daher nach Lehrsatz 7. diese beiden Kugeln ebenfalls zusammen. Es müssen daher durch diese Gerade die Ebenen $\epsilon_{4,23}$ und $\epsilon_{4,13}$ gehen. Die Schnittlinien der Ebene ϵ_{123} mit den sechseckigen Ebenen enthalten Punkte, die sich als Mittelpunkte von Kugelpaaren ergeben, von denen die eine Kugel in Bezug auf zwei der drei Kugeln $k_1; k_2; k_3$ eine innere und die andere eine äussere ist, die somit nicht zusammenfallen. Auf gleiche Weise zeigt man, dass in jeder der Ebenen ϵ zwei Geraden g liegen, deren Punkte sich als Mittelpunkte von Kugeln M , die die vier Kugeln k gleichwinkelig schneiden, auffassen lassen, und sieben Geraden, bei denen dies nicht stattfindet. Wir erhalten so nachfolgende Zusammenstellung.

Die Ebenen $\epsilon_{123}; \epsilon_{124}; \epsilon_{134}; \epsilon_{234}$ schneiden sich in der Geraden g_{1234}

ϵ_{123}	$\epsilon_{4,12}$	$\epsilon_{4,13}$	$\epsilon_{4,23}$	„	„	„	„	$g_{4,123}$
ϵ_{124}	$\epsilon_{3,12}$	$\epsilon_{3,14}$	$\epsilon_{3,24}$	„	„	„	„	$g_{3,124}$
ϵ_{134}	$\epsilon_{2,13}$	$\epsilon_{2,14}$	$\epsilon_{2,34}$	„	„	„	„	$g_{2,134}$
ϵ_{234}	$\epsilon_{1,34}$	$\epsilon_{1,23}$	$\epsilon_{1,24}$	„	„	„	„	$g_{1,234}$
$\epsilon_{1,23}$	$\epsilon_{4,23}$	$\epsilon_{2,14}$	$\epsilon_{3,14}$	„	„	„	„	$g_{14,23}$
$\epsilon_{1,24}$	$\epsilon_{3,24}$	$\epsilon_{2,13}$	$\epsilon_{4,13}$	„	„	„	„	$g_{13,24}$
$\epsilon_{1,34}$	$\epsilon_{2,34}$	$\epsilon_{3,12}$	$\epsilon_{4,12}$	„	„	„	„	$g_{12,34}$

Jede dieser Geraden g repräsentirt sechs Schnittgeraden, weil durch jede vier Ebenen hindurchgehen. Diese acht Geraden g stehen beziehlich auf den acht Aehnlichkeitsebenen der vier Kugeln normal, weil je die vier durch diese Geraden hindurchgehenden Ebenen ϵ je auf einer in der betreffenden Aehnlichkeitsebene liegenden Aehnlichkeitsaxe normal steht. Es ist g_{1234} normal zu ϵ_{1234} u. s. w. und wir haben so:

16. Die Mittelpunkte aller Kugeln, welche vier der Lage und Grösse nach gegebene gleichwinkelig schneiden, liegen auf acht durch den Potenzpunkt der vier Kugeln hindurchgehenden und je auf den Aehnlichkeits-ebenen normal stehenden Geraden — den Mittelpunktingeraden.

Denken wir uns die einem bestimmten Radius beigeordneten Mittelpunktingerkugeln construirt, so hat man ohne weiteres:

17. Die zwölf zu vier Kugeln und einem bestimmten Radius beigeordneten Mittelpunktingerkugeln schneiden sich achtmal zu je sechs in zwei Punkten, und zwar

1. Einmal alle sechs äusseren;
2. Viermal drei äussere mit den drei nicht zugehörigen inneren;
3. Dreimal je vier innere mit zwei äusseren,

und daraus folgt:

18. Es gibt sechszehn Kugeln, welche mit einem bestimmten Radius beschrieben vier gegebene Kugeln gleichwinkelig schneiden. Es sondern sich die Mittelpunkte dieser Kugeln achtmal in Paaren so ab, dass die eines jeden Paares zu der zugehörigen AehnlichkeitsEbene symmetrisch liegen.

Beschreibt man die zwölf Mittelpunktingerkugeln, welche dem Radius der Orthogonalkugel beigeordnet sind, so gehen diese sämmtlich durch den Potenzpunkt und schneiden jede Mittelpunktingeraden noch in einem weiteren Punkte. Man hat daher:

19. Es gibt ausser der Orthogonalkugel noch acht Kugeln, welche mit dem Radius der Orthogonalkugel beschrieben die vier Kugeln k gleichwinkelig schneiden. Die Mittelpunkte dieser Kugeln sind die Gegenpunkte des Potenzpunktes in Bezug auf die acht AehnlichkeitsEbenen.

Folgerung 3. Schneidet man die acht Mittelpunktingeraden g zu vier Kugeln k durch eine beliebige Ebene, so hat man:

20. Acht Kugeln, welche vier der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln gleichwinkelig schneiden und ihre Mittelpunkte in einer gegebenen Ebene liegend haben.

IV.

Kommt zu den vier Kugeln $k_1; k_2; k_3; k_4$ noch eine fünfte, die Kugel k_5 hinzu, so erhalten wir Systeme von Aehnlichkeitspunktingeraden und Ebenen, sowie von Mittelpunktingerebenen und Geraden. Man hat die Mittelpunktingeraden:

$$(1) \quad g_{1,234}; g_{1,235}; g_{1,245}; g_{1,345}; g_{2345}$$

$$(2) \quad g_{1,234}; g_{1,235}; g_{1,245}; g_{1,345}; g_{2,345}$$

u. s. w.

und die Mittelpunktingerebenen

- (1) ϵ_{123} ; ϵ_{124} ; ϵ_{125} ; ϵ_{134} ; ϵ_{135} ; ϵ_{145} ; ϵ_{234} ; ϵ_{235} ; ϵ_{245} ; ϵ_{345}
 (2) $\epsilon_{1,23}$; $\epsilon_{1,24}$; $\epsilon_{1,25}$; $\epsilon_{1,34}$; $\epsilon_{1,35}$; $\epsilon_{1,45}$; $\epsilon_{2,34}$; $\epsilon_{2,35}$; $\epsilon_{2,45}$; $\epsilon_{3,45}$

u. s. w.

Durch jede der Geraden g gehen die Ebenen, oder treffen sich wenigstens im Potenzpunkt die Ebenen, welche mit den gleichen Indices behaftet sind, wie die Gerade selbst. Jede andere Ebene trifft die Geraden g in Punkten, die wir näher zu untersuchen haben. Die Gerade g_{1234} trifft die Ebene ϵ_{123} in dem Punkte M_{12345} . Dieser Punkt ist der Mittelpunkt einer Kugel, die die vier Kugeln k_1 bis k_4 und der Mittelpunkt einer Kugel, die die drei Kugeln k_1 ; k_2 ; k_3 gleichwinkelig und gleichartig schneidet. Diese beiden Kugeln schneiden also die Kugeln k_1 und k_2 gleichartig und müssen daher nach Lehrsatz 7. zusammenfallen. M_{12345} ist somit der Mittelpunkt einer Kugel, die die sämtlichen gegebenen fünf gleichartig unter gleichen Winkeln schneidet. Durch diesen Punkt gehen daher die Geraden g_{1234} ; g_{1235} ; g_{1245} ; g_{1345} ; g_{2345} und die zehn Ebenen ϵ_{123} ; ϵ_{124} ; ϵ_{125} ; ϵ_{134} ; ϵ_{135} ; ϵ_{145} ; ϵ_{234} ; ϵ_{235} ; ϵ_{245} ; ϵ_{345} . Die Gerade g_{1231} schneidet die Ebene $\epsilon_{5,12}$ in dem Punkte $M_{5,1234}$. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt einer Kugel, welche die vier Kugeln k_1 bis k_4 gleichartig und gleichwinkelig und je k_5 in Bezug auf die vier erstern ungleichartig schneidet. Die Schnittpunkte der Geraden g_{1234} mit den obigen ebenen führen zu keinen Punkten mehr, die Mittelpunkte von Kugeln, die die gegebenen fünf gleichwinkelig schnitten, wären. Denn wir sehen, dass jeder dieser Schnittpunkte Mittelpunkte von zwei Kugeln, von denen die eine irgend zwei der fünf gegebenen Kugeln gleichartig und die andere sie ungleichartig aber gleichwinkelig schneidet und somit nicht zusammenfallen können. Auf diese Weise sehen wir, dass es im Allgemeinen auf jeder Geraden g zwei Punkte M giebt und wir die sechzehn Punkte

M_{12345} ; $M_{1,2345}$; $M_{2,3451}$; $M_{3,4512}$; $M_{4,5123}$; $M_{5,1234}$; $M_{12,345}$; $M_{13,452}$

$M_{14,523}$; $M_{15,234}$; $M_{23,451}$; $M_{24,513}$; $M_{25,134}$; $M_{34,512}$; $M_{35,124}$; $M_{45,123}$

erhalten. Oder:

21. Es giebt sechszehn Kugeln, welche fünf der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln gleichwinkelig schneiden, und zwar giebt es

1. Eine Kugel, welche alle fünf gleichartig,
2. Fünf Kugeln, welche je eine in Bezug auf die anderen vier ungleichartig und
3. Zehn Kugeln, welche je zwei Kugeln in Bezug auf die anderen drei ungleichartig schneiden.

An diese Resultate schliessen sich ohne weiteres die folgenden an:

22. Von den Mittelpunkten der sechszehn, fünf gegebene Kugeln gleichwinkelig schneidenden Kugeln liegen vierzimal je zwoi mit einem der fünf Potenzpunkte in einer Geraden. Durch jeden Mittelpunkt gehen

fünf und durch jeden Potenzpunkt gehen acht dieser Geraden. Ausserdem liegen von diesen Mittelpunkten vierzigmal je fünf mit zwei Potenzpunkten in einer Ebene. Von diesen Ebenen gehen durch jeden Mittelpunkt zehn, durch jeden Potenzpunkt sechszehn und durch jede der obigen Geraden vier.

Es würden sich noch eine Menge von interessanten Resultaten ergeben, wenn man die Lagenverhältnisse und metrischen Relationen, die zwischen den 16 Kugeln existiren, untersuchen würde. Besonders die Fragen: 1. Unter welchen Umständen reduzirt sich die Anzahl der Lösungen? 2. Wann und in welcher Zahl treten imaginäre Kugeln auf? 3. Wann und in welcher Zahl treten reelle, aber imaginär schneidende Kugeln auf, lassen sich sehr einfach beantworten. Ich behalte mir vor, auf diese Beziehungen später zurückzukommen.

Bemerkung. Es ist nun nicht mehr schwierig, die von Steiner gestellte Aufgabe: Vier Kreise durch einen fünften unter gleichen Winkeln zu schneiden, zu lösen.

Solothurn, den 17. März 1871.