ÜBER DIE MULTIPLIKATION DIRICHLET'SCHER REIHEN.

Von **Edmund Landau** (Berlin).

Adunanza del 9 giugno 1907.

Es seien

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$
und

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$
zwei DIRICHLET'sche Reihen, d. h. es seien $a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ zwei gegebene Folgen von komplexen Konstanten, s eine komplexe Variable,
$$n^s = e^{s \log n},$$
wo $\log n$ den reellen Wert des Logarithmus bezeichnet. Multipliziert man die Reihen (1) und (2) rein formal mit einander, so lässt sich ihr Produkt gleichfalls als DIRICHLET'sche Reihe darstellen, indem man alle Glieder
$$\frac{a_l}{l^s} \frac{b_m}{m^s}$$
zusammenfasst, für welche lm denselben Wert n hat. So entsteht die DIRICHLET'sche Reihe

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$
wo
$$c_n = \sum_{l \mid n} a_l b_{\frac{n}{l}} = \sum_{m \mid n} a_{\frac{n}{m}} b_m = \sum_{lm=n} a_l b_m$$
gesetzt ist [1]), also
$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1, \\ c_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1, \\ c_3 &= a_1 b_3 + a_3 b_1, \\ c_4 &= a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1, \\ c_5 &= a_1 b_5 + a_5 b_1, \\ c_6 &= a_1 b_6 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_6 b_1 \end{aligned}$$
u.s.f.

[1]) Das Zeichen $u \mid v$ bedeutet, dass u alle Teiler von v durchläuft.

Es entsteht nun die Frage, ob bezw. wann aus der Konvergenz von (1) und (2) für ein spezielles s die Konvergenz von (3) für dies s folgt. In dieser Form ist die Variable s unnötig; denn wenn

$$\frac{a_n}{n^s} = \alpha_n,$$

$$\frac{b_n}{n^s} = \beta_n,$$

$$\frac{c_n}{n^s} = \gamma_n$$

gesetzt wird, so ist offenbar

$$\gamma_n = \sum_{l|n} \alpha_l \beta_{\frac{n}{l}} = \sum_{m|n} \alpha_{\frac{n}{m}} \beta_m = \sum_{lm=n} \alpha_l \beta_m,$$

und die Aufgabe lautet, zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen aus der Konvergenz von

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

und

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

die Konvergenz von

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \alpha_1 \beta_1 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) + (\alpha_1 \beta_4 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_4 \beta_1) + \cdots$$

folgt.

Dies Problem der Multiplikation nach der DIRICHLET'schen Regel liesse sich in der Richtung bearbeiten, welche das Vorbild der Herren PRINGSHEIM [2]), VOSS [3]) und CAJORI [4]) für die CAUCHY'sche Multiplikationsregel angibt; diese Autoren fanden einerseits notwendige, andererseits hinreichende Bedingungen dafür, dass mit (4) und (5) auch die Reihe

(7) $$\sum_{n=2}^{\infty} \delta_n$$

---

[2]) *Ueber die Multiplication bedingt convergenter Reihen* [Mathematische Annalen, Bd. XXI (1883), S. 327-378]; *Ueber die Anwendung der* CAUCHY'*schen Multiplicationsregel auf bedingt convergente oder divergente Reihen* [Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901), S. 404-412].

[3]) *Ueber Multiplication bedingt convergenter Reihen* [Mathematische Annalen, Bd. XXIV (1884), S. 42-47].

[4]) *Multiplication of Series* [Bulletin of the New York Mathematical Society, Bd. I (1892), S. 184-189]; *On the Multiplication of Semi-convergent Series* [American Journal of Mathematics, Bd. XV (1893), S. 339-343]; *The Multiplication of Semi-convergent Series* [Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. I (1895), S. 180-183]; *On the Multiplication and Involution of Semi-convergent Series* [American Journal of Mathematics, Bd. XVIII (1896), S. 195-209]; *Divergent and conditionally convergent series whose product is absolutely convergent* [Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901), S. 25-36]; *The Application of the Fundamental Laws of Algebra to the Multiplication of Infinite Series* [Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. VIII (1902), S. 231-236]; *Series Whose Product is Absolutely Convergent* [Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. IX (1903), S. 188-194].

konvergiert, wo

(8)
$$\delta_n = \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l \beta_{n-l}$$

ist, also

$$\delta_2 = \alpha_1 \beta_1,$$
$$\delta_3 = \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1,$$
$$\delta_4 = \alpha_1 \beta_3 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_1$$

u.s.f., und sie liessen auch die Annahme der Konvergenz von (4) und (5) bei der Untersuchung der Konvergenz von (7) fallen. Doch nicht die Ausführung jener analogen Untersuchungen soll der Zweck des folgenden sein; vielmehr treten die Probleme, denen ich besonders nachgehen werde, bei der gewöhnlichen, d.h. CAUCHY'schen Multiplikationsregel garnicht auf und entstehen durch die Eigentümlichkeit der DIRICHLET'schen Reihen, im Konvergenzgebiete nicht notwendig überall absolut zu konvergieren. Daher habe ich gleich die unendlichen Reihen mit der Variablen s angesetzt.

Das Problem, das zu den §§ 1-7 des folgenden Anlass gibt, lautet: « Die Reihen (1) und (2) seien für $s > \sigma$ konvergent, d. h. die Abszissen ihrer Konvergenzgeraden [5]) seien beide $\leqq \sigma$. Was lässt sich über die Abszisse der Konvergenzgeraden von (3) aussagen? »

Für Potenzreihen, welche bekanntlich der CAUCHY'schen Multiplikationsregel (8) entsprechen, ist die analoge Frage trivial. Wenn nämlich die beiden Potenzreihen

(9)
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

und

(10)
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

mindestens für $|x| < \rho$ konvergieren, d.h. wenn die Radien ihrer Konvergenzkreise $\geqq \rho$ sind, und wenn

$$d_n = \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}$$

gesetzt wird, so ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

stets für $|x| < \rho$ konvergent; denn für $|x| < \rho$ sind die beiden Reihen (9) und (10) absolut konvergent, und das formal gebildete Produkt zweier absolut konvergenter Reihen darf beliebig geordnet werden. Bei DIRICHLET'schen Reihen ist es jedoch unter den oben gemachten Annahmen nicht zulässig, ohne weiteres für alle $s > \sigma$ die Glei-

---

[5]) Bekanntlich gibt es, wie Herr JENSEN {*Om Rækkers Konvergens* [Tidsskrift for Mathematik, Ser. V, Bd. II (1884), S. 63-72], S. 70} entdeckt hat, zu jeder DIRICHLET'schen Reihe eine Zahl σ_0 derart, dass die Reihe für $\mathfrak{R}(s) < \sigma_0$ divergiert und für $\mathfrak{R}(s) > \sigma_0$ konvergiert. Die Gerade $\mathfrak{R}(s) = \sigma_0$ heisst alsdann die Konvergenzgerade; σ_0 ist die Abszisse jedes ihrer Punkte. Es sind auch die extremen Fälle $\sigma_0 = -\infty$, $\sigma_0 = +\infty$ möglich, in welchen die Reihe überall bezw. nirgends konvergiert.

chung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s} \tag{11}$$

anzusetzen, da (1) und (2) für $s > \sigma$ nicht absolut zu konvergieren brauchen.

Einige andere Fragestellungen, welche auch an diese formal gebildete Gleichung (11) anknüpfen und u. a. zu einem Analogon eines ABEL'schen Satzes über Multiplikation unendlicher Reihen führen, werden in den §§ 8 und 10 untersucht.

Da die Probleme, um welche es sich in dieser Arbeit handelt, bereits für DIRICHLET'sche Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

ungeklärt sind, so werde ich nur kurz (im § 9) auf die DIRICHLET'schen Reihen im weiteren Sinne

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

bezugnehmen, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine beliebige monoton ins Unendliche wachsende Folge reeller Grössen ist; auch bei Besprechung einer verwandten Klasse von Integralen (im § 11) werde ich mich auf wenige Untersuchungen beschränken. Dafür werde ich den Fall der Reihen (1) um so ausführlicher erörtern und durch zahlreiche Beispiele belegen.

In den §§ 12-15 entferne ich mich etwas weiter vom ursprünglichen Gegenstand; ich behandle dort nicht mehr allgemeine Eigenschaften DIRICHLET'scher Reihen und deren Anwendungen, sondern untersuche direkt einige spezielle DIRICHLET'sche Reihen und Potenzreihen, welche mit den Primzahlen zusammenhängen.

§ 1.

Über die Multiplikation einer konvergenten Reihe mit einer absolut konvergenten Reihe nach der Dirichlet'schen Regel.

Wenn die beiden Reihen (4) und (5) konvergieren, so braucht die Reihe (6) nicht konvergent zu sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0,$$

$$\alpha_n = \beta_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{\log n}} \quad \text{für} \quad n \geqq 2.$$

Hier sind offenbar die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{\log n}}$$

konvergent. Wäre nun

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l/n}\alpha_l\,\beta_{\frac{n}{l}}$$

konvergent, so wäre a fortiori

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n = 0,$$

also speziell

$$\lim_{u=\infty} \gamma_{2^u} = 0.$$

Es ist aber für $u \geqq 2$

$$\gamma_{2^u} = \sum_{l \mid 2^u} \alpha_l \beta_{\frac{2^u}{l}} = \sum_{v=0}^{u} \alpha_{2^v} \beta_{2^{u-v}} = \sum_{v=1}^{u-1} \alpha_{2^v} \beta_{2^{u-v}}$$

$$= \sum_{v=1}^{u-1} \frac{1}{\sqrt[3]{v \log 2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(u-v)\log 2}} = \frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}} \sum_{v=1}^{u-1} \frac{1}{\sqrt[3]{v(u-v)}}$$

$$\geqq \frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}} \sum_{v=1}^{u-1} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{u}{2}\,\frac{u}{2}}} = \left(\frac{2}{\log 2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{u-1}{u^{\frac{2}{3}}},$$

sodass

$$\lim_{u=\infty} \gamma_{2^u} = +\infty$$

ist.

Dass im Falle der absoluten Konvergenz von (4) und (5) die Reihe (6) konvergiert, ist trivial. Denn die Doppelreihe

$$\sum_{\substack{l=1,2,\ldots \\ m=1,2,\ldots}} \alpha_l \beta_m$$

darf alsdann beliebig geordnet werden; speziell ist also, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = A,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = B$$

gesetzt wird, die Reihe

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$$

konvergent und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = AB.$$

Herr MERTENS [6]) hatte für die gewöhnliche (CAUCHY'sche) Multiplikationsregel die wichtige Entdeckung gemacht, dass die durch formale Multiplikation aus einer konvergenten und einer absolut konvergenten Reihe entstehende Reihe konvergiert. In Formeln: Wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

---

[6]) *Ueber die Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXIX (1875), S. 182-184].

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

konvergieren, so konvergiert

(7) $$\sum_{n=2}^{\infty} \delta_n,$$

wo

(8) $$\delta_n = \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l \beta_{n-l}$$

gesetzt ist, und es ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} \delta_n = AB = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

Analog besteht für die DIRICHLET'sche Multiplikationsregel der Satz:

(I): *Wenn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

konvergieren, so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l \mid n} \alpha_l \beta_{\frac{n}{l}},$$

und es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = AB = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

Dieser Satz ist jedoch nicht neu, sondern ein Spezialfall eines allgemeineren — auch den MERTENS'schen enthaltenden — Satzes, welchen STIELTJES [7]) in einer wichtigen Arbeit aufgestellt und bewiesen hat [8]):

(II): *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = A$$

sei absolut konvergent; die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = B$$

sei konvergent. Es werden alle endlichen Summen

$$\sum_{l,m} \alpha_l \beta_m$$

betrachtet, bei denen mit jedem vorkommenden Wertepaar l, m (wo $m > 1$ ist) alle Paare l, m' vorkommen, für welche $m' < m$ ist; mit anderen Worten, es werden alle Summen von der Form

(12) $$S = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{\psi(L,\, l)})$$

---

7) *Note sur la multiplication de deux séries* [Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. III, Bd. VI (1887), S. 210-215], S. 210-213.

8) Ich formuliere den Satz etwas anders als STIELTJES; es ist aber genau dieselbe Tatsache, welche STIELTJES a. a. O. in geometrischer Einkleidung ausspricht und beweist.

betrachtet, wo $\psi(L, l)$ *für jedes* L *nebst* $l = 1, 2, \ldots, L$ *irgend eine ganze Zahl* $\geqq 0$ *bezeichnet* [9]. *Dann gibt es nach Annahme jeder positiven Grösse* δ *ein* $\lambda = \lambda(\delta)$, *sodass für alle* $L \geqq \lambda$, *wenn dazu für jedes* $l = 1, 2, \ldots, \lambda$

$$\psi(L, l) \geqq \lambda$$

ist,

$$|S - AB| < \delta$$

ist.

Kurz ausgedrückt: Die Partialsummen von der Form (12), wenn sie soweit ausgedehnt werden, dass sie alle Glieder $\alpha_l \beta_m$ enthalten, für welche $l \leqq \lambda$, $m \leqq \lambda$ ist, nähern sich für $\lambda = \infty$ der Grenze AB.

Der STIELTJES'sche Satz (II) wird folgendermassen bewiesen. Wenn

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = A_n,$$

$$\beta_1 + \cdots + \beta_n = B_n$$

gesetzt wird, so ist

$$S = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l B_{\psi(L, l)},$$

$$A_L B_L = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l B_L,$$

$$S - A_L B_L = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l (B_{\psi(L,l)} - B_L). \tag{13}$$

Nach Voraussetzung gibt es eine absolute Konstante g, sodass für jedes n

$$|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| < g \tag{14}$$

und

$$|B_n| < g \tag{15}$$

ist, ferner nach Annahme von $\delta > 0$ ein $\lambda = \lambda(\delta)$, sodass einerseits für alle $q \geqq \lambda$ nebst beliebigem $p \geqq 0$

$$\sum_{n=q}^{q+p} |\alpha_n| < \frac{\delta}{6g} \tag{16}$$

und

$$|B_{q+p} - B_q| < \frac{\delta}{3g} \tag{17}$$

ist, andererseits für alle $L \geqq \lambda$

$$|A_L B_L - AB| < \frac{\delta}{3}. \tag{18}$$

Ich nehme nun $L \geqq \lambda$, sowie $\psi(L, l) \geqq \lambda$ für $l = 1, 2, \ldots, \lambda$ an und zerlege die rechte Seite von (13) in zwei Teile:

$$S - A_L B_L = \sum_{l=1}^{\lambda} \alpha_l (B_{\psi(L,l)} - B_L) + \sum_{l=\lambda+1}^{L} \alpha_l (B_{\psi(L,l)} - B_L). \tag{19}$$

Da in der ersten Summe auf der rechten Seite von (19) jeder Index n eines B_n nicht kleiner als λ und in der zweiten Summe jeder Index n eines α_n nicht kleiner als

[9]) Für $\psi(L, l) = 0$ ist gemeint, dass das betreffende α_l in keiner Verbindung $\alpha_l \beta_m$ auftritt.

λ ist, so folgt aus (19) unter Benutzung von (14), (15), (16) und (17)

$$|S - A_L B_L| \leqq \sum_{l=1}^{\lambda} |\alpha_l| \frac{\delta}{3g} + \sum_{l=\lambda+1}^{L} |\alpha_l| (g+g)$$

$$(20) \qquad = \frac{\delta}{3g} \sum_{l=1}^{\lambda} |\alpha_l| + 2g \sum_{l=\lambda+1}^{L} |\alpha_l| < \frac{\delta}{3g} g + 2g \frac{\delta}{6g} = \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3};$$

wegen (18) und (20) ist

$$|S - AB| \leqq |S - A_L B_L| + |A_L B_L - AB| < \frac{2\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Damit ist der Satz (II) bewiesen.

In diesem Satz sind — wie STIELTJES auch a. a. O. [10]) hervorgehoben hat — der MERTENS'sche Satz für

$$\psi(L, l) = L - l + 1$$

und der Satz (I) für [11])

$$\psi(L, l) = \left[\frac{L}{l}\right]$$

enthalten; es handelt sich in diesen beiden Spezialfällen, da zu jedem L nur eine Partialsumme S betrachtet wird, um den Limes einer Funktion der einen Variablen L, nämlich der Funktion

$$\sum_{l=1}^{L} \alpha_l B_{\psi(L,l)}$$

für $L = \infty$. Bei der Kompliziertheit des Satzes (II) möchte ich nicht unterlassen, analog zum Obigen den Spezialfall (I) ab ovo zu beweisen:

Nach Voraussetzung gibt es eine absolute Konstante g, sodass für jedes n (14) und (15) gelten, ferner nach Annahme von $\delta > 0$ ein $\lambda = \lambda(\delta)$, sodass einerseits für $q + p \geqq q \geqq \lambda$ (16) und (17) gelten und andererseits für $x \geqq \lambda^2$

$$|A_x B_x - AB| < \frac{\delta}{3}$$

ist. Nun ist [12])

$$\sum_{n=1}^{x} \gamma_n = \sum_{l=1}^{x} \alpha_l \sum_{m=1}^{\frac{x}{l}} \beta_m = \sum_{l=1}^{x} \alpha_l B_{\frac{x}{l}},$$

$$\sum_{n=1}^{x} \gamma_n - A_x B_x = \sum_{l=1}^{x} \alpha_l (B_{\frac{x}{l}} - B_x) = \sum_{l=1}^{\sqrt{x}} \alpha_l (B_{\frac{x}{l}} - B_x) + \sum_{l=[\sqrt{x}]+1}^{x} \alpha_l (B_{\frac{x}{l}} - B_x),$$

also für $x \geqq \lambda^2$, da alsdann in der ersten Summe die Indices n der B_n nicht kleiner

---

[10]) S. 214.

[11]) $[x]$ bedeutet die grösste ganze Zahl $\leqq x$.

[12]) Eine Summe mit nicht ganzer oberer Summationsgrenze bedeute, dass der Summationsbuchstabe alle ganzen Zahlen des betreffenden Intervalls durchläuft. B_u bedeute entsprechend für nicht ganze u die Summe $b_1 + \dots + b_{[u]}$.

als λ, in der zweiten Summe die Indices n der α_n nicht kleiner als λ sind,

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\gamma_n - A_x B_x\right| \leqq \frac{\delta}{3g}\sum_{l=1}^{\sqrt{x}}|\alpha_l| + 2g\sum_{l=[\sqrt{x}]+1}^{x}|\alpha_l| < \frac{\delta}{3g}g + 2g\frac{\delta}{6g} = \frac{2\delta}{3},$$

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\gamma_n - AB\right| \leqq \left|\sum_{n=1}^{x}\gamma_n - A_x B_x\right| + |A_x B_x - AB| < \frac{2\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta;$$

folglich ist

$$\lim_{x=\infty}\sum_{n=1}^{x}\gamma_n = AB,$$

was zu beweisen war.

Im Satze (II) sind übrigens auch die weitergehenden Tatsachen enthalten, dass die durch Auflösung der Klammern in

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) + \cdots$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty}\delta_n = \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1) + \cdots$$

entstehenden Reihen

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \cdots$$

und

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \cdots$$

konvergieren und $= AB$ sind. Denn die Summe der ersten y Glieder in einer dieser beiden Reihen ist für jedes y von der Form (12).

Es dürfen sogar die Glieder jeder jener Klammern beliebig untereinander geordnet werden; auch dann ist ja die Summe der y Anfangsglieder von der Form (12).

§ 2.

Beweis einiger von Euler, Möbius und Cesàro vermuteter Sätze.

Ich will jetzt mehrere spezielle Anwendungen des (mit früheren Resultaten von mir kombinierten) Satzes (I) angeben, ehe ich in der eigentlichen Untersuchung weiter gehe.

1) Herr von Mangoldt [13]) hat zuerst bewiesen, dass

(21)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n} = 0$$

und

(22)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n} = 0$$

---

[13]) *Beweis der Gleichung* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k} = 0$ [Sitzungsberichte der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1897, S. 835-852].

ist, wo $\mu(n)$ die MÖBIUS'sche Funktion und $\lambda(n)$ die LIOUVILLE'sche Funktion bezeichnet, welche folgendermassen definiert sind:

$$\mu(1) = 1,$$

$$\mu(n) = (-1)^\rho \text{ für ein quadratfreies, aus } \rho \text{ Primzahlen zusammengesetztes } n = p_1 p_2 \cdots p_\rho,$$

$$\mu(n) = 0 \text{ für ein nicht quadratfreies } n,$$

$$\lambda(1) = 1,$$

$$\lambda(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\rho^{\alpha_\rho}) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\rho}.$$

Der Satz (I) zeigt, dass, wenn einmal (21) bewiesen ist, (22) daraus unmittelbar folgt. Denn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n}$$

entsteht aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

durch DIRICHLET'sche Multiplikation mit der absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n},$$

wo

$$a_n = 1 \text{ für Quadratzahlen},$$

$$a_n = 0 \text{ für nicht quadratische Zahlen}$$

ist. In der Tat ist alsdann

$$\sum_{l|n} \frac{a_l}{l} \frac{\mu\left(\frac{n}{l}\right)}{\frac{n}{l}} = \frac{1}{n} \sum_{u^2|n} \mu\left(\frac{n}{u^2}\right) = \frac{\lambda(n)}{n}.$$

2) Dieselbe Bemerkung bezieht sich auf die allgemeineren Reihen, welche einem beliebigen algebraischen Zahlkörper entsprechen und in welchen als Argument der Funktionen μ und λ alle Ideale des Körpers oder auch nur alle Ideale einer gewissen Klasse (bei verschiedenen Bedeutungen dieses Wortes) auftreten; übrigens werden meine früheren Untersuchungen [14]) über jene Reihen durch Einführung des Satzes (I) nicht vereinfacht, da es sich dort um mehr als den blossen Nachweis der Konvergenz der betreffenden Reihen handelt.

Ohne auf den Fall des algebraischen Zahlkörpers einzugehen, will ich hier nur unter Heranziehung des Satzes (I) ein Resultat herleiten, welches im § 21 (S. 201) der zweiten in Anm. 14 genannten Arbeit enthalten ist. Ich will nämlich, von der

---

[14]) Vergl. meine Arbeiten *Über die zahlentheoretische Funktion* $\mu(k)$ [Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXII (1903), Abt. IIa, S. 537-570] und *Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers* [Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1907), S. 145-204].

früher [15]) von mir bewiesenen Konvergenz der Reihe

$$(23) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mk+h)}{mk+h}$$

für jedes positive Wertepaar k, h ausgehend, die Tatsache [16]) herleiten, dass auch die Reihe

$$(24) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda(mk+h)}{mk+h}$$

konvergiert.

Es genügt, die Konvergenz von (24) für

$$(k, h) = 1$$

zu beweisen, da anderenfalls, wenn

$$(k, h) = d > 1$$

ist,

$$\frac{\lambda(mk+h)}{mk+h} = \frac{\lambda(d)}{d} \frac{\lambda\left(m\frac{k}{d}+\frac{h}{d}\right)}{m\frac{k}{d}+\frac{h}{d}}$$

ist, (24) also aus

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda\left(m\frac{k}{d}+\frac{h}{d}\right)}{m\frac{k}{d}+\frac{h}{d}}$$

durch Multiplikation aller Glieder mit $\frac{\lambda(d)}{d}$ entsteht.

Es sei also

$$(k, h) = 1.$$

Ferner darf

$$h < k$$

angenommen werden [17]). Da die Konvergenz von (23) für jedes Paar positiver Werte

[15]) *Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn* Kluyver: *Reeksen afgeleid uit de reeks* $\sum \frac{\mu(m)}{m}$ [Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Verslag van de Gewone Vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeeling, Bd. XIII (1904), S. 71-83].

[16]) Für diejenigen Leser, denen meine zweite in Anm. 14 genannte Arbeit bekannt ist, bemerke ich, dass diese Tatsache für $(k, h) = 1$ durch Spezialisierung aus der beim Beweise des Hauptsatzes 4 auftretenden Relation

$$L(x) = O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

folgt. Der Fall $(k, h) > 1$ erledigt sich alsdann unmittelbar wie im Text. Unter (u, v) verstehe ich den grössten gemeinsamen Teiler von u und v.

[17]) Sonst sind nur endlich viele Glieder der Reihe hinzuzufügen.

k und h als bewiesen angesehen wird, so konvergiert jede der $\varphi(k)$ Reihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mk+h')}{mk+h'},$$

wo h' eine unterhalb k gelegene und zu k teilerfremde Zahl bezeichnet. Diese Reihe werde in der Form geschrieben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}, \tag{25}$$

wo

$$b_n = \mu(n) \quad \text{für} \quad n \equiv h' \pmod{k},$$
$$b_n = 0 \quad \text{für} \quad n \not\equiv h' \pmod{k}$$

ist.

Es durchlaufe nun u_ν die zwischen 0 und k gelegenen, zu k teilerfremden Zahlen $[\nu = 1, 2, \ldots, \varphi(k)]$. Die absolut konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n},$$

in welcher

$$a_n = 1 \quad \text{für} \quad n = u^2, \qquad \text{wo} \quad u > 0 \quad \text{und} \quad u \equiv u_\nu \pmod{k},$$
$$a_n = 0 \quad \text{für alle anderen } n$$

ist, werde nach der DIRICHLET'schen Regel mit derjenigen Reihe (25) multipliziert, für welche h' durch die Kongruenz

$$u_\nu^2 h' \equiv h \pmod{k}$$

bestimmt ist. So entsteht die nach Satz (I) konvergente Reihe [18])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l|n} \frac{a_l}{l} \frac{\frac{b_{\frac{n}{l}}}{\frac{n}{l}}}{} = \sum_{n\equiv h} \frac{1}{n} \sum_{\substack{u\equiv u_\nu \\ u^2|n}} \mu\left(\frac{n}{u^2}\right).$$

Wird diese konvergente Reihe für alle $\varphi(k)$ Werte von u_ν, d.h. für $\nu=1, 2, \ldots, \varphi(k)$ angesetzt und wird die Summe dieser $\varphi(k)$ konvergenten Reihen gliedweise gebildet, so ergibt sich die Konvergenz von

$$\sum_{n\equiv h} \frac{1}{n} \sum_{u^2|n} \mu\left(\frac{n}{u^2}\right) = \sum_{n\equiv h} \frac{\lambda(n)}{n},$$

welche zu beweisen war.

3) Da von den Reihen (23) und (24) die Rede ist, so benutze ich die Gelegenheit zu einigen historischen Bemerkungen über dieselben. Es handelt sich dabei durchweg um ältere heuristische Wertbestimmungen in einigen Spezialfällen; der Konvergenzbeweis ist in keinem Spezialfall [19]) vor Herrn VON MANGOLDT erbracht worden und im allge-

---

[18]) $\sum\limits_{\substack{u\equiv u_\nu \\ u^2|n}}$ bedeutet, dass u alle positiven Zahlen durchläuft, welche $\equiv u_\nu \pmod{k}$ sind und deren Quadrat in n aufgeht. $\sum\limits_{n\equiv h}$ bedeutet, dass n alle positiven Zahlen $\equiv h \pmod{k}$ durchläuft.

[19]) Natürlich abgesehen von dem trivialen Fall, dass k und h einen quadratischen gemeinsamen Teiler > 1 haben, in welchem jedes Glied der Reihe (23) gleich 0 ist.

meinen Falle zuerst von mir; ich wurde durch Herrn KLUYVER's [20]) heuristische Behandlung von (23) dazu angeregt.

a) Dass die Gleichungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots = 0$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots = 0$$

mit unrichtiger Begründung schon bei EULER [21]) stehen, ist bekannt.

b) Ferner steht bei EULER [22]) die Gleichung

$$(26) \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \cdots = \frac{\pi}{2},$$

wo nach seinen Erläuterungen und seinem vermeintlichen Beweise die linke Seite in moderner Schreibweise die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n}$$

bedeutet, in welcher

$$\begin{aligned} \chi(n) &= 0 \quad && \text{für } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \chi(n) &= 1 \quad && \text{für } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \chi(n) &= -1 \quad && \text{für } n \equiv 3 \pmod{4} \end{aligned}$$

ist. Die Richtigkeit von (26) folgt erst aus der von mir bewiesenen Konvergenz der Reihe (24). Denn, wenn zuerst $k = 4$, $h = 1$, alsdann $k = 4$, $h = 3$ gesetzt und gliedweise substrahiert wird, so ergibt sich die von EULER vermutete Konvergenz von

$$\frac{\lambda(1)}{1} - \frac{\lambda(3)}{3} + \frac{\lambda(5)}{5} - \frac{\lambda(7)}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n}.$$

Nachdem die Konvergenz dieser Reihe auf der linken Seite von (26) festgestellt ist, folgt leicht, dass ihr Wert $= \frac{\pi}{2}$ ist, z.B. aus der für $s > 1$ giltigen Identität [23])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} - \cdots\right) = \prod_p \frac{1}{1 + \frac{\chi(p)}{p^s}}$$

$$= \prod_p \frac{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}{1 - \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}} = \frac{\prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)}{\prod_p' \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)} = \left(1 - \frac{1}{2^{2s}}\right) \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}},$$

---

[20]) *Reeksen afgeleid uit de reeks* $\sum \frac{\mu(m)}{m}$ [Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Verslag van de Gewone Vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeeling, Bd. XII (1903), S. 432-439].

[21]) *Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne, 1748), Bd. I, S. 229.

[22]) l. c., S. 244.

[23]) p durchläuft in $\prod_p$ alle Primzahlen, in $\prod_p'$ alle ungeraden Primzahlen.

indem man s zu 1 abnehmen lässt. Das CAHEN'sche [24]) Analogon zum ABEL'schen Stetigkeitssatz (für Potenzreihen) in der Theorie der DIRICHLET'schen Reihen — welches in dem hier vorliegenden Spezialfalle reeller Variabler $\left(\text{auch beim Reihentypus } \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}\right)$ schon durch Herrn DEDEKIND [25]) bekannt war — liefert nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n} = \lim_{s=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n^s} = \lim_{s=1} \left(1 - \frac{1}{2^{2s}}\right) \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}} = \frac{3}{4} \frac{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots} = \frac{3}{4} \frac{\frac{\pi^2}{6}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}.$$

Natürlich folgt aus meinem Satz über (24) für jedes k und jeden Charakter der Gruppe der zu k teilerfremden Restklassen die Konvergenz der Reihe [26])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n}.$$

Doch zurück zu EULER!

c) Durch DIRICHLET'sche Multiplikation der in der Form

$$(27) \quad 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} + 0 + \frac{1}{9} + 0 + \cdots = \frac{\pi}{2}$$

geschriebenen Gleichung (26) mit der absolut konvergenten Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{8} + 0 + 0 + \cdots = 2$$

folgt nach Satz (I) die weitere von EULER [27]) ohne richtigen Beweis ausgesprochene Gleichung

$$(28) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots = \pi,$$

in der links das Glied $\frac{1}{n}$ das Vorzeichen $\chi(u)\lambda(u)$ hat, wo u der grösste ungerade Teiler von n ist.

d) Ebenso ergibt sich aus (27) durch DIRICHLET'sche Multiplikation mit der absolut konvergenten Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{2}{3}$$

---

[24]) *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *de* RIEMANN *et sur des fonctions analogues* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III, Bd. XI (1894), S. 75-164], S. 86-87.

[25]) Vergl. die zweite Auflage (1871) der von ihm herausgegebenen und mit Zusätzen versehenen Vorlesungen DIRICHLET's über Zahlentheorie, S. 374.

[26]) Übrigens würde sich bei direkter Anwendung meiner analytischen Methoden die Konvergenz dieser Reihe auf etwas weniger langem Wege ergeben als die Konvergenz von (24).

[27]) l. c., S. 245.

die von EULER [28]) heuristisch hergeleitete Gleichung

$$(29)\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots=\frac{\pi}{3},$$

in der also links $\frac{1}{n}$ das Vorzeichen $(-1)^\rho\chi(u)\lambda(u)$ hat, falls $n=2^\rho u$ gesetzt wird, wo u ungerade ist.

e) Endlich folgt aus (28) durch DIRICHLET'sche Multiplikation mit der absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{3}{2},$$

wo

$$a_1=1,$$
$$a_{5^\rho}=2 \quad \text{für} \quad \rho\geqq 1,$$
$$a_n=0 \text{ für alle anderen } n$$

ist, die bei EULER [29]) unbewiesen stehende Gleichung

$$(30)\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{3\pi}{2},$$

deren linke Seite formal aus

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\left(1+\frac{1}{17}\right)\cdots}$$

entsteht, wo 2, 5 und die Primzahlen $4m+3$ das Minuszeichen, alle anderen Primzahlen das Pluszeichen haben.

Hiermit habe ich in allen bisher unerledigten Fällen gezeigt, dass EULER's Vermutungen in jenem berühmten fünfzehnten Kapitel « De seriebus ex evolutione factorum ortis » des ersten Bandes der *Introductio in analysin infinitorum* richtig sind; es freut mich besonders, im Andenken seines 200-jährigen Geburtstages [30]) dies gefunden zu haben. Der Vollständigkeit wegen bemerke ich, dass — abgesehen von 1) den schon bei EULER richtig abgeleiteten oder leicht beweisbaren Gleichungen, 2) den beiden erst 1897 durch Herrn VON MANGOLDT bewiesenen Gleichungen (21) und (22) [nebst einer unmittelbaren Folgerung [31]) aus (22)] und 3) den zuerst von mir bewiesenen Gleichungen (26), (28), (29) und (30) — die Konvergenz aller übrigen EULER'schen Reihen und Produkte aus jenem fünfzehnten Kapitel schon vor 33 Jahren durch eine klassi-

---

[28]) l. c., S. 245.

[29]) l. c., S. 246.

[30]) Der am 15. April dieses Jahres gefeiert wurde.

[31]) Es handelt sich um die Tatsache, dass die durch formales Ausmultiplizieren des Produktes $\prod_p \frac{1}{1\pm\frac{1}{p}}$, wo das Minuszeichen nur endlich vielen Primzahlen entspricht, entstehende Reihe konvergiert und $=0$ ist.

sche Arbeit von Herrn MERTENS [32]) bewiesen worden war; jene Konvergenz folgt nämlich durchweg aus der dort [33]) von Herrn MERTENS zuerst bewiesenen Konvergenz der den Fällen $k = 4$, $k = 3$ und $k = 8$ entsprechenden Reihen [34]).

$$(31) \qquad \sum_p \frac{\chi(p)}{p} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \cdots,$$

$$(32) \qquad \sum_p \frac{\chi(p)}{p} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \cdots$$

und

$$(33) \qquad \sum_p \frac{\chi(p)}{p} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \cdots,$$

und die Richtigkeit der betreffenden EULER'schen Relationen folgte hieraus in Verbindung mit der Tatsache, dass

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p} = \lim_{s=1} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$$

ist. Da Herr MERTENS die Konvergenz von

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p}$$

für jedes k und jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter bewiesen hat, so sind auch EULER's Andeutungen am Schlusse [35]) des Kap. 15 durch Herrn MERTENS gerechtfertigt: « Simili modo reliquæ series, quas supra pro expressione arcuum circularium invenimus, in factores transformari possunt, qui ex numeris primis constituantur ».

f) Bei MÖBIUS [36]) kommt — mit vermeintlichem, aber unrichtigem Beweis — die Gleichung

$$(34) \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \cdots = \frac{4}{\pi}$$

vor, in welcher die linke Seite die Reihe

$$(35) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n}$$

bezeichnet, wo $\chi(n)$ der ambige Charakter modulo 4 ist, d.h. den oben in N°. 3), *b*) erklärten Wert hat. Die Richtigkeit von (34) ergibt sich erst aus der von mir bewie-

---

32) *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXVIII (1874), S. 46-62].

33) l. c., S. 56 und 61.

34) In (31) und (32) bedeutet $\chi(n)$ den ambigen Charakter, in (33) einen der drei ambigen Charaktere.

35) S. 252.

36) *Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen* {[Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. IX (1832), S. 105-123], S. 123; *Gesammelte Werke*, Bd. IV (1887), S. 612}. In der vorletzten Zeile dieser Arbeit steht beidemal versehentlich $\frac{4}{\pi}$ statt $\frac{\pi}{4}$ bei der Erwähnung einer EULER'schen (jedoch erst später von Herrn MERTENS bewiesenen) Formel.

senen Konvergenz [37]) der zum Typus (23) gehörigen Reihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(4m+1)}{4m+1} \tag{36}$$

und

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(4m+3)}{4m+3}. \tag{37}$$

4) Ich wende mich jetzt zu einer Arbeit CESÀRO's [38]), deren zahlreiche — beim damaligen Stande der Wissenschaft meist unausfüllbare — Lücken ich sämtlich unter Anwendung des Satzes (I) und der von mir früher bewiesenen Konvergenz der Reihen (23) und (24) ausfüllen werde [39]); es handelt sich durchweg um dieselbe unerlaubte Vertauschung zweier Grenzübergänge, und es fehlt bei CESÀRO stets nur der Nachweis, dass die entstehenden Reihen konvergieren. Allerdings ist dies die hauptsächlichste für den vorliegenden Zweck zu überwindende Schwierigkeit.

a) CESÀRO [40]) beweist richtig, dass für $s > 1$

$$\frac{\lambda(1)}{1^s} - \frac{\lambda(3)}{3^s} + \frac{\lambda(5)}{5^s} - \cdots = \left(1 - \frac{1}{4^s}\right)\frac{\zeta(2s)}{L(s)}$$

ist, wo

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und

$$L(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

gesetzt ist, und schliesst daraus unerlaubter Weise, indem er $s = 1$ setzt [41]),

$$\frac{\lambda(1)}{1} - \frac{\lambda(3)}{3} + \frac{\lambda(5)}{5} - \frac{\lambda(7)}{7} + \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

Dies ist die schon oben von mir bewiesene Gleichung (26).

b) CESÀRO versteht unter $\omega(n)$ die Zahl 2^ρ, wenn $\rho = \rho(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n ist; er schliesst richtig [42]) für $s > 1$

$$\frac{\lambda(1)\omega(1)}{1^s} - \frac{\lambda(3)\omega(3)}{3^s} + \frac{\lambda(5)\omega(5)}{5^s} - \cdots = \left(1 - \frac{1}{4^s}\right)\frac{\zeta(2s)}{(L(s))^2}$$

---

[37]) Auch hier ist (vergl. Anm. 26) direkt die Konvergenz von (35) auf etwas weniger langem Wege beweisbar als die Konvergenz von (36) und (37). Die Anwendung des CAUCHY'schen Integralsatzes und der RIEMANN'schen Zetafunktion nebst verwandten Funktionen lässt sich beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaft nicht umgehen.

[38]) *Sur le rôle arithmétique de* $\sin\frac{\pi x}{2}$ [Annali di Matematica pura ed applicata, Ser. II, Bd. XIII (1885), S. 315-322]. Diese Arbeit ist auch in dem Sammelband *Excursions arithmétiques à l'infini* (Paris, Hermann, 1885) auf S. 81-88 abgedruckt.

[39]) Ich verändere CESÀRO's Bezeichnungen der Gleichmässigkeit wegen, indem ich s statt m, $\zeta(s)$ statt s_m, $L(s)$ statt σ_m schreibe.

[40]) l. c., S. 318 bezw. 84.

[41]) l. c., S. 319 bezw. 85.

[42]) l. c., S. 319 bezw. 85.

und daraus unerlaubter Weise

$$(38)\qquad \frac{\lambda(1)\omega(1)}{1}-\frac{\lambda(3)\omega(3)}{3}+\frac{\lambda(5)\omega(5)}{5}-\cdots=2\,.$$

Den fehlenden Konvergenzbeweis der Reihe auf der linken Seite von (38) kann ich folgendermassen erbringen und behandle dabei gleich den allgemeineren Fall, dass ich die Konvergenz der Reihe

$$(39)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lambda(n)\omega(n)}{n}$$

nachweisen werde, wo k beliebig und $\chi(n)$ ein beliebiger Charakter mod. k ist.

Nach einem von mir a.a.O. [43]) bewiesenen Satz ist

$$M(x)=\sum_{\substack{n\leqq x\\ n\equiv h}}\mu(n)=O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

Daraus folgt

$$\sum_{\substack{n=x+1\\ n\equiv h}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=\sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{M(n)-M(n-1)}{n}=\sum_{n=x+1}^{\infty}M(n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{M(x)}{x+1}$$

$$=O\sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{n}{\log^3 n}\,\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)=O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right),$$

also für jeden Charakter

$$\sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n}=O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right).$$

Wenn nun

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n}=S_x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n}=S$$

gesetzt wird, so ist

$$S_x=S+O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right);$$

wenn das formale Dirichlet'sche Produkt der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n}$$

mit sich selbst gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$$

gesetzt wird, d.h.

$$\beta_n=\sum_{l\mid n}\frac{\chi(l)\mu(l)}{l}\,\frac{\chi\left(\frac{n}{l}\right)\mu\left(\frac{n}{l}\right)}{\frac{n}{l}}=\frac{\chi(n)}{n}\sum_{l\mid n}\mu(l)\mu\left(\frac{n}{l}\right)$$

---

[43]) Vergl. die in Anm. 15 genannte Arbeit, S. 79.

ist, so ist

$$\sum_{n=1}^{x} \beta_n = 2\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} S_{\frac{x}{n}} - (S_{\sqrt{x}})^2 \text{ [44]}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} (S_{\frac{x}{n}} - S_{\sqrt{x}}) + (S_{\sqrt{x}})^2,$$

$$\sum_{n=1}^{x} \beta_n - (S_{\sqrt{x}})^2 = O\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{n}\frac{1}{\log^2(\sqrt{x})} = O\left(\frac{1}{\log^2 x}\sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{\log^2 x}\log x\right) = \{1\},$$

wo $\{f(x)\}$ zur Abkürzung eine Funktion von x bezeichnet, deren Quotient durch $f(x)$ für $x = \infty$ den Limes 0 hat, speziell also $\{1\}$ eine solche, welche selbst den Limes 0 hat. Es ist daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{x} \beta_n = \lim_{x=\infty} (S_{\sqrt{x}})^2 = S^2.$$

Die konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

werde nun nach der DIRICHLET'schen Regel mit der absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

multipliziert, wo

$$\alpha_n = \frac{\chi(n)}{n} \text{ für Quadratzahlen,}$$

$$\alpha_n = 0 \text{ für nicht quadratische } n$$

ist. So entsteht die nach Satz (I) konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n,$$

wo

$$\gamma_n = \sum_{l|n} \alpha_l \beta_{\frac{n}{l}} = \sum_{m^2|n} \frac{\chi(m^2)}{m^2} \frac{\chi\left(\frac{n}{m^2}\right)}{\frac{n}{m^2}} \sum_{l|\frac{n}{m^2}} \mu(l)\mu\left(\frac{n}{m^2 l}\right)$$

$$= \frac{\chi(n)}{n} \sum_{m^2|n} \sum_{l|\frac{n}{m^2}} \mu(l)\mu\left(\frac{n}{m^2 l}\right) = \frac{\chi(n)}{n} \sum_{l|n} \mu(l) \sum_{m^2|\frac{n}{l}} \mu\left(\frac{n}{m^2 l}\right) = \frac{\chi(n)}{n} \sum_{l|n} \mu(l)\lambda\left(\frac{n}{l}\right)$$

---

44) Diese wohlbekannte Identität

$$\sum_{lm\leqq x} \alpha_l \alpha_m = 2\sum_{l=1}^{\sqrt{x}} \alpha_l \sum_{m=1}^{\frac{x}{l}} \alpha_m - \left(\sum_{l=1}^{\sqrt{x}} \alpha_l\right)^2$$

steht für $\alpha_l = 1$ schon bei MEISSEL auf S. 8 bezw. 306 der *Observationes quaedam in theoria numerorum* [Berolini, typis A. G. Haynii, 1850 und Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XLVIII (1854), S. 301-316]. Letztere Gleichung pflegt mit Unrecht anderen Autoren zugeschrieben zu werden.

ist; die Summe

$$\sum_{l|n} \mu(l) \lambda\left(\frac{n}{l}\right)$$

besteht offenbar aus so vielen von Null verschiedenen und den Wert $\lambda(n)$ besitzenden Gliedern, als n quadratfreie Teiler besitzt. Daher ist, da $\omega(n)$ die Anzahl der quadratfreien Teiler von n angibt,

$$\gamma_n = \frac{\chi(n)\lambda(n)\omega(n)}{n},$$

und die Konvergenz der Reihe (39), also speziell die Richtigkeit der Gleichung (38) ist bewiesen.

c) CESÀRO stellt richtig [45]) fest, dass für $s > 2$

$$\frac{\varphi(1)}{1^s} - \frac{\varphi(3)}{3^s} + \frac{\varphi(5)}{5^s} - \frac{\varphi(7)}{7^s} + \cdots = \frac{L(s-1)}{L(s)}$$

ist, wo $\varphi(n)$ die EULER'sche Funktion bezeichnet. Seine ohne nähere Begründung unerlaubte Folgerung, dass

$$(40) \qquad \frac{\varphi(1)}{1^2} - \frac{\varphi(3)}{3^2} + \frac{\varphi(5)}{5^2} - \frac{\varphi(7)}{7^2} + \cdots = \frac{L(1)}{L(2)} = \frac{\pi}{4L(2)}$$

ist, werde ich durch den Nachweis rechtfertigen, dass allgemein für jedes k und jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\varphi(n)}{n^2}$$

konvergiert.

Diese Reihe ist nämlich das DIRICHLET'sche Produkt der konvergenten Reihe

$$(41) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$$

mit der absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^2};$$

in der Tat ist

$$\sum_{l|n} \frac{\chi(l)\mu(l)}{l^2} \frac{\chi\left(\frac{n}{l}\right)}{\frac{n}{l}} = \frac{\chi(n)}{n} \sum_{l|n} \frac{\mu(l)}{l} = \frac{\chi(n)}{n} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{\chi(n)\varphi(n)}{n^2}.$$

Von den hier bisher behandelten CESÀRO'schen Gleichungen ist (40) die einzige, bei welcher CESÀRO selbst den Beweis der Richtigkeit hätte führen können; denn die Konvergenz von (41) ist ja trivial, sodass keine neueren transzendenten Hilfsmittel herangezogen wurden. Übrigens ergibt sich auf diesem Wege unmittelbar für $s > 1$

$$\frac{L(s-1)}{L(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{s-1}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\varphi(n)}{n^s}.$$

---

45) l. c., S. 319 bezw. 85.

Dagegen ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\varphi(n)}{n}$$

offenbar divergent, obgleich

$$\lim_{s=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\varphi(n)}{n^s}$$

existiert. CESÀRO hat also mit richtigem Gefühl die unerlaubte Schlussweise nur in solchen Fällen angewandt, in denen sich das Resultat später als wahr ergeben hat.

d) Aus der für $s > 1$ giltigen Gleichung

$$\frac{\omega(1)}{1^s} - \frac{\omega(3)}{3^s} + \frac{\omega(5)}{5^s} - \cdots = \frac{4^s (L(s))^2}{(4^s - 1)\zeta(2s)}$$

schliesst CESÀRO [46]) ungerechtfertigter Weise, dass

$$\frac{\omega(1)}{1} - \frac{\omega(3)}{3} + \frac{\omega(5)}{5} - \cdots = \frac{1}{2}$$

sei. Diese Gleichung beweise ich, indem ich allgemein die Konvergenz von

$$(42) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\omega(n)}{n}$$

für jedes k und jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter folgendermassen feststelle.

Ich zeige zunächst, dass das DIRICHLET'sche Quadrat

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

konvergiert. Dies folgt zwar nicht aus dem Satz (I), aber, wenn

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\chi(n)}{n} = R_x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} = R$$

gesetzt wird, mit Leichtigkeit aus der bekannten Restabschätzung

$$R - R_x = \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

durch die Schlüsse:

$$\sum_{n=1}^{x} \beta_n = 2 \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{n} R_{\frac{x}{n}} - (R_{\sqrt{x}})^2,$$

$$\sum_{n=1}^{x} \beta_n - (R_{\sqrt{x}})^2 = 2 \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{n} (R_{\frac{x}{n}} - R_{\sqrt{x}}) = O \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x}} = \{1\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = R^2.$$

---

46) l. c., S. 319 bezw. 85.

Nun ist

$$\beta_n = \sum_{l \mid n} \frac{\chi(l)}{l} \frac{\chi\left(\frac{n}{l}\right)}{\frac{n}{l}} = \frac{\chi(n)}{n} T(n),$$

wo $T(n)$ die Anzahl der Teiler von n bezeichnet. Wenn daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

mit der absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

multipliziert wird, wo

$$\alpha_{l^2} = \frac{\chi(l^2)\mu(l)}{l^2},$$

$$\alpha_n = 0 \text{ für nicht quadratische } n$$

ist, so ergibt sich wegen

$$\sum_{l \mid n} \alpha_l \beta_{\frac{n}{l}} = \sum_{l^2 \mid n} \frac{\chi(l^2)\mu(l)}{l^2} \frac{\chi\left(\frac{n}{l^2}\right)}{\frac{n}{l^2}} T\left(\frac{n}{l^2}\right) = \frac{\chi(n)}{n} \sum_{l^2 \mid n} \mu(l) T\left(\frac{n}{l^2}\right) = \frac{\chi(n)\omega(n)}{n}$$

die Konvergenz [47]) der Reihe (42) und die Gleichung

$$\frac{\omega(1)}{1} - \frac{\omega(3)}{3} + \frac{\omega(5)}{5} - \cdots = \frac{1}{2}.$$

e) CESÀRO bestimmt ferner [48]) auf heuristischem Wege mit richtigem Endresultat die Werte der Reihen

$$\frac{\lambda(1)}{1} - \frac{\lambda(4)}{4} + \frac{\lambda(6)}{6} - \frac{\lambda(9)}{9} + \frac{\lambda(11)}{11} - \frac{\lambda(14)}{14} + \cdots,$$

$$\frac{\lambda(2)}{2} - \frac{\lambda(3)}{3} + \frac{\lambda(7)}{7} - \frac{\lambda(8)}{8} + \frac{\lambda(12)}{12} - \frac{\lambda(13)}{13} + \cdots,$$

$$\frac{\mu(1)}{1} - \frac{\mu(4)}{4} + \frac{\mu(6)}{6} - \frac{\mu(9)}{9} + \frac{\mu(11)}{11} - \frac{\mu(14)}{14} + \cdots$$

und

$$\frac{\mu(2)}{2} - \frac{\mu(3)}{3} + \frac{\mu(7)}{7} - \frac{\mu(8)}{8} + \frac{\mu(12)}{12} - \frac{\mu(13)}{13} + \cdots,$$

deren Konvergenz zuerst durch meine Behandlung von (23) und (24) bewiesen wurde;

---

47) Aus dem hier später in § 3 erwähnten STIELTJES'schen Satz (IV) folgt übrigens die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\omega(n)}{n^s}$$

für $s > \frac{1}{2}$.

48) l. c., S. 321 bezw. 87.

die Verteilung der Plus- und Minuszeichen in jenen vier Reihen ist ja durch arithmetische Progressionen modulo 5 bestimmt. Jedenfalls hatte CESÀRO einige der von Herrn KLUYVER [49]) später gleichfalls heuristisch erhaltenen Relationen schon besessen.

f) Für CESÀRO's Formeln [50])

$$\frac{\omega(1)}{1}-\frac{\omega(4)}{4}+\frac{\omega(6)}{6}-\frac{\omega(9)}{9}+\frac{\omega(11)}{11}-\frac{\omega(14)}{14}+\cdots=1 \tag{43}$$

und

$$\frac{\omega(2)}{2}-\frac{\omega(3)}{3}+\frac{\omega(7)}{7}-\frac{\omega(8)}{8}+\frac{\omega(12)}{12}-\frac{\omega(13)}{13}+\cdots=\frac{1}{2} \tag{44}$$

folgt der fehlende Konvergenzbeweis der linken Seiten leicht aus der oben bewiesenen Konvergenz von (42); denn für $k=5$ und den Charakter

$$\chi(n)=0,\ 1,\ i,\ -i,\ -1 \quad \text{für} \quad n\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \pmod{5}$$

ergibt sich die Konvergenz von

$$\frac{\omega(1)}{1}+i\frac{\omega(2)}{2}-i\frac{\omega(3)}{3}-\frac{\omega(4)}{4}+\frac{\omega(6)}{6}+i\frac{\omega(7)}{7}-i\frac{\omega(8)}{8}-\frac{\omega(9)}{9}+\cdots$$

und damit der linken Seiten von (43) und (44).

g) Nur für zwei in der vorliegenden Arbeit CESÀRO's vorkommende unendliche Reihen vermag ich die Konvergenz für CESÀRO's Gliederanordnung nicht zu beweisen und auch nicht zu widerlegen; jedoch entspricht jene Anordnung offenbar nicht dem, was CESÀRO hat sagen wollen, und bei der natürlichen Anordnung der in Betracht kommenden Doppelsummen — nämlich nach wachsenden Werten des Nenners — kann ich jene Konvergenz beweisen. Der Wert der Reihen ist allerdings ein anderer als bei CESÀRO; doch liegt bei ihm nur ein Rechenfehler [51]) vor, der sich durch einige Formeln zieht und leicht beseitigt werden kann. CESÀRO stellt eine für $s>1$ giltige Identität [52]) für die dort absolut konvergente Doppelreihe

$$\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{\lambda(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^s}$$

auf, welche in berichtigter Form

$$\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{\lambda(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^s}=\left(1-\frac{1}{4^s}\right)\frac{(\zeta(2s))^2}{\zeta(s)L(s)}-\zeta(2s) \tag{45}$$

lautet, und berechnet daraus durch vermeintlichen Grenzübergang einen Wert für

$$\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{\lambda(x^2+y^2)}{x^2+y^2}. \tag{46}$$

---

49) Vergl. die in Anm. 20 genannte Arbeit, S. 438-439.

50) l. c., S. 321 bezw. 87.

51) In der von ihm mit (4) bezeichneten Formel auf S. 316 bezw. 82 muss $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n^2)}{n^{2m}}$ statt $s_{2m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)}{n^{2m}}$ stehn. Dies Versehen zieht sich bis zur Mitte der S. 318 bezw. 84 hin.

52) l. c., S. 317 bezw. 83.

Diese Schreibweise verlangt, erst nach y, dann nach x zu summieren, und in diesem Sinne vermag ich nicht zu entscheiden, ob der Ausdruck (46) konvergiert oder nicht. Ich will jedoch die Behauptung von CESÀRO — der offenbar nicht beachtet hat, dass es auf die Reihenfolge der Glieder ankommt — so interpretieren, dass die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n) f(n)}{n} \tag{47}$$

bewiesen werden soll, wo $f(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n in zwei positive Quadrate ist; dies kann ich beweisen, und damit ist dann auch die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{x,y} \frac{\lambda(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

bewiesen, wenn die Wertepaare x, y nach wachsendem x^2+y^2 geordnet sind und die Reihenfolge der Wertepaare mit gleicher Quadratsumme unerheblich ist; denn die Summe der absoluten Beträge der Glieder, in welchen $x^2+y^2=n$ ist, hat offenbar für $n=\infty$ den Grenzwert 0.

Bekanntlich ist $f(n)$ für nichtquadratische n gleich dem Überschuss der Anzahl der Teiler $4\nu+1$ von n über die Anzahl der Teiler $4\nu+3$ von n, für quadratische n um 1 kleiner; daher ist für $s>1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n) f(n)}{n^s} \\
&= \left(\frac{\lambda(1)}{1^s}+\frac{\lambda(2)}{2^s}+\frac{\lambda(3)}{3^s}+\cdots\right)\left(\frac{\lambda(1)}{1^s}-\frac{\lambda(3)}{3^s}+\frac{\lambda(5)}{5^s}-\cdots\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n^2)}{n^{2s}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lambda(n)}{n^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}} \\
&= \frac{\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)}{\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)\prod_p\left(1-\frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}\right)}-\zeta(2s),
\end{aligned} \tag{48}$$

womit (45) bewiesen ist. Man sieht, dass ich für den Konvergenzbeweis von (47) nur nötig habe, die DIRICHLET'sche Multiplikation der beiden bedingt konvergenten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n}=0$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lambda(n)}{n}$$

zu rechtfertigen. Da nach meinen früheren Untersuchungen [53])

53) Die in der Anm. 16 genannte Formel enthält dies und es folgt auch ohne Schwierigkeit aus meiner früheren Relation

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv h}} \mu(n) = O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv h}} \lambda(n) = O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

ist, so ist, wenn

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\lambda(n)}{n} = R_x,$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n} = S_x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n} = S,$$

$$c_n = \sum_{l|n} \lambda(l)\chi\left(\frac{n}{l}\right)\lambda\left(\frac{n}{l}\right) = \lambda(n)\sum_{l|n}\chi\left(\frac{n}{l}\right) = \lambda(n)\sum_{l|n}\chi(l)$$

gesetzt wird,

$$R_x = O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right),$$

$$S_x - S = O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right),$$

folglich

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{c_n}{n} = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\lambda(n)}{n} S_{\frac{x}{n}} + \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n} R_{\frac{x}{n}} - R_{\sqrt{x}} S_{\sqrt{x}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\lambda(n)}{n}(S_{\frac{x}{n}} - S) + \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n} R_{\frac{x}{n}} - R_{\sqrt{x}} S_{\sqrt{x}} + R_{\sqrt{x}} S$$

$$= O\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{n} \frac{1}{\log^2(\sqrt{x})} + O\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{n} \frac{1}{\log^2(\sqrt{x})} + \{1\} + \{1\}$$

$$= O\left(\frac{\log x}{\log^2 x}\right) + \{1\} = \{1\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} = 0.$$

Aus (48) folgt also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n) f(n)}{n} = -\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Analog beweise ich die von CESÀRO [54]) stillschweigend vorausgesetzte Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n) f(n) \log n}{n}$$

folgendermassen. Für $s > 1$ ist nach (48)

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n) f(n) \log n}{n^s}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)\log n}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)\log n}{n^s} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{2s}},$$

54) l. c., S. 317 bezw. 83.

und die Aufgabe besteht lediglich darin, die DIRICHLET'sche Multiplikation von

(49) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)\log n}{n}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lambda(n)}{n}$$

und

(50) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lambda(n)\log n}{n}$$

zu rechtfertigen. Nach der früher von mir bewiesenen Relation [55])

$$\sum_{\substack{n\leqq x\\ n\equiv h}}\lambda(n)=O\left(\frac{x}{\log^4 x}\right)$$

konvergieren die vier in (49) und (50) auftretenden Reihen so stark, dass

$$\sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{\lambda(n)\log n}{n}=O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right),$$

$$\sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lambda(n)}{n}=O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right),$$

$$\sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n}=O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right),$$

$$\sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lambda(n)\log n}{n}=O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)$$

ist. Wird

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{\lambda(n)\log n}{n}=T_x,$$

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{\chi(n)\lambda(n)}{n}=U_x,$$

$$d_n=\sum_{l\mid n}\lambda(l)\log l\,\chi\left(\frac{n}{l}\right)\lambda\left(\frac{n}{l}\right)$$

gesetzt, so ist also

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{d_n}{n}=\sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\frac{\lambda(n)\log n}{n}U_{\frac{x}{n}}+\sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\frac{\chi(n)\lambda(n)}{n}T_{\frac{x}{n}}-T_{\sqrt{x}}U_{\sqrt{x}},$$

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{d_n}{n}-T_{\sqrt{x}}U_{\sqrt{x}}=\sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\frac{\lambda(n)\log n}{n}(U_{\frac{x}{n}}-U_{\sqrt{x}})+\sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\frac{\chi(n)\lambda(n)}{n}(T_{\frac{x}{n}}-T_{\sqrt{x}})$$

$$=O\sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\frac{\log n}{n}\frac{1}{\log^3(\sqrt{x})}+O\sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{n}\frac{1}{\log^2(\sqrt{x})}=O\left(\frac{\log^2 x}{\log^3 x}\right)+O\left(\frac{\log x}{\log^2 x}\right)=\{1\}.$$

Damit ist die DIRICHLET'sche Multiplikation in (49) gerechtfertigt, und für (50) ergibt

---

55) Vergl. Anm. 16 und 53. Es ist sogar für jedes m auf Grund meiner früheren Untersuchungen

$$\sum_{\substack{n\leqq x\\ n\equiv h}}\lambda(n)=O\left(\frac{x}{\log^m x}\right).$$

sie sich wörtlich ebenso. Die Wertbestimmung liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)f(n)\log n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)\log n}{n}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lambda(n)}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lambda(n)\log n}{n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}$$
$$=-\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi}{2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}=-\frac{\pi^3}{12}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}.$$

Die vorangehenden Bemerkungen in diesem Paragraphen waren durch den STIELTJES'schen Satz (I) veranlasst; derselbe war nicht imstande, die Hauptschwierigkeiten der betreffenden Konvergenzbeweise zu beseitigen, sondern nur einige Rechnungen zu vereinfachen.

5) Meine ausführlichen Ergänzungen zu CESÀRO's Arbeit, welche fast durchweg die Richtigkeit seiner Vermutungen ergaben, seien ein Tribut der Dankbarkeit für die vielen Anregungen, die ich namentlich in der analytischen Zahlentheorie den Abhandlungen dieses hervorragenden Mathematikers verdanke, dessen früher Tod von der wissenschaftlichen Welt betrauert wird. Auf die Resultate in seinem Werke [56] « *Excursions arithmétiques à l'infini* », dem ich jenen Stoff entnommen habe, hatte CESÀRO stets grosses Gewicht gelegt, wie in dem schönen Nachrufe hervorgehoben ist, den ihm Herr ALASIA [57] gewidmet hat. Wenn CESÀRO auch in seinen ersten Arbeiten — und die *Excursions arithmétiques* fallen in die erste Periode seines Schaffens — noch unstrenge Methoden häufig angewendet hat (oft mit ausdrücklicher Betonung ihrer Unzulänglichkeit) [58], so war er doch später als Meister der exakten Forschung bekannt, und die Wissenschaft verdankt ihm viele allgemeine Grenzwertsätze. Aber neue allgemeine Grenzwertsätze werden nur in den seltensten Fällen dazu beitragen können, die ganz besonderen Schwierigkeiten zu überwinden, welche die Primzahltheorie geboten hat, und obgleich CESÀRO auch in der Zahlentheorie sehr viel geleistet hat, so hat er doch aus dem angegebenen Grunde in der Primzahltheorie keinen wesentlichen Fortschritt gemacht. In dem Nachruf der « Revue générale des sciences pures et appliquées » [59], dessen warmer Ton mich sehr sympathisch berührt, werden CESÀRO mit folgenden Worten gerade in der Primzahltheorie Verdienste zugeschrieben, die ihm nicht zukommen und die er auch garnicht für sich in Anspruch genommen hat: « Le jeune géomètre porta son attention sur la théorie des nombres et les lois asymptotiques si cachées auxquelles elles conduit : avant tout, sur la plus mystérieuse de toutes, la distribution des nombres premiers. TCHEBYCHEFF avait publié ses célèbres travaux sur cette question et obtenu, par sa puissante méthode, une expression approchée du produit des nombres premiers inférieurs à une quantité quelconque donnée. Mais il n'avait pas poursuivi jusqu'au bout

---

56) Vergl. Anm. 38.

57) ERNEST CESÀRO, *1859-1906* [L'Enseignement Mathématique, Bd. IX (1907), S. 5-23], S. 12.

58) Z. B. geht seiner Arbeit *Sull'uso dell'integrazione in alcune questioni d'aritmetica* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. I (1887), S. 293-298], in welcher er auf unrichtigem Wege zu den Gleichungen (21) und (22) gelangt, das von Herrn J. TANNERY stammende Motto voran : « Même en mathématiques c'est souvent par des chemins peu sûrs qu'on va à la découverte ».

59) Bd. XVIII (1907), S. 129-130.

les conséquences de sa découverte; beaucoup de questions relatives à ce sujet restaient à élucider, beaucoup de résultats à préciser. C'est à cette tâche que se voua surtout CESÀRO. C'est ainsi qu'il put resserrer notablement les limites indiquées par le géomètre russe: la formule d'approximation qu'il proposa, pour la substituer à celle de TCHEBYCHEFF, ne le cède en exactitude qu'à une seule autre, celle que fournissent les profondes méthodes de RIEMANN. C'est ainsi également qu'il parvint à démontrer l'expression obtenue empiriquement par PERVOUCHINE, pour le $n^{\text{ème}}$ nombre premier, et qu'on lui doit une évaluation asymptotique pour les produits si intéressants que l'on obtient en multipliant entre eux les facteurs de la forme $1 - \frac{1}{p}$ (où les p sont les nombres premiers consécutifs) et auxquels conduit naturellement l'étude de la fonction $\zeta(s)$ pour $s = 1$ ». Hiergegen wende ich folgendes ein.

a) TSCHEBYSCHEF's Hauptresultate über die Verteilung der Primzahlen liegen in den beiden Sätzen:

« Wenn $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet, so gibt es für jedes $\alpha > 0$ und jedes n unendlich viele ganze Zahlen, für welche

$$\pi(x) > \int_2^x \frac{du}{\log u} - \frac{\alpha x}{\log^n x}$$

ist, und unendlich viele ganze Zahlen, für welche

$$\pi(x) < \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{\alpha x}{\log^n x}$$

ist » [60]).

« Es giebt zwei positive Konstanten A, B, so dass für alle $x \geqq 2$

$$A\frac{x}{\log x} < \pi(x) < B\frac{x}{\log x}$$

ist » [61]).

Aus dem ersteren Satz zog TSCHEBYSCHEF u. a. die Folgerung:

« Wenn die durch die Gleichung

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x + \varepsilon(x)} \tag{51}$$

definierte Funktion $\varepsilon(x)$ für $x = \infty$ einen Grenzwert besitzt, so ist derselbe -1 » [62]).

---

[60]) Dies ist der « IIème théorème » in TSCHEBYSCHEF's Abhandlung *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée* [Mémoires présentés à l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg par divers savants, Bd. VI (1851); Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. I, Bd. XVII (1852); *Œuvres*, Bd. I (1899)].

[61]) Dies Ergebnis liegt im § 9 von TSCHEBYSCHEF's *Mémoire sur les nombres premiers* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. I, Bd. XVII (1852); Mémoires présentés à l'Academie Impériale de St.-Pétersbourg par divers savants, Bd. VII (1854); *Œuvres*, Bd. I (1899)].

[62]) Vergl. S. 148 bezw. S. 352 bezw. S. 38 der in Anm. 60 genannten Arbeit.

In diesem Sinne ist TSCHEBYSCHEF's Näherungsformel

$$\frac{x}{\log x - 1}$$

für $\pi(x)$ zu verstehen.

In demselben Sinne stellte CESÀRO [63]) für $\pi(x)$ die Näherungsformel

$$(52) \qquad \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3}{\log^2 x}}$$

fest, auf welche der Verfasser des Nachrufs in dem Satze: « c'est ainsi qu'il . . . RIEMANN » anspielt; d.h. CESÀRO bewies auf neuem Wege die Tatsache, welche bereits aus TSCHEBYSCHEF's oben an erster Stelle genanntem Satz unmittelbar folgt, dass die durch die Gleichung

$$(53) \qquad \pi(x) = \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} + \frac{\delta(x)}{\log^2 x}}$$

definierte Funktion $\delta(x)$ sich für $x = \infty$ keinem von -3 verschiedenen Grenzwert nähern kann. Es ist also unrichtig, dass CESÀRO eine bessere Formel als TSCHEBYSCHEF gefunden habe; TSCHEBYSCHEF bewies [64]) sogar als Folgerung seines Satzes ausdrücklich, dass die durch

$$(54) \qquad \pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{1!x}{\log^2 x} + \frac{2!x}{\log^3 x} + \cdots + \frac{(n-2)!x}{\log^{n-1} x} + \frac{\eta(x)x}{\log^n x}$$

definierte Funktion $\eta(x)$ für $x = \infty$ keinen anderen Grenzwert als $(n-1)!$ haben kann, worin für $n = 4$ CESÀRO's Resultat unmittelbar enthalten ist.

b) Auch die Bemerkung, dass nur die RIEMANN'sche Primzahlformel besser als die CESÀRO'sche sei, ist falsch. Denn durch Anwendung der TSCHEBYSCHEF'schen Gleichung (54) auf die Werte $= 5, 6, 7, \ldots$ ergeben sich unendlich viele Näherungsformeln, deren jede besser ist als die vorige und deren erste besser als die CESÀRO'sche (52) ist. Die bei diesen Formeln auftretenden Zahlenkoeffizienten hat Herr AJELLO [65]) näher untersucht und bei diesen leichten Folgerungen, die sich (wie er auch erwähnt) schon aus TSCHEBYSCHEF's Untersuchungen ergeben, keine prinzipielle Schwierigkeit angetroffen. Übrigens hat CESÀRO [66]) selbst auf diese Kette von Formeln, deren jede besser als die vorige ist, ohne Ausführung jener Zahlenrechnungen aufmerksam gemacht und garnicht geglaubt, mehr bewiesen zu haben, als TSCHEBYSCHEF bekannt war.

c) PERVOUCHINE war empirisch zu einer Näherungsformel für die $n$te Primzahl p_n

---

[63]) *Nuova contribuzione ai principii fondamentali dell'aritmetica assintotica* [Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Serie II, Bd. VI (1894), No. 11, S. 1-23], S. 23.

[64]) l. c., S. 152 bezw. S. 358 bezw. S. 43.

[65]) *Sul numero dei numeri primi inferiori ad un dato limite* [Giornale di Matematiche, Bd. XXXIV (1896), S. 14-20].

[66]) l. c., S. 23.

gelangt. CESÀRO [67]) bewies nicht diese Näherungsformel, wie in dem obigen Zitat steht; sondern er zeigte, dass, wenn es für p_n einen bis zu der Ordnung $\frac{n}{\log^2 n}$ (einschliesslich) genauen Ausdruck gibt, dies nur der Ausdruck

$$(55)\quad n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + 11}{2(\log n)^2}\right)$$

sein kann, welcher nicht mit dem PERVOUCHINE'schen übereinstimmt. CESÀRO bewies aber nicht etwa, dass der Ausdruck (55) wirklich mit einem Fehler, dessen Quotient durch $\frac{n}{\log^2 n}$ für $n = \infty$ den Limes 0 hat, gleich p_n ist. Diese Tatsache, sowie die Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = -1$$

und die Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \delta(x) = -3$$

für die durch (51) und (53) definierten Funktionen $\varepsilon(x)$ und $\delta(x)$ ergab sich erst aus einer neueren bahnbrechenden Arbeit von Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN [68]), welcher den Satz

$$(56)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{\log^n x}{x}\left(\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u}\right) = 0$$

bewies. Hätte CESÀRO die PERVOUCHINE'sche Formel in ihrer ursprünglichen Form oder ihrer berichtigten Form (55) bewiesen, so würde daraus u. a. leicht

$$(57)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{\sum_{p \leqq x} \log p}{x} = 1$$

und

$$(58)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

folgen; diese beiden Sätze (57) und (58) [welche weniger besagen als (56)] sind auch erst von den Herren HADAMARD [69]) und DE LA VALLÉE POUSSIN [70]) bewiesen worden.

d) Zum Schlusssatz « on lui doit etc. » bemerke ich, dass CESÀRO an der betreffenden Stelle [71]) mit seiner Methode weniger erhält, als schon bekannt war. Herr

---

[67]) *Sur une formule empirique de M.* PERVOUCHINE [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXIX (1894), S. 848-849].

[68]) *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *de* RIEMANN *et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée* [Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique, Bd. LIX (1899), S. 1-74].

[69]) *Sur la distribution des zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *et ses conséquences arithmétiques* [Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. XXIV (1896), S. 199-220].

[70]) *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers* [Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Bd. XX, Teil II (1896)], S. 183-256 und S. 360-361.

[71]) Vergl. die in Anm. 63 zitierte Arbeit, S. 20-21.

MERTENS [72]) (den CESÀRO auch zitiert) hatte u. a. bewiesen, dass

$$\lim_{x=\infty} \log x \prod_{p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = e^{-C} \tag{59}$$

ist, wo C die EULER'sche Konstante bezeichnet. CESÀRO's Schlüsse beweisen nur: wenn

$$\lim_{x=\infty} \log x \prod_{p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

existiert, so ist dieser Grenzwert $= e^{-C}$; sie führen also nicht zur Gleichung (59).

§ 3.

Beweis einiger Sätze von Stieltjes über die Multiplikation konvergenter Reihen nach der Dirichlet'schen Regel.

Aus der absoluten Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

und der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

folgt nach Satz (I) die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n,$$

wo

$$\gamma_n = \sum_{l | n} \alpha_l \, \beta_{\frac{n}{l}}$$

ist.

Es seien nun die beiden DIRICHLET'schen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \tag{2}$$

für $s > \sigma$ konvergent. Dann sind (1) und (2) bekanntlich für $s > \sigma + 1$ absolut konvergent; denn für $s > \sigma + 1$ sind, wenn p zwischen σ (exkl.) und $s - 1$ (exkl.) gewählt wird,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}$$

---

[72]) Vergl. die in Anm. 32 zitierte Arbeit, S. 53.

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^p}$$

konvergent, sodass

$$\lim_{n=\infty} \frac{|a_n|}{n^p} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{|b_n|}{n^p} = 0$$

ist, woraus die absolute Konvergenz von (1) und (2) folgt.

Es ist also, wenn

$$c_n = \sum_{l|n} a_l b_{\frac{n}{l}}$$

gesetzt wird,

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

für $s > \sigma + 1$ konvergent, und der Satz (I) würde nicht mehr ergeben. Die Konvergenzabszisse von (3) ist also höchstens um 1 grösser als die grössere der beiden Konvergenzabszissen von (1) und (2).

Nun hat STIELTJES ohne Beweis im Jahre 1885 [73]) den Satz (III) und im Jahre 1887 [74]) die Sätze (IV) und (V) ausgesprochen, von denen (III) in (V) enthalten ist. Ich will diese drei Sätze beweisen und zweifle übrigens nicht daran, dass die Beweise, welche STIELTJES besessen und nur nicht publiziert hat, richtig waren. Die Sätze lauten:

(III): *Wenn* (1) *und* (2) *für* $s = \rho$ *konvergieren, für* $s = \rho + \tau$ (*wo* $\tau \geqq 0$ *ist*) *absolut konvergieren, so konvergiert* (3) *für* $s = \rho + \frac{\tau}{2}$.

(IV): *Wenn* (1) *und* (2) *für* $s = \rho$ *konvergieren, so konvergiert* (3) *für* $s = \rho + \frac{1}{2}$.

(V): *Wenn* (1) *und* (2) *für* $s = \rho$ *konvergieren,* (1) *für* $s = \rho + \tau$ (*wo* $\tau \geqq 0$ *ist*) *absolut konvergiert und* (2) *für* $s = \rho + \tau'$ (*wo* $\tau' \geqq 0$ *und* $\tau + \tau' > 0$ *ist*) *absolut konvergiert, so ist* (3) *für* $s = \rho + \frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'}$ *konvergent.*

(III) ist für $\tau = 0$ trivial, für $\tau > 0$ zu beweisen. (IV) besagt, dass die Konvergenzabszisse von (3) unter allen Umständen höchstens um $\frac{1}{2}$ grösser ist, als die grössere der beiden Konvergenzabszissen von (1) und (2). (IV) ist nicht etwa als Spezialfall $\tau = 1$ in (III) enthalten; denn aus der Konvergenz der Reihen (1) und (2) für $s = \rho$ folgt nicht ihre absolute Konvergenz für $s = \rho + 1$. (V) ist für $\tau = 0$, $\tau' > 0$ oder $\tau > 0$, $\tau' = 0$ der Satz (I) und für $\tau > 0$, $\tau' > 0$ zu beweisen. (V) enthält für $\tau = \tau'$ den Satz (III).

---

73) *Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CI (1885), S. 368-370], S. 369.

74) Vergl. die in Anm. 7 zitierte Arbeit, S. 215.

Ich habe also nur (IV) und für $\tau > 0$, $\tau' > 0$ (V) zu beweisen.

Beweis von (IV): Es werde

$$\frac{a_n}{n^\rho} = \alpha_n,$$

$$\frac{b_n}{n^\rho} = \beta_n,$$

$$\sum_{l|n} \alpha_l \beta_{\frac{n}{l}} = \gamma_n$$

gesetzt. Dann ist die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} \tag{60}$$

zu beweisen, wenn diejenige von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

vorausgesetzt wird.

Es werde noch

$$\sum_{n=1}^{x} \alpha_n = A_x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = A$$

gesetzt; dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}$$

und zwar ist

$$\sum_{n=x}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(A_n - A) - (A_{n-1} - A)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=x}^{\infty} (A_n - A)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \frac{A_{x-1} - A}{\sqrt{x}}$$

$$= \left\{\sum_{n=x}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\} + \left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\};$$

ebenso ergibt sich

$$\sum_{n=x}^{\infty} \frac{\beta_n}{\sqrt{n}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}.$$

Nun ist

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{\beta_m}{\sqrt{m}} + \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\beta_n}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{\alpha_m}{\sqrt{m}} - \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\beta_n}{\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\beta_n}{\sqrt{n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \left(\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{\beta_m}{\sqrt{m}} - \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{\beta_m}{\sqrt{m}}\right) + \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\beta_n}{\sqrt{n}} \left(\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{\alpha_m}{\sqrt{m}} - \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{\alpha_m}{\sqrt{m}}\right)$$

$$= \left\{\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{|\alpha_n|}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right\} + \left\{\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{|\beta_n|}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} + \left\{\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} = \{1\} + \{1\} = \{1\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{\sqrt{n}},$$

womit die Konvergenz von (60), also der Satz (IV) bewiesen ist.

Beweis von (V): Wenn

$$\frac{a_n}{n^\rho}=\alpha_n,$$

$$\frac{b_n}{n^\rho}=\beta_n,$$

$$\gamma_n=\sum_{l\mid n}\alpha_l\beta_{\frac{n}{l}}$$

gesetzt wird, so sind nach Voraussetzung die vier Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|}{n^\tau}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\beta_n|}{n^{\tau'}}$$

konvergent; zu beweisen ist die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}.$$

Es ist

$$\sum_{n=1}^{x}|\alpha_n|=\sum_{n=1}^{x}\frac{|\alpha_n|}{n^\tau}n^\tau\leqq x^\tau\sum_{n=1}^{x}\frac{|\alpha_n|}{n^\tau}=O(x^\tau),$$

ebenso

$$\sum_{n=1}^{x}|\beta_n|=O(x^{\tau'}),$$

ferner, wenn

$$\sum_{n=1}^{x}\alpha_n=A_x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=A$$

gesetzt wird,

$$\sum_{n=x}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}=\sum_{n=x}^{\infty}\frac{(A_n-A)-(A_{n-1}-A)}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}$$

$$=\sum_{n=x}^{\infty}(A_n-A)\left(\frac{1}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}-\frac{1}{(n+1)^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}\right)-\frac{A_{x-1}-A}{x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}=\left\{\frac{1}{x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}\right\}$$

und ebenso

$$\sum_{n=x}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} = \left\{\frac{1}{x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}\right\}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\gamma_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} - \sum_{n=1}^{x^{\frac{\tau'}{\tau+\tau'}}} \frac{\alpha_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \cdot \sum_{n=1}^{x^{\frac{\tau}{\tau+\tau'}}} \frac{\beta_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} + \sum_{n=1}^{x^{\frac{\tau'}{\tau+\tau'}}} \frac{\alpha_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \cdot \sum_{n=1}^{x^{\frac{\tau}{\tau+\tau'}}} \frac{\beta_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}$$

$$= \sum_{n=1}^{x^{\frac{\tau'}{\tau+\tau'}}} \frac{\alpha_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \left(\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{\beta_m}{m^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \right) + \sum_{n=1}^{x^{\frac{\tau}{\tau+\tau'}}} \frac{\beta_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \left(\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{\alpha_m}{m^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{m^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \right)$$

$$= \left\{ \sum_{n=1}^{x^{\frac{\tau'}{\tau+\tau'}}} \frac{|\alpha_n|}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \frac{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}{x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \right\} + \left\{ \sum_{n=1}^{x^{\frac{\tau}{\tau+\tau'}}} \frac{|\beta_n|}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \frac{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}{x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \right\} = \left\{ \frac{1}{x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \sum_{n=1}^{x^{\frac{\tau'}{\tau+\tau'}}} |\alpha_n| \right\} + \left\{ \frac{1}{x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \sum_{n=1}^{x^{\frac{\tau}{\tau+\tau'}}} |\beta_n| \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}} \right\} + \left\{ \frac{1}{x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} x^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}} \right\} = \{1\} + \{1\} = \{1\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^{\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}}.$$

§ 4.

Beweis einiger neuer Sätze über Dirichlet'sche Multiplikation.

Der folgende neue Satz (VI) enthält den STIELTJES'schen Satz (V) als Spezialfall $\rho' = \rho$.

(VI): ρ, τ, ρ', τ' *mögen vier Grössen bedeuten, für welche*

$$\tau \geqq 0, \qquad \tau' \geqq 0, \qquad \tau + \tau' > 0, \qquad \rho + \tau \geqq \rho', \qquad \rho' + \tau' \geqq \rho$$

ist. Es sei (1) *für* $s = \rho$ *konvergent, für* $s = \rho + \tau$ *absolut konvergent,* (2) *für* $s = \rho'$ *konvergent, für* $s = \rho' + \tau'$ *absolut konvergent. Dann ist* (3) *für* $s = \frac{\rho\tau' + \rho'\tau + \tau\tau'}{\tau + \tau'}$ *konvergent.*

Beweis: Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$\frac{\rho\tau' + \rho'\tau + \tau\tau'}{\tau + \tau'} = \omega,$$

$$\frac{\tau}{\tau + \tau'} = \eta,$$

$$\frac{\tau'}{\tau + \tau'} = \eta',$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\rho} = A_x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\rho} = A.$$

Dann ist

$$(61)\qquad \sum_{n=1}^{x} \frac{|a_n|}{n^{\rho'}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{|a_n|}{n^{\rho+\tau}}\, n^{\tau+\rho-\rho'} \leqq x^{\tau+\rho-\rho'} \sum_{n=1}^{x} \frac{|a_n|}{n^{\rho+\tau}} = O(x^{\tau+\rho-\rho'}),$$

$$(62)\qquad \sum_{n=1}^{x} \frac{|b_n|}{n^{\rho}} = O(x^{\tau'+\rho'-\rho}),$$

$$\sum_{n=x}^{\infty} \frac{a_n}{n^\omega} = \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(A_n - A) - (A_{n-1} - A)}{n^{\omega-\rho}} = \left\{\frac{1}{x^{\omega-\rho}}\right\},$$

$$\sum_{n=x}^{\infty} \frac{b_n}{n^\omega} = \left\{\frac{1}{x^{\omega-\rho'}}\right\},$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{c_n}{n^\omega} - \sum_{n=1}^{x^{\eta'}} \frac{a_n}{n^\omega} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^\omega} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\omega} \cdot \sum_{n=1}^{x^{\eta}} \frac{b_n}{n^\omega} + \sum_{n=1}^{x^{\eta'}} \frac{a_n}{n^\omega} \cdot \sum_{n=1}^{x^{\eta}} \frac{b_n}{n^\omega}$$

$$= \sum_{n=1}^{x^{\eta'}} \frac{a_n}{n^\omega} \left(\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{b_m}{m^\omega} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^\omega} \right) + \sum_{n=1}^{x^{\eta}} \frac{b_n}{n^\omega} \left(\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{a_m}{m^\omega} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\omega} \right)$$

$$= \left\{ \sum_{n=1}^{x^{\eta'}} \frac{|a_n|}{n^\omega} \frac{n^{\omega-\rho'}}{x^{\omega-\rho'}} \right\} + \left\{ \sum_{n=1}^{x^{\eta}} \frac{|b_n|}{n^\omega} \frac{n^{\omega-\rho}}{x^{\omega-\rho}} \right\} = \left\{ \frac{1}{x^{\omega-\rho'}} \sum_{n=1}^{x^{\eta'}} \frac{|a_n|}{n^{\rho'}} \right\} + \left\{ \frac{1}{x^{\omega-\rho}} \sum_{n=1}^{x^{\eta}} \frac{|b_n|}{n^{\rho}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{x^{\omega-\rho'}}\, x^{\eta'(\tau+\rho-\rho')} \right\} + \left\{ \frac{1}{x^{\omega-\rho}}\, x^{\eta(\tau'+\rho'-\rho)} \right\}$$

$$= \left\{ x^{-\frac{\rho\tau'+\rho'\tau+\tau\tau'}{\tau+\tau'} + \rho' + \frac{\tau'}{\tau+\tau'}(\tau+\rho-\rho')} \right\} + \left\{ x^{-\frac{\rho\tau'+\rho'\tau+\tau\tau'}{\tau+\tau'} + \rho + \frac{\tau}{\tau+\tau'}(\tau'+\rho'-\rho)} \right\} = \{1\} + \{1\} = \{1\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^\omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\omega} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^\omega},$$

womit der Satz (VI) bewiesen ist.

Ebenso wie der Satz (IV) einfacher ist als der Satz (V), ohne in ihm als Spezialfall enthalten zu sein, gibt es hier zum Satze (VI) zwei Sätze (VII) und (VIII), die nicht für $\tau' = 1$ bezw. $\tau = \tau' = 1$ in (VI) enthalten sind, und von denen auch (VIII) nicht in (VII) für $\tau = 1$ enthalten ist.

(VII): *Es sei*

$$\tau \geqq 0, \qquad \rho + \tau \geqq \rho', \qquad \rho' + 1 > \rho$$

und (1) *für* $s = \rho$ *konvergent, für* $s = \rho + \tau$ *absolut konvergent,* (2) *für* $s = \rho'$ *konvergent. Dann ist* (3) *für* $s = \dfrac{\rho + \rho'\tau + \tau}{\tau + 1}$ *konvergent.*

(VIII): *Es sei*

$$\rho + 1 > \rho', \qquad \rho' + 1 > \rho$$

und (1) *für* $s = \rho$ *konvergent,* (2) *für* $s = \rho'$ *konvergent. Dann ist* (3) *für* $s = \dfrac{\rho + \rho'}{2} + \dfrac{1}{2}$ *konvergent.*

(VIII) enthält (IV) für $\rho = \rho'$.

Beweis von (VII) und (VIII): Beim Beweise des Satzes (VI) wurde die absolute Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\rho+\tau}}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\rho+\tau'}}$$

nur verwendet, um schliessen zu können, dass

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|a_n|}{n^{\rho'}} = O(x^{\tau+\rho-\rho'}) \tag{61}$$

und

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|b_n|}{n^{\rho}} = O(x^{\tau'+\rho'-\rho}) \tag{62}$$

ist. Wird im Falle des Satzes (VII) unter τ' die Zahl 1 verstanden, im Falle des Satzes (VIII) unter τ und τ' die Zahl 1, so bleiben (61) und (62) und damit alles folgende richtig; nur muss man hier (62) so begründen:

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|b_n|}{n^{\rho}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{|b_n|}{n^{\rho'}} n^{\rho'-\rho} = O \sum_{n=1}^{x} n^{\rho'-\rho} = O(x^{1+\rho'-\rho})$$

und (61) im Falle des Satzes (VIII) entsprechend.

§ 5.

Bemerkungen zu einer Folgerung von Stieltjes.

STIELTJES hatte seinen Satz (III) aufgestellt, um aus ihm die Folgerung zu ziehen [75]: Wenn es wahr ist, dass

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) = O(\sqrt{x}) \tag{63}$$

ist, so ist für jedes $\delta > 0$

$$\sum_{n=1}^{x} \nu(n) - x = O(x^{\frac{3}{4}+\delta}), \tag{64}$$

wo

$$\nu(n) = \log p \text{ für Primzahlen } n = p \text{ und Primzahlpotenzen } n = p^{u},$$
$$\nu(n) = 0 \text{ für alle übrigen } n$$

ist; (64) ist gleichbedeutend mit

$$\sum_{p \leq x} \log p = x + O(x^{\frac{3}{4}+\delta}).$$

Zu jener Folgerung wandte STIELTJES den Satz (III) auf die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \tag{65}$$

[75]) Vergl. die in Anm. 73 zitierte Note.

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n) - \log n - 2C}{n^s} = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s) \tag{66}$$

an, wo $T(n)$ die Anzahl der Teiler von n und C die EULER'sche Konstante bezeichnet, und schloss mit Recht: Nach der Annahme (63) würde die linke Seite von (65) für $s > \frac{1}{2}$ konvergieren, nach dem DIRICHLET'schen Satz

$$\sum_{n=1}^{x} \big(T(n) - \log n - 2C\big) = O(\sqrt{x})$$

die linke Seite von (66) ebenfalls; nach dem Satz (III) wäre also, da jene beiden Reihen für $s > 1$ absolut konvergieren, das DIRICHLET'sche Produkt

$$-2C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu(n)}{n^s},$$

welches für $s > 1$

$$= \zeta(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - 2C$$

ist, für $s > \frac{3}{4}$ konvergent, woraus unmittelbar (64) folgt.

Man sieht hier wieder einmal, dass die Anwendung allgemeiner Konvergenzsätze nicht immer das beste ist; denn STIELTJES kam trotz wiederholter Bemühungen nicht über den Wert $\frac{3}{4}$ in (64) hinaus [unter der unbewiesenen Annahme (63)!], und ich habe mit Leichtigkeit auf elementarem Wege zeigen [76]) können, dass unter der Annahme (63)

$$\sum_{n=1}^{x} \nu(n) - x = O(x^{\frac{2}{3}+\delta})$$

und genauer

$$\sum_{n=1}^{x} \nu(n) - x = O(x^{\frac{2}{3}} \log x)$$

wäre. Ich benutze diese Gelegenheit, um hierfür eine neue Beweisanordnung mitzuteilen, welche sich noch mehr als die frühere an Herrn MERTENS' Beweis [77]) von

$$\sum_{n=1}^{x} \nu(n) - x = O(x^{\frac{3}{4}} \log x)$$

[unter der Annahme (63)!] anschliesst.

Aus (63) folgt, wenn

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) = M(x),$$

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) \log n = N(x)$$

---

76) *Über den Zusammenhang einiger neuerer Sätze der analytischen Zahlentheorie* [Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXV (1906), Abt. IIa, S. 589-632], S. 606-608.

77) *Über eine zahlentheoretische Function* [Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CVI (1897), Abt. IIa, S. 761-830], S. 766-775.

gesetzt wird,

$$N(x)=\sum_{n=1}^{x}\big(M(n)-M(n-1)\big)\log n=\sum_{n=1}^{x}M(n)\big(\log n-\log(n+1)\big)+M(x)\log(x+1)$$
$$=O\sum_{n=1}^{x}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}+O(\sqrt{x}\log x)=O(\sqrt{x}\log x);$$

ferner folgt aus (63) die Konvergenz von

$$(67)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\log n}{n}.$$

Der Wert von (67) ist alsdann -1, wie z. B. aus

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\log n}{n^s}=\frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)}$$

durch Grenzübergang folgt; ferner ist

$$\sum_{n=x}^{\infty}\frac{\mu(n)\log n}{n}=\sum_{n=x}^{\infty}\frac{N(n)-N(n-1)}{n}=\sum_{n=x}^{\infty}N(n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{N(x-1)}{x}$$
$$=O\sum_{n=x}^{\infty}\sqrt{n}\log n\cdot\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)=O\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right).$$

Die Identität

$$\sum_{n=1}^{x}\nu(n)=-\sum_{n=1}^{x}\mu(n)\log n\left[\frac{x}{n}\right]$$

ergibt nun

$$-\sum_{n=1}^{x}\nu(n)=\sum_{nm\leqq x}\mu(n)\log n\,.\,1$$
$$=\sum_{n=1}^{x^{\frac{2}{3}}}\mu(n)\log n\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}}1+\sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}}\mu(m)\log m-\sum_{n=1}^{x^{\frac{2}{3}}}\mu(n)\log n\,.\sum_{m=1}^{x^{\frac{1}{3}}}1$$
$$=\sum_{n=1}^{x^{\frac{2}{3}}}\mu(n)\log n\left[\frac{x}{n}\right]+\sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{3}}}N\left(\frac{x}{n}\right)-N(x^{\frac{2}{3}})[x^{\frac{1}{3}}]$$
$$=\sum_{n=1}^{x^{\frac{2}{3}}}\mu(n)\log n\,\frac{x}{n}+O\sum_{n=1}^{x^{\frac{2}{3}}}\log n+O\sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{3}}}\sqrt{\frac{x}{n}}\log\frac{x}{n}+O(x^{\frac{1}{3}}\log x\,.\,x^{\frac{1}{3}})$$
$$=x\sum_{n=1}^{x^{\frac{2}{3}}}\frac{\mu(n)\log n}{n}+O(x^{\frac{2}{3}}\log x)+O\left(\sqrt{x}\log x\sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+O(x^{\frac{2}{3}}\log x)$$
$$=x\left(-1+O\left(\frac{\log x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)\right)+O(x^{\frac{2}{3}}\log x)=-x+O(x^{\frac{2}{3}}\log x),$$

was zu beweisen war.

§ 6.

Bemerkungen zu den Untersuchungen von Herrn Cahen über Dirichlet'sche Multiplikation.

Auf Grund des STIELTJES'schen Satzes (IV) [oder auch schon des STIELTJES'schen Satzes (III)] ist die Konvergenzabszisse von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \tag{3}$$

höchstens um $\frac{1}{2}$ grösser als die grössere der beiden Konvergenzabszissen von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}. \tag{2}$$

Es entsteht nun die Frage, ob diese Zahl $\frac{1}{2}$, welche an Stelle des grösseren Wertes 1 getreten ist, noch verkleinert werden kann, und ob es überhaupt ein Paar DIRICHLET'scher Reihen gibt, welche für $s > \sigma$ konvergieren, während ihr DIRICHLET'sches Produkt nicht für alle $s > \sigma$ konvergiert.

Auf letztere Frage gibt das Beispiel am Anfang des § 1 nicht etwa die Antwort durch Betrachtung der zugehörigen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^s};$$

denn die Konvergenzabszisse der ersteren beiden ist offenbar 0; mit der festgestellten Divergenz der dritten für $s = 0$ würde es aber wohl verträglich sein, dass sie für alle $s > 0$ konvergiert.

Nun steht allerdings in der Arbeit von Herrn CAHEN [78]), welche das Verdienst hat, zum ersten Male die DIRICHLET'schen Reihen als Funktionen komplexen Argumentes studiert und hierbei wichtige Ergebnisse erzielt zu haben, der Satz, dass aus der Konvergenz von (1) und (2) für $s > \sigma$ stets die Konvergenz von (3) für $s > \sigma$ folgt [79]). Jedoch leidet der Beweis, welchen Herr CAHEN [80]) für diesen Satz beibringt, an einem auch beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaft unheilbaren Fehler. Auf den betreffenden mehrfach in der Arbeit vorkommenden Fehlschluss hat zwar schon Herr DE LA

78) Vergl. die in Anm. 24 zitierte Arbeit, S. 100.

79) Der Satz bezieht sich dort auch auf den allgemeineren Fall der konvergenten Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$, vorausgesetzt, dass sie einen Bereich absoluter Konvergenz besitzen, was nach Herrn CAHEN's Untersuchungen (l. c., S. 92) im Falle der Endlichkeit von $\limsup_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n}$ mit Sicherheit eintritt.

80) l. c., S. 100-101.

VALLÉE POUSSIN [81]) im Jahre 1896 ohne spezielle Nennung gerade jener Stelle aufmerksam gemacht; die Tatsache, dass der vorliegende Satz dadurch zu einem unbewiesenen wird, ist aber bisher nirgends hervorgehoben worden. Es handelt sich um folgendes. Wenn die DIRICHLET'sche Reihe

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $s > \sigma$ konvergiert, so ist sie, wie Herr CAHEN [82]) zuerst bewiesen hat, in dem Gebiete

$$\mathfrak{R}(s) \geq \sigma + \varepsilon, \qquad q \leq \mathfrak{J}(s) \leq r,$$

wo ε, q, r konstant sind und $\varepsilon > 0$, $r > q$ ist, gleichmässig konvergent, also insbesondere auf dem endlichen Geradenstück $s = \tau + \omega i$, wo $\tau > \sigma$ ist und ω von q bis r läuft. Daraus folgt, dass für $y > 0$, $\tau > \sigma$, $\tau \gtreqless 0$ das geradlinige Integral

$$\int_{\tau+qi}^{\tau+ri} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \frac{e^{ys}}{s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau+qi}^{\tau+ri} \frac{a_n}{n^s} \frac{e^{ys}}{s} ds$$

ist; denn auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \frac{e^{ys}}{s}$$

ist auf jener Strecke gleichmässig konvergent. Herr CAHEN schliesst nun [83]) unerlaubter Weise, dass

$$\int_{\tau-\infty i}^{\tau+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \frac{e^{ys}}{s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau-\infty i}^{\tau+\infty i} \frac{a_n}{n^s} \frac{e^{ys}}{s} ds$$

ist. Diese gliedweise Integration ist unberechtigt, obgleich auf der rechten Seite jedes Integral konvergiert und auch die Summe dieser Integralwerte konvergiert. Die gliedweise Integration der unendlichen Reihe über das unendliche Intervall wäre auch dann noch unerlaubt, wenn Herr CAHEN überdies ihre gleichmässige Konvergenz für das ganze unendliche Intervall festgestellt hätte. Herr CAHEN wurde übrigens zu jenem Fehlschluss dadurch verleitet, dass in einer Notiz KRONECKER's [84]), an welche er anknüpft, eine für die in Betracht kommende gliedweise Integration einer unendlichen Reihe über ein unendliches Intervall angeblich notwendige und hinreichende Bedingung steht, welche auf Irrtum beruht.

Die in den N°. 11 und 19 der CAHEN'schen Arbeit enthaltene scheinbare Entdeckung einer notwendigen und hinreichenden Bedingung [85]) für die Entwickelbarkeit einer analytischen Funktion in eine DIRICHLET'sche Reihe wird u. a. durch jenen Fehlschluss auch hinfällig. Diese Frage scheint mir von ihrer Klärung noch weit entfernt zu sein. Ich

[81]) Vergl. S. 192-193 seiner in Anm. 70 zitierten Arbeit.

[82]) l. c., S. 82-84.

[83]) l. c., S. 93-94 und S. 100.

[84]) *Notiz über Potenzreihen* [Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1878, S. 53-58], S. 54.

[85]) l. c., S. 93-96 und 102-103.

benutze diese Gelegenheit zur Veröffentlichung eines kleinen Beitrages, den ich einer schriftlichen Mitteilung von Herrn HURWITZ verdanke; er besteht in dem Nachweise, dass der unendlich ferne Punkt stets eine singuläre Stelle der für $\mathfrak{R}(s) > \sigma$ durch eine (nicht konstante) DIRICHLET'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

definierten Funktion ist [86]). Denn wäre für das gemeinsame Gebiet der Halbebene $\mathfrak{R}(s) > \sigma$ und des Kreisäusseren $|s| > c$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{s^m}, \tag{68}$$

so würde (68) insbesondere für alle reellen s oberhalb eines gewissen Wertes gelten. Der Grenzübergang für $s = +\infty$ liefert

$$a_1 = b_0,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{s^m}. \tag{69}$$

Wenn nun

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{m_0-1} = 0, \qquad b_{m_0} \neq 0 \ (m_0 \geqq 1)$$

ist, d. h. b_{m_0} der erste auf der rechten Seite von (69) nicht verschwindende Koeffizient ist, so wäre nach (69)

$$\lim_{s=\infty} s^{m_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = b_{m_0},$$

während offenbar

$$\lim_{s=\infty} s^{m_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = 0$$

ist.

Jene irrtümliche Ansicht über die Vertauschbarkeit von Summation und Integration hat Herrn CAHEN noch 6 Jahre später in der Anhangsnote *B* [87]) seines recht guten Lehrbuches der Zahlentheorie [88]) zu folgender unrichtigen Bemerkung veranlasst, welche einigen, aber nicht allen berechtigten Einwänden gegen seinen damaligen [89]) Beweis des betreffenden Satzes Rechnung trägt: « Parmi les résultats obtenus se trouve celui-ci: *Quelque petit que soit le nombre positif k, le nombre des nombres premiers compris entre x et* $(1+k)x$ *augmente indéfiniment avec x,* démontré à peu près en même temps par MM. HADAMARD et DE LA VALLÉE POUSSIN. J'en ai donné (Annales de l'École Normale supérieure, 1894) une démonstration non rigoureuse mais très simple. Cette démonstration deviendrait rigoureuse si l'on parvenait à démontrer ce théorème énoncé par RIEMANN: *Les racines imaginaires de la fonction* $\zeta(s)$ *sont de la forme* $\frac{1}{2} + ti$,

86) Für den allgemeineren Typus $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ gilt natürlich derselbe Beweis.

87) *Sur les nombres premiers.*

88) *Éléments de la théorie des nombres* (Paris, 1900), S. 323.

89) l. c., S. 114-118.

t étant réel ». Jener Beweis würde auch unter der Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung falsch sein.

Doch nun zurück zu den Reihen (1), (2) und (3)! Nachdem aufgedeckt ist, dass der CAHEN'sche Beweis seines Satzes, besser gesagt seiner Vermutung [« mit (1) und (2) konvergiert (3) für $s > \sigma$ »] unrichtig ist, entsteht die Frage, ob diese damals von Herren CAHEN ausgesprochene Vermutung richtig ist. Ich vermag diese Frage nicht zu beantworten; ich kann jene Vermutung weder beweisen noch durch ein Beispiel widerlegen.

Immerhin will ich darauf aufmerksam machen, dass die CAHEN'sche Vermutung im Widerspruch zur STIELTJES'schen Vermutung

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) = O(\sqrt{x}) \tag{63}$$

steht, wie folgender etwas komplizierter Gedankengang ergibt.

Wenn eine DIRICHLET'sche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $s > \sigma$ konvergiert und ε eine feste positive Grösse ist, so ist [90]) für positives ins Unendliche wachsendes ω

$$f(\sigma + \varepsilon + \omega i) = O(\omega); \tag{70}$$

dies folgt unmittelbar daraus, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma + \frac{\varepsilon}{2}}}$$

konvergiert und,

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^{\sigma + \frac{\varepsilon}{2}}} = A_x$$

gesetzt,

$$f(\sigma + \varepsilon + \omega i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{n^{\frac{\varepsilon}{2} + \omega i}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{n^{\frac{\varepsilon}{2} + \omega i}} - \frac{1}{(n+1)^{\frac{\varepsilon}{2} + \omega i}} \right) = \left(\frac{\varepsilon}{2} + \omega i \right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{1 + \frac{\varepsilon}{2} + \omega i}},$$

$$|f(\sigma + \varepsilon + \omega i)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \omega \right) \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{1 + \frac{\varepsilon}{2}}}$$

ist.

Wäre nun die CAHEN'sche Vermutung richtig, so würde das DIRICHLET'sche Quadrat, der DIRICHLET'sche Kubus, ..., die DIRICHLET'sche $m$te Potenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$$

90) Genauere Abschätzungen sind hier ohne Belang.

für $s > 0$ konvergieren. Es wäre also für jedes feste $\mathfrak{z}$ zwischen 0 und 1 $(0 < \mathfrak{z} < 1)$ und jedes feste ganzzahlige positive m nach (70)

$$(1 - 2^{1-\mathfrak{z}-\omega i})^m \left(\zeta(\mathfrak{z} + \omega i)\right)^m = O(\omega),$$

also wegen

$$|1 - 2^{1-\mathfrak{z}-\omega i}| \geqq 2^{1-\mathfrak{z}} - 1$$

$$\left(\zeta(\mathfrak{z} + \omega i)\right)^m = O(\omega),$$

$$\zeta(\mathfrak{z} + \omega i) = O(\omega^{\frac{1}{m}}). \tag{71}$$

Nun ist bekanntlich zufolge der RIEMANN'schen Funktionalgleichung

$$\zeta(1 - s) = 2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\,\zeta(s)$$

$$|\zeta(1 - \mathfrak{z} + \omega i)| = |\zeta(1 - \mathfrak{z} - \omega i)| = |\zeta(\mathfrak{z} + \omega i)|\, O(\omega^{\mathfrak{z} - \frac{1}{2}}). \tag{72}$$

Für $0 < \mathfrak{z} < \frac{1}{2}$ ergeben (71) und (72)

$$\zeta(1 - \mathfrak{z} + \omega i) = O(\omega^{\mathfrak{z} - \frac{1}{2} + \delta}),$$

wie klein auch die positive Grösse δ sei. Wird hierin $1 - \mathfrak{z}$ durch $\mathfrak{z}$ ersetzt, so wäre also für $\frac{1}{2} < \mathfrak{z} < 1$

$$\zeta(\mathfrak{z} + \omega i) = O(\omega^{\frac{1}{2} - \mathfrak{z} + \delta}). \tag{73}$$

Andererseits würde aus STIELTJES' Vermutung (63) in Verbindung mit der CAHEN'schen Vermutung folgen, dass die $m$te DIRICHLET'sche Potenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ konvergiert. Es wäre also für $\frac{1}{2} < \mathfrak{z} < 1$

$$\frac{1}{\left(\zeta(\mathfrak{z} + \omega i)\right)^m} = O(\omega),$$

$$\frac{1}{\zeta(\mathfrak{z} + \omega i)} = O(\omega^{\frac{1}{m}}) = O(\omega^{\delta}). \tag{74}$$

Wenn nun $\mathfrak{z}$ irgend ein Wert zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 ist, so folgt aus (73) und (74) durch Multiplikation

$$1 = O(\omega^{\frac{1}{2} - \mathfrak{z} + 2\delta}),$$

was für $\delta < \frac{1}{2}\left(\mathfrak{z} - \frac{1}{2}\right)$ einen Widerspruch enthält.

Man erkennt aus dem Vorangehenden, dass bereits die — weniger als STIELTJES' Vermutung besagende — etwaige Tatsache, dass die Konvergenzabszisse von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \tag{75}$$

kleiner als 1 ist, im Widerspruch mit der CAHEN'schen Vermutung steht; denn (74) wäre für gewisse s zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 giltig. Jedoch steht die RIEMANN'sche Vermutung

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \Re(s) > \tfrac{1}{2}$$

nicht im Widerspruch mit der CAHEN'schen Vermutung; denn mit der RIEMANN'schen Vermutung wäre es verträglich, dass die Konvergenzabszisse von (75) gleich 1 ist.

Zur Widerlegung der CAHEN'schen Vermutung würde es genügen, zu beweisen, dass die rechte Seite von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

eine positive Konvergenzabszisse hat, d.h. dass nicht für jedes δ

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = O(x^\delta)$$

ist. Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \left((1-2^{1-s})\zeta(s)\right)^2 = \left(1 - \frac{4}{2^s} + \frac{4}{4^s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n)}{n^s}$$

ist

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = \tau(x) - 4\tau\left(\frac{x}{2}\right) + 4\tau\left(\frac{x}{4}\right),$$

wo $\tau(x)$ die Anzahl aller Teiler aller Zahlen $\leqq x$ bezeichnet. Über $\tau(x)$ ist durch Herrn VORONOÏ [91]) bekannt, dass

$$\tau(x) = x \log x + (2C-1)x + O(\sqrt[3]{x} \log x) \tag{76}$$

ist; daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{x} c_n &= x \log x + (2C-1)x - 4 \cdot \frac{x}{2} \log \frac{x}{2} - 4(2C-1)\frac{x}{2} \\ &\quad + 4 \cdot \frac{x}{4} \log \frac{x}{4} + 4(2C-1)\frac{x}{4} + O(\sqrt[3]{x} \log x) \\ &= O(\sqrt[3]{x} \log x), \end{aligned}$$

sodass die Konvergenzabszisse von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

hier $\leqq \frac{1}{3}$ ist. Ob sie > 0 ist, weiss ich nicht; jedenfalls ist ihr Wert nach einem von Herrn CAHEN allgemein bewiesenen Satz [92]) über die Konvergenzabszisse einer DIRICHLET'schen Reihe

$$= \limsup_{x=\infty} \frac{\log \left| \tau(x) - 4\tau\left(\frac{x}{2}\right) + 4\tau\left(\frac{x}{4}\right) \right|}{\log x}.$$

Es hat sich oben herausgestellt, dass die Frage unentschieden ist, ob aus der Kon-

---

[91]) *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXVI (1903), S. 241-282].

[92]) l. c., S. 102.

vergenz zweier DIRICHLET'scher Reihen in einer Halbebene die ihres formal gebildeten Produktes in jener Halbebene folgt. Nun zeigen bekanntlich die Fakultätenreihen [93])

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,a_n}{s(s+1)\ldots(s+n)}$$

eine grosse Analogie mit den DIRICHLET'schen Reihen, und es muss daher sehr auffallend erscheinen, dass in Herrn NIELSEN's [94]) Arbeiten der Satz ausgesprochen und bewiesen steht: « Wenn von zwei Fakultätenreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,a_n}{s(s+1)\ldots(s+n)}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,b_n}{s(s+1)\ldots(s+n)}$$

die erste für $\Re(s) > l$, die zweite für $\Re(s) > l'$ konvergiert, wo $l \geqq 0$ und $l' \geqq 0$ ist, so konvergiert das formal gebildete Produkt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,c_n}{s(s+1)\ldots(s+n)}, \tag{77}$$

wo

$$n!\,c_n = \sum_{\nu=0}^{n-1}(n-1-\nu)!\,\nu!\,b_{n-1-\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{n-1-\nu+\mu}{\mu}a_{\nu-\mu}$$

gesetzt ist, für $\Re(s) > m$, falls gleichzeitig $m \geqq l$ und $m \geqq l'$ ist ». Bei näherer Betrachtung zeigt es sich jedoch, dass Herrn NIELSEN's Beweisführung für diese Behauptung nur durch schwere Fehlschlüsse zum Ziele gelangt. Es seien zwei derselben hier erwähnt.

1) Herr NIELSEN [95]) wendet die falsche Ansicht an: wenn in einer Doppelreihe

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} u_{\mu\nu} = u_{11} &+ u_{12} + \cdots \\ &+ u_{21} + u_{22} + \cdots \\ &+ \cdots\end{aligned}$$

erstens jede Zeile

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\mu\nu}$$

absolut konvergiert, zweitens jede Spalte

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} u_{\mu\nu}$$

---

93) Vergl. meine Arbeit *Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXVI (1906), S. 151-218].

94) *Sur la multiplication de deux séries de factorielles* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Bd. XIII, 1. Semester, 1904, S. 70-77]; *Les séries de factorielles et les opérations fondamentales* [Mathematische Annalen, Bd. LIX (1904), S. 355-376] (hier ist nur auf S. 362-363 der Satz ohne Beweis unter Bezugnahme auf die vorige Arbeit ausgesprochen); *Handbuch der Theorie der Gammafunktion* (Leipzig, 1906), § 99, S. 252-254.

95) l. c., S. 74 bezw. S. 254.

absolut konvergiert und drittens die Summe der Zeilensummen

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\mu\nu}$$

konvergiert, so sei die Doppelreihe absolut konvergent.

2) Nachdem Herr NIELSEN auf diesem Wege bewiesen hat, dass die Reihe (77) für alle s konvergiert, deren reeller Teil gleichzeitig grösser als $l+1$ und als l' ist, schliesst er [96]) mit Recht aus Symmetriegründen, dass (77) auch konvergiert, wenn gleichzeitig $\mathfrak{R}(s)>l$ und $\mathfrak{R}(s)>l'+1$ ist; aus beidem zusammen folgt nun für Herrn NIELSEN, dass (77) konvergiert, wenn gleichzeitig $\mathfrak{R}(s)>l$ und $\mathfrak{R}(s)>l'$ ist! Wenn also speziell $l'=l$ angenommen wird (was den Voraussetzungen der CAHEN'schen Vermutung entspricht), so lautet jener Fehlschluss: (77) konvergiert für $\mathfrak{R}(s)>l+1$ und für $\mathfrak{R}(s)>l+1$, also für $\mathfrak{R}(s)>l$.

§ 7.

Vereinfachung einiger Abschätzungen in der Theorie der Riemann'schen Zetafunktion.

Da einmal von der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}=(1-2^{1-s})\zeta(s)$$

die Rede war, so benutze ich die Gelegenheit, um durch ihre Anwendung (an Stelle anderer bekannten Darstellungen von $\zeta(s)$ im Streifen $0<\mathfrak{R}(s)<1$) die Untersuchungen der N°. I und II meiner Arbeit [97]) zu vereinfachen: « *Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de* RIEMANN ». Dabei brauche ich hier die Kenntnis jener Arbeit nicht vorauszusetzen.

In N°. I derselben handelte es sich darum, einen neuen Beweis für den MELLIN'schen Satz

$$\zeta(\sigma+\omega i)=O(\omega^{1-\sigma}) \qquad (0<\sigma<1) \tag{78}$$

anzugeben. Diese Relation beweise ich jetzt folgendermassen. Es ist für

$$s=\sigma+\omega i, \qquad 0<\sigma<1, \qquad \omega>0$$

$$(1-2^{1-s})\zeta(s)=\sum_{n=1}^{[\omega]}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}+\sum_{n=[\omega]+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

$$=\sum_{n=1}^{[\omega]}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}+(-1)^{[\omega]}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{([\omega]+2k-1)^s}-\frac{1}{([\omega]+2k)^s}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{[\omega]}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}+(-1)^{[\omega]}s\sum_{k=1}^{\infty}\int_{[\omega]+2k-1}^{[\omega]+2k}\frac{du}{u^{1+s}},$$

---

96) l. c., S. 74 bezw. S. 254.

97) Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. XXXIII (1905), S. 229-241.

also

$$|(1-2^{1-\vartheta-\omega i})\zeta(\vartheta+\omega i)| \leqq \sum_{n=1}^{[\omega]} \frac{1}{n^\vartheta} + (\vartheta+\omega)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{[\omega]+2k-1}^{[\omega]+2k} \frac{du}{u^{1+\vartheta}}$$

$$< \sum_{n=1}^{[\omega]} \frac{1}{n^\vartheta} + (\vartheta+\omega)\int_\omega^\infty \frac{du}{u^{1+\vartheta}} = O(\omega^{1-\vartheta}) + \frac{\vartheta+\omega}{\vartheta\,\omega^\vartheta} = O(\omega^{1-\vartheta}),$$

und hieraus ergibt sich (78) wegen

$$|1-2^{1-\vartheta-\omega i}| \geqq 2^{1-\vartheta}-1.$$

Aus (78) folgt nach Herrn MELLIN mit Rücksicht auf (72) für $0 < \vartheta \leqq \frac{1}{2}$

$$\zeta(\vartheta+\omega i) = \zeta(1-\vartheta+\omega i)\,O(\omega^{\frac{1}{2}-\vartheta}) = O(\sqrt{\omega}).$$

In N°. II meiner genannten Arbeit verschärfte ich die MELLIN'schen Resultate unter Heranziehung des VORONOÏ'schen Satzes (76) zu dem Ergebnis

$$\text{(79)}\qquad \zeta(\vartheta+\omega i) = O(\omega^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\vartheta}\sqrt{\log\omega}) \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta \leqq \tfrac{1}{2},$$

$$\zeta(\vartheta+\omega i) = O(\omega^{\frac{3}{4}(1-\vartheta)}\sqrt{\log\omega}) \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} \leqq \vartheta < 1.$$

Dies führe ich jetzt einfacher folgendermassen aus. Für $\mathfrak{R}(s) > \frac{1}{3}$ ist, wie in § 6 als Folge der VORONOÏ'schen Relation festgestellt wurde,

$$(1-2^{1-s})^2(\zeta(s))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}.$$

Genauer ergibt sich wegen

$$C_x = \sum_{n=1}^{x} c_n = O(\sqrt[3]{x}\log x)$$

für

$$s = \vartheta+\omega i, \qquad \tfrac{1}{3} < \vartheta < 1, \qquad \omega > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{[\omega^{\frac{3}{2}}]} \frac{c_n}{n^s} + \sum_{n=[\omega^{\frac{3}{2}}]+1}^{\infty} \frac{C_n - C_{n-1}}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{[\omega^{\frac{3}{2}}]} \frac{c_n}{n^s} + s\sum_{n=[\omega^{\frac{3}{2}}]+1}^{\infty} C_n \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{1+s}} - \frac{C_{[\omega^{\frac{3}{2}}]}}{([\omega^{\frac{3}{2}}]+1)^s},$$

also

$$(1-2^{1-\vartheta-\omega i})^2\,(\zeta(\vartheta+\omega i))^2$$

$$= O\sum_{n=1}^{[\omega^{\frac{3}{2}}]} \frac{|c_n|}{n^\vartheta} + O\left(\omega \sum_{n=[\omega^{\frac{3}{2}}]+1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\log n \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{1+\vartheta}}\right) + O\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}}\log\omega}{\omega^{\frac{3}{2}\vartheta}}\right)$$

$$= O\sum_{n=1}^{[\omega^{\frac{3}{2}}]} \frac{|c_n|}{n^\vartheta} + O\left(\omega\int_{\omega^{\frac{3}{2}}}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{u}\log u\,du}{u^{1+\vartheta}}\right) + O(\omega^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\vartheta}\log\omega)$$

$$= O\sum_{n=1}^{[\omega^{\frac{3}{2}}]} \frac{|c_n|}{n^\vartheta} + O\left(\omega\frac{\log\omega}{\omega^{\frac{3}{2}(\vartheta-\frac{1}{3})}}\right) + O(\omega^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\vartheta}\log\omega) = O\sum_{n=1}^{[\omega^{\frac{3}{2}}]} \frac{|c_n|}{n^\vartheta} + O(\omega^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\vartheta}\log\omega).$$

Wegen

$$c_n = T(n) \text{ für ungerade } n,$$

$$c_n = T(n) - 4\,T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ für gerade, nicht durch 4 teilbare } n,$$

$$c_n = T(n) - 4\,T\left(\frac{n}{2}\right) + 4\,T\left(\frac{n}{4}\right) \text{ für durch 4 teilbare } n$$

ist

$$D_x = \sum_{n=1}^{x} |c_n| = O(x \log x),$$

also

$$\sum_{n=1}^{[\omega^{\frac{3}{2}}]} \frac{|c_n|}{n^{\mathfrak{s}}} = \sum_{n=1}^{[\omega^{\frac{3}{2}}]} \frac{D_n - D_{n-1}}{n^{\mathfrak{s}}} = \sum_{n=1}^{[\omega^{\frac{3}{2}}]} D_n \left(\frac{1}{n^{\mathfrak{s}}} - \frac{1}{(n+1)^{\mathfrak{s}}}\right) + \frac{D_{[\omega^{\frac{3}{2}}]}}{([\omega^{\frac{3}{2}}]+1)^{\mathfrak{s}}}$$

$$= O \sum_{n=1}^{[\omega^{\frac{3}{2}}]} n \log n \frac{1}{n^{1+\mathfrak{s}}} + O\left(\frac{\omega^{\frac{3}{2}} \log \omega}{\omega^{\frac{3}{2}\mathfrak{s}}}\right) = O(\omega^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\mathfrak{s}} \log \omega),$$

$$(1 - 2^{1-\mathfrak{s}-\omega i})^2 (\zeta(\mathfrak{s} + \omega i))^2 = O(\omega^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\mathfrak{s}} \log \omega),$$

$$\zeta(\mathfrak{s} + \omega i) = O(\omega^{\frac{3}{4}(1-\mathfrak{s})} \sqrt{\log \omega}).$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (72) unmittelbar die andere Behauptung (79).

Im Gegensatz zu dieser Anwendung der für $\mathfrak{R}(s) > 0$ giltigen Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

muss ich bemerken, dass die Schlüsse, welche Herr VON SCHAPER gegen Ende seiner Dissertation [98]) an diese Gleichung angeknüpft hat, falsch sind; dieser unrichtige Beweis eines HADAMARD'schen Satzes [« Die RIEMANN'sche Funktion $\xi(z)$, als Funktion von z^2 aufgefasst, hat die Höhe 0 »] ist auch in Herrn TORELLI's [99]) grosse Monographie über das Primzahlproblem übergegangen. Herr VON SCHAPER hat nicht beachtet, dass in

$$\zeta(s) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}}{1 - 2^{1-s}}$$

der Nenner der rechten Seite Nullstellen mit reellem Teil 1 hat, was seinen Beweis umstösst. Übrigens gibt es heute für jenen HADAMARD'schen Satz zahlreiche richtige Beweisanordnungen.

---

98) *Ueber die Theorie der* HADAMARD'*schen Funktionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen* (Göttingen, 1898), S. 60-63.

99) *Sulla totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato* [Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Ser. II, Bd. XI, N°. 1 (1901), S. 1-222], S. 110-112.

§ 8.

Ein Analogon zum Abel'schen Satze über Multiplikation unendlicher Reihen.

Die nächsten Untersuchungen sollen wieder an eine Tatsache aus der Theorie der gewöhnlichen Potenzreihen bezw. der CAUCHY'schen Multiplikationsregel unendlicher Reihen anknüpfen.

ABEL [100]) hat bewiesen: « Wenn die beiden Reihen

$$(80) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = A$$

und

$$(81) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = B$$

konvergieren und wenn (das formale CAUCHY'sche Produkt)

$$(7) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n$$

wo

$$\delta_n = \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l \beta_{n-l}$$

gesetzt ist, konvergiert, so ist

$$(82) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \text{ ».}$$

ABEL bewies dies durch folgende Betrachtung: Für $-1 < x < 1$ ist wegen der absoluten Konvergenz der in Betracht kommenden Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n+2} x^n ;$$

nach dem « ABEL'schen Stetigkeitssatz » ist also, da die drei Reihen (80), (81) und (7) als konvergent vorausgesetzt werden,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \delta_n = \lim_{x=1} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n+2} x^n = \lim_{x=1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+1} x^n \right)$$
$$= \lim_{x=1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} x^n \cdot \lim_{x=1} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n .$$

Erst CESÀRO [101]) hat unter den gemachten Annahmen die Gleichung (82) durch

---

[100]) *Untersuchungen über die Reihe:*

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

[Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. I (1826), S. 311-339], S. 317-318; *Recherches sur la série*

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$

[*Œuvres complètes*, 2. Aufl. (1881), Bd. I], S. 226.

[101]) *Sur la multiplication des séries* [Bulletin des Sciences Mathématiques, Ser. II, Bd. XIV (1890), Teil I, S. 114-120], S. 114-116; vergl. auch sein *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung*, deutsch herausgegeben von Herrn KOWALEWSKI (Leipzig, 1904), S. 165.

direkte Grenzwertbetrachtungen ohne Einführung der Variablen x folgendermassen bewiesen [102]).

Es ist, wenn

$$\sum_{n=1}^{t} \alpha_n = A_t,$$

$$\sum_{n=1}^{t} \beta_n = B_t,$$

$$\sum_{n=2}^{t+1} \delta_n = D_t$$

gesetzt wird,

$$D_t = \sum_{\nu+\mu \leqq t+1} \alpha_\nu \beta_\mu = \sum_{\nu=1}^{t} \alpha_\nu \left(\beta_1 + \cdots + \beta_{t+1-\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{t} \alpha_\nu B_{t+1-\nu}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{t} B_\nu \alpha_{t+1-\nu},$$

also

$$D_1 + D_2 + \cdots + D_t = \sum_{r=1}^{t} \sum_{\nu=1}^{r} B_\nu \alpha_{r+1-\nu} = \sum_{\nu=1}^{t} B_\nu \sum_{r=\nu}^{t} \alpha_{r+1-\nu}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{t} B_\nu A_{t+1-\nu} = \sum_{\nu=1}^{t} A_\nu B_{t+1-\nu} = A_1 B_t + A_2 B_{t-1} + \cdots + A_t B_1.$$

Aus

$$\lim_{t=\infty} A_t = A,$$

$$\lim_{t=\infty} B_t = B$$

folgt nun, wenn

$$A_t = A + \varepsilon_t,$$

$$B_t = B + \eta_t$$

gesetzt wird,

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_t = 0,$$

$$\lim_{t=\infty} \eta_t = 0.$$

Nun ist

$$D_1 + D_2 + \cdots + D_t = \sum_{\nu=1}^{t} (A + \varepsilon_\nu)(B + \eta_{t+1-\nu})$$
$$= ABt + B\sum_{\nu=1}^{t} \varepsilon_\nu + A\sum_{\nu=1}^{t} \eta_{t+1-\nu} + \sum_{\nu=1}^{t} \varepsilon_\nu \eta_{t+1-\nu},$$

$$(83) \qquad \frac{D_1 + D_2 + \cdots + D_t}{t} = AB + \frac{B}{t}\sum_{\nu=1}^{t} \varepsilon_\nu + \frac{A}{t}\sum_{\nu=1}^{t} \eta_\nu + \frac{1}{t}\sum_{\nu=1}^{t} \varepsilon_\nu \eta_{t+1-\nu}.$$

Ferner ist

$$(84) \qquad \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \sum_{\nu=1}^{t} \varepsilon_\nu \eta_{t+1-\nu} = 0.$$

[102]) Ich ändere die CESÀRO'sche Beweisanordnung nur ganz unwesentlich ab.

Denn bei passend gewähltem g ist für alle n

$$|\varepsilon_n| < g,$$
$$|\eta_n| < g,$$

und nach Annahme von $\delta > 0$ gibt es ein $\tau = \tau(\delta)$, sodass für alle $n > \tau$

$$|\varepsilon_n| < \frac{\delta}{g},$$
$$|\eta_n| < \frac{\delta}{g}$$

ist; für alle $t > 2\tau$ ist daher, da in jedem Gliede $\varepsilon_\nu \eta_{t+1-\nu}$ mindestens ein Index grösser als τ ist,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{t} \varepsilon_\nu \eta_{t+1-\nu}\right| < t\frac{\delta}{g}g = \delta t,$$

womit (84) bewiesen ist. Ferner ist bekanntlich, wenn

$$\lim_{t=\infty} k_t = k$$

ist, a fortiori

(85) $$\lim_{t=\infty} \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_t}{t} = k.$$

Aus (83) folgt also, dass

$$\lim_{t=\infty} \frac{D_1 + D_2 + \cdots + D_t}{t} = AB$$

ist. Cesàro hatte damit die wichtige Tatsache entdeckt, dass, wenn selbst das Cauchy'sche Produkt zweier konvergenter Reihen divergiert, das arithmetische Mittel der t ersten Partialsummen in jenem Produkt für $t = \infty$ gegen AB konvergiert. Im vorliegenden Fall, wo überdies die Existenz von

$$\lim_{t=\infty} D_t = D$$

vorausgesetzt wurde, erhielt er unter nochmaliger Anwendung von (85) den Abel'schen Satz

$$D = AB.$$

Für Dirichlet'sche Multiplikation behaupte ich nun den Satz:

(IX): *Wenn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = A$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = B$$

konvergieren und wenn das Dirichlet'*sche Produkt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n,$$

wo

$$\gamma_n = \sum_{l \mid n} \alpha_l \beta_{\frac{n}{l}}$$

ist, ebenfalls konvergiert, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = AB.$$

Beweis: Die drei DIRICHLET'schen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}, \tag{86}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^s} \tag{87}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^s} \tag{88}$$

sind für $\mathfrak{R}(s) > 1$ absolut konvergent; daher ist dort, da (88) das DIRICHLET'sche Produkt von (86) und (87) ist,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^s}. \tag{89}$$

Die drei Reihen (86), (87) und (88) sind ferner für $\mathfrak{R}(s) > 0$ konvergent (nach dem JENSEN'schen Fundamentalsatz über Konvergenz DIRICHLET'scher Reihen) und sie stellen dort reguläre analytische Funktionen von s dar (nach dem CAHEN'schen Fundamentalsatz über den analytischen Charakter DIRICHLET'scher Reihen); daher stellen die linke Seite und die rechte Seite von (89) für $\mathfrak{R}(s) > 0$ dieselbe analytische Funktion dar; (89) gilt also auch für $\mathfrak{R}(s) > 0$, also speziell für $s > 0$. Lasse ich nunmehr die reelle Variable s zu 0 abnehmen, so folgt aus dem Analogon zum ABEL'schen Stetigkeitssatz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \lim_{s=0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^s} = \lim_{s=0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^s} \right)$$
$$= \lim_{s=0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s} \cdot \lim_{s=0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = AB.$$

§ 9.

Einiges über Dirichlet'sche Reihen im weiteren Sinne.

Einen elementaren Beweis des Satzes (IX) im Sinne des CESÀRO'schen für CAUCHY'sche Multiplikation besitze ich nicht, und ich hebe noch besonders hervor, dass mein obiger Beweis nicht nur — wie der ABEL'sche für Potenzreihen — eine reelle Variable einführt, sondern die Theorie der Funktionen komplexer Variabeln benutzt, um schliessen zu können, dass (89) für $s > 0$ gilt.

Ich würde mich freuen, wenn ein Leser dieser Arbeit einen elementaren Beweis von (IX) ausfindig machte; vorläufig bleibt die Frage offen, ob ein entsprechender Satz für die Multiplikationsregel gilt, welche allgemeineren Reihen vom Typus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n s} \tag{90}$$

ohne absolute Konvergenzhalbebene entspricht. Diese Multiplikationsregel ist so zu verstehen: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sei eine monoton ins Unendliche wachsende Folge reeller Grössen; dann wird formal zwei Reihen

$$(91) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

und

$$(92) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

diejenige Reihe

$$(93) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$$

zugeordnet, in welcher $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ die nach wachsenden $\lambda_l + \lambda_m$ zusammengefassten Produkte $\alpha_l \beta_m$ sind. D. h. die verschiedenen unter den Summen $\lambda_l + \lambda_m$ seien, wachsend geordnet, $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_n, \ldots$; dann ist γ_n die Summe derjenigen Glieder $\alpha_l \beta_m$, für welche

$$\lambda_l + \lambda_m = \nu_n$$

ist. Aus dem am Ende der Einleitung angeführten Grunde will ich der formalen Multiplikation nach einer solchen λ_n-Regel nicht nachgehen und begnüge mich damit, darauf aufmerksam zu machen, dass aus der absoluten Konvergenz von (91) und der Konvergenz von (92) jedenfalls nach dem STIELTJES'schen Satze (II) die Konvergenz von (93) folgt.

Über die Reihen (90) will ich nur im Anschluss an eine frühere Arbeit [103]) von mir einige Bemerkungen machen und lege die andere Bezeichnungsweise [104])

$$(94) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+s}}$$

zu Grunde, wo $l_1, l_2, \ldots$ eine Folge positiver, monoton ins Unendliche wachsender Grössen ist. Ich habe in jener Arbeit einen Satz von Herrn PHRAGMÉN dahin verschärft, dass ich nachgewiesen habe: « Wenn

$$f(t) = \sum_{l_n \leq t} c_n = ct + O(t^\gamma), \qquad 0 < \gamma < 1$$

ist und $\varphi(s)$ die durch die Reihe (94) definierte Funktion bezeichnet, so ist

$$\varphi(s) - \frac{c}{s}$$

in der Halbebene $\mathfrak{R}(s) > \gamma - 1$ regulär ». Herr FRANEL teilte mir darauf in einem Briefe folgende etwas vereinfachte Beweisanordnung für diese Tatsache mit. Es ist für

---

103) *Über einen Satz von Herrn* PHRAGMÉN [Acta Mathematica, Bd. XXX (1906), S. 195-201].

104) Hierzu ist nur $l_n = e^{-\lambda_n}$, $c_n = \alpha_n e^{-\lambda_n}$ zu setzen. Der Fall reeller c_n ist natürlich nicht leichter zu behandeln als der Fall komplexer c_n.

$\mathfrak{R}(s) > 0$

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(l_n) - f(l_{n-1})}{l_n^{1+s}} = \sum_{n=1}^{\infty} f(l_n)\left(\frac{1}{l_n^{1+s}} - \frac{1}{l_{n+1}^{1+s}}\right)$$
$$= (1+s)\sum_{n=1}^{\infty} f(l_n)\int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{2+s}} = (1+s)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{f(u)\,du}{u^{2+s}} = (1+s)\int_{l_1}^{\infty}\frac{f(u)\,du}{u^{2+s}}.$$

Hierbei ist der Integrand für $u = l_2, l_3, \ldots$ unstetig. Wird

$$f(u) = cu + g(u)$$

gesetzt, so ist einerseits nach Voraussetzung

$$(95) \qquad g(u) = O(u^{\gamma}),$$

andererseits $\frac{g(u)}{u^{2+s}}$ integrierbar; daher ist für $\mathfrak{R}(s) > 0$

$$\varphi(s) = (1+s)\int_{l_1}^{\infty} \frac{cu + g(u)}{u^{2+s}}\,du = c(1+s)\int_{l_1}^{\infty}\frac{du}{u^{1+s}} + (1+s)\int_{l_1}^{\infty}\frac{g(u)}{u^{2+s}}\,du$$
$$= \frac{c(1+s)}{s}\frac{1}{l_1^s} + (1+s)\int_{l_1}^{\infty}\frac{g(u)}{u^{2+s}}\,du.$$

Hierin ist nach (95) für $\mathfrak{R}(s) > \gamma - 1$

$$\int_{l_1}^{\infty}\frac{g(u)}{u^{2+s}}\,du$$

konvergent und stellt dort eine reguläre Funktion dar, da für $\mathfrak{R}(s) > \gamma - 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) dies Integral gleichmässig konvergiert. Ferner ist

$$\frac{c(1+s)}{s}\frac{1}{l_1^s} - \frac{c}{s}$$

eine ganze transzendente Funktion, sodass die Behauptung bewiesen ist.

Einen anderen Satz dieser Art hatte Herr LERCH [105]) schon vor mehreren Jahren (ohne Mitteilung seines leicht ergänzbaren Beweises) angegeben, nämlich: « Wenn die l_n monoton wachsende positive Grössen sind, für welche

$$l_{n+1} - l_n = O(l_{n+1}^{\gamma}), \qquad 0 < \gamma < 1$$

ist, und $f(s)$ durch die DIRICHLET'sche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_{n+1} - l_n}{l_{n+1}} \frac{1}{l_n^s}$$

definiert wird, so ist

$$f(s) - \frac{1}{s}$$

für $\mathfrak{R}(s) > \gamma - 1$ regulär ».

---

[105]) *Sur les séries de* DIRICHLET [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXXVIII (1899), S. 1310-1311].

§ 10.

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Dirichlet'schen Produktes zweier unendlicher Reihen.

Es besteht der Satz

(X): *Wenn die beiden Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

konvergieren und,

$$\gamma_n = \sum_{l|n} \alpha_l \beta_{\frac{n}{l}}$$

gesetzt,

$$\lim_{n=\infty} n \log n \gamma_n = 0$$

ist, so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n,$$

und es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

Beweis: Für $s > 0$ ergibt sich nach Voraussetzung die (absolute) Konvergenz von (88) und die Konvergenz von (86) und (87), sowie die Giltigkeit der Gleichung (89). Nach einem kürzlich von mir [106]) bewiesenen Satze folgt aus

$$\lim_{n=\infty} n \log n \gamma_n = 0,$$

wenn für abnehmende s

$$\lim_{s=0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^s} = C$$

existiert [was hier wegen (89) der Fall ist], die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$$

und die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = C;$$

damit ist der Satz (X) bewiesen.

---

[106]) *Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes* [Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XVIII (1907), S. 8-28], S. 9.

§ 11.

Über die Multiplikation von Integralen.

Zum Abschluss dieses Teils meiner Betrachtungen will ich nun über die den DIRICHLET'schen Reihen verwandten Integrale [107]) von der Gestalt

$$\int_1^\infty \varphi(t) t^{-s} dt$$

einige Sätze beweisen. $\varphi(t)$ braucht nicht stetig zu sein, sondern sei folgenden weiteren Voraussetzungen [108]) unterworfen: $\varphi(t)$ ist für alle endlichen $t \geqq 1$ als komplexe Funktion reellen Argumentes definiert, liegt in jedem endlichen Intervalle $t = (1 \ldots \omega)$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke und ist über jedes solche Intervall eigentlich integrierbar. Wenn $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ zwei solche Funktionen sind, so lässt sich formal das Produkt der beiden als konvergent vorausgesetzten Integrale

(96) $$\int_1^\infty \varphi(t) t^{-s} dt$$

und

(97) $$\int_1^\infty \psi(t) t^{-s} dt$$

wieder in der Form

(98) $$\int_1^\infty \chi(t) t^{-s} dt$$

darstellen, wo

(99) $$\chi(t) = \int_1^t \varphi(u) \psi\left(\frac{t}{u}\right) \frac{1}{u} du$$

ist. Denn es ist, wenn man (96) und (97) multipliziert,

$$\int_1^\infty \varphi(t) t^{-s} dt \,.\, \int_1^\infty \psi(t) t^{-s} dt = \int_1^\infty \left(\varphi(t) t^{-s} \int_1^\infty \psi(u) u^{-s} du\right) dt$$

$$= \int_1^\infty \left(\varphi(t) t^{-s} \int_t^\infty \psi\left(\frac{v}{t}\right) \frac{v^{-s}}{t^{-s}} \frac{dv}{t}\right) dt = \int_1^\infty \left(\frac{\varphi(t)}{t} \int_t^\infty \psi\left(\frac{v}{t}\right) v^{-s} dv\right) dt,$$

also, falls die Vertauschung der beiden Integrationen erlaubt ist,

$$\int_1^\infty \varphi(t) t^{-s} dt \,.\, \int_1^\infty \psi(t) t^{-s} dt = \int_1^\infty \left(v^{-s} \int_1^v \varphi(t) \psi\left(\frac{v}{t}\right) \frac{1}{t} dt\right) dv,$$

was, wenn $\chi(t)$ die in (99) angegebene Bedeutung hat, das Integral (98) ist.

---

[107]) Vergl. S. 208-218 meiner in Anm. 93 zitierten Arbeit. Die dort mit I''', II''' bezeichneten und Herrn PINCHERLE zugeschriebenen Sätze waren übrigens schon vor ihm in einer Abhandlung von Herrn MITTAG-LEFFLER {*Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène* (Quatrième note) [Acta mathematica, Bd. XXVI (1902), S. 353-391], S. 376-377} auf einem von Herrn PHRAGMÉN angegebenen Wege bewiesen werden.

[108]) In den wichtigsten Anwendungen ist nämlich $\varphi(t)$ nicht überall stetig.

$\chi(t)$ lässt sich auch in der Form

$$\chi(t)=\int_1^t \psi(u)\varphi\left(\frac{t}{u}\right)\frac{1}{u}\,du$$

schreiben.

Es entsteht nun — ähnlich dem Problem der DIRICHLET'schen Multiplikation unendlicher Reihen — die Frage nach hinreichenden Bedingungen für die Giltigkeit der Gleichung

$$\int_1^\infty \varphi(t)t^{-s}\,dt \,.\int_1^\infty \psi(t)t^{-s}\,dt=\int_1^\infty \chi(t)t^{-s}\,dt,$$

über welche ich kurz einige Bemerkungen machen will, ohne sie weit zu verfolgen. Die Variable s ist bei dieser Form der Fragestellung nicht nötig; sondern es handelt sich um die Frage, wann aus der Konvergenz zweier Integrale

$$\int_1^\infty \varphi(t)\,dt \tag{100}$$

und

$$\int_1^\infty \psi(t)\,dt \tag{101}$$

die Konvergenz von

$$\int_1^\infty \chi(t)\,dt \tag{102}$$

und die Gleichung

$$\int_1^\infty \chi(t)\,dt=\int_1^\infty \varphi(t)\,dt \,.\int_1^\infty \psi(t)\,dt \tag{103}$$

folgt, wo

$$\chi(t)=\int_1^t \varphi(u)\psi\left(\frac{t}{u}\right)\frac{1}{u}\,du$$

gesetzt ist. Ich behaupte den Satz, welcher dem STIELTJES'schen Satz (I) entspricht:

(XI): *Wenn* (100) *absolut konvergiert und* (101) *konvergiert, so konvergiert* (102), *und es besteht die Gleichung* (103).

Beweis: Es ist

$$\int_1^\omega \chi(t)\,dt=\int_1^\omega dt\int_1^t \varphi(u)\psi\left(\frac{t}{u}\right)\frac{1}{u}\,du=\int_1^\omega \frac{\varphi(u)}{u}\,du\int_u^\omega \psi\left(\frac{t}{u}\right)dt$$

$$=\int_1^\omega \frac{\varphi(u)}{u}\,du\int_1^{\frac{\omega}{u}} \psi(v)u\,dv=\int_1^\omega \varphi(u)\,du\int_1^{\frac{\omega}{u}}\psi(v)\,dv.$$

Wenn

$$\int_1^\omega \varphi(u)\,du=\Phi(\omega),$$

$$\int_1^\omega \psi(v)\,dv=\Psi(\omega)$$

gesetzt wird, so ist also

$$\int_1^\omega \chi(t)\,dt=\int_1^\omega \varphi(u)\Psi\left(\frac{\omega}{u}\right)du.$$

Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante g, sodass für alle ω

$$\int_1^\omega |\varphi(u)|\,du<g \tag{104}$$

und

(105) $$\left|\int_1^\omega \psi(v)\,dv\right| < g$$

ist, ferner nach Annahme von $\delta > 0$ ein $\nu = \nu(\delta)$, sodass einerseits für alle $q \geqq \nu$ nebst $p > 0$

(106) $$\int_q^{q+p} |\varphi(u)|\,du < \frac{\delta}{6g}$$

und

(107) $$\left|\int_q^{q+p} \psi(v)\,dv\right| < \frac{\delta}{3g}$$

ist, andererseits für alle $\omega \geqq \nu$

(108) $$\left|\int_1^\omega \varphi(u)\,du . \int_1^\omega \psi(v)\,dv - \int_1^\infty \varphi(u)\,du . \int_1^\infty \psi(v)\,dv\right| < \frac{\delta}{3}.$$

Für $\omega \geqq \nu^2$ ist alsdann

$$\int_1^\omega \chi(t)\,dt - \int_1^\omega \varphi(u)\,du . \int_1^\omega \psi(v)\,dv = \int_1^\omega \varphi(u)\left(\Psi\left(\frac{\omega}{u}\right) - \Psi(\omega)\right)du$$
$$= \int_1^{\sqrt{\omega}} \varphi(u)\left(\Psi\left(\frac{\omega}{u}\right) - \Psi(\omega)\right)du + \int_{\sqrt{\omega}}^\omega \varphi(u)\left(\Psi\left(\frac{\omega}{u}\right) - \Psi(\omega)\right)du,$$

also

$$\left|\int_1^\omega \chi(t)\,dt - \int_1^\omega \varphi(u)\,du . \int_1^\omega \psi(v)\,dv\right| \leqq \int_1^{\sqrt{\omega}} |\varphi(u)|\frac{\delta}{3g}\,du + \int_{\sqrt{\omega}}^\omega |\varphi(u)|\,2g\,du$$
$$< g\frac{\delta}{3g} + 2g\frac{\delta}{6g} = \frac{2\delta}{3},$$

$$\left|\int_1^\omega \chi(t)\,dt - \int_1^\infty \varphi(u)\,du . \int_1^\infty \psi(v)\,dv\right| \leqq \left|\int_1^\omega \chi(t)\,dt - \int_1^\omega \varphi(u)\,du . \int_1^\omega \psi(v)\,dv\right|$$
$$+ \left|\int_1^\omega \varphi(u)\,du . \int_1^\omega \psi(v)\,dv - \int_1^\infty \varphi(u)\,du . \int_1^\infty \psi(v)\,dv\right| < \frac{2\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta,$$

womit (103) bewiesen ist.

Die Betrachtungen von Herrn NIELSEN [109]) über die Multiplikation der Integrale

$$\int_0^1 \varphi(t)\,t^{s-1}\,dt,$$

welche durch die Substitution $t = \frac{1}{u}$ unmittelbar wegen

$$\int_0^1 \varphi(t)\,t^{s-1}\,dt = \int_1^\infty \frac{1}{u}\varphi\left(\frac{1}{u}\right)u^{-s}\,du$$

in den obigen Typus übergehen, sind auch unter der von Herrn NIELSEN gemachten Annahme der abteilungsweisen Stetigkeit seiner Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ unzulässig. Seine Vertauschung zweier Integrationen ist nämlich mit Rücksicht auf die untere Grenze 0 der betreffenden Integrale (welche meiner oberen Grenze ∞ entspricht) ungerechtfertigt. Zur Rechtfertigung jener Vertauschung zitiert Herr NIELSEN zwar bei

[109]) Auf S. 118-120 seines in Anm. 94 zitierten Handbuches.

den Worten «einem bekannten Satze zufolge» STOLZ' *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung,* Bd. III [110]); da er jedoch (im Gegensatz zu seinen sonst sehr ausführlichen Zitaten) keine nähere Angabe über die Stelle dieses Buches macht, kann der Leser nicht mit Sicherheit feststellen, welchen richtigen Satz der Integralrechnung Herr NIELSEN falsch angewendet hat.

Ich will jetzt auch ein Analogon zum STIELTJES'schen Satz (II) für Integrale entwickeln.

(XII): *Es sei* (100) *absolut konvergent,* (101) *konvergent; man betrachte alle Integrale von der Form*

$$J = \int_1^\omega \varphi(u)\,du \int_1^{f(\omega,u)} \psi(v)\,dv,$$

wo $\omega \geqq 1$ *endlich ist und* $f(\omega, u)$ *für jedes* $\omega \geqq 1$ nebst $1 \leqq u \leqq \omega$ *einen endlichen Wert* $\geqq 1$ *hat. Dann gibt es nach Annahme von* $\delta > 0$ *ein* $\lambda = \lambda(\delta)$, *sodass für alle* $\omega \geqq \lambda$, *wenn überdies für* $1 \leqq u \leqq \lambda$

$$f(\omega, u) \geqq \lambda$$

ist,

$$\left| J - \int_1^\infty \varphi(t)\,dt \,.\, \int_1^\infty \psi(t)\,dt \right| < \delta$$

ist.

In (XII) ist offenbar (XI) als Spezialfall

$$f(\omega, u) = \frac{\omega}{u}$$

enthalten.

Beweis von (XII): g und $\nu(\delta)$ seien im Sinne der Relationen (104), (105), (106), (107) und (108) bestimmt. Ich nehme nun $\lambda = \nu$, $\omega \geqq \lambda$ sowie für $1 \leqq u \leqq \lambda$

$$f(\omega, u) \geqq \lambda$$

an; dann ist

$$\left| J - \int_1^\omega \varphi(t)\,dt \,.\, \int_1^\omega \psi(t)\,dt \right| = \left| \int_1^\omega \varphi(t) \Big(\Psi\big(f(\omega, t)\big) - \Psi(\omega) \Big)\,dt \right|$$

$$\leqq \left| \int_1^\lambda \varphi(t) \Big(\Psi\big(f(\omega, t)\big) - \Psi(\omega) \Big)\,dt \right| + \left| \int_\lambda^\omega \varphi(t) \Big(\Psi\big(f(\omega, t)\big) - \Psi(\omega) \Big)\,dt \right|$$

$$\leqq \int_1^\lambda |\varphi(t)| \frac{\delta}{3g}\,dt + \int_\lambda^\omega |\varphi(t)|\, 2g\,dt < \frac{\delta}{3g} g + 2g \frac{\delta}{6g} = \frac{2\delta}{3},$$

$$\left| J - \int_1^\infty \varphi(t)\,dt \cdot \int_1^\infty \psi(t)\,dt \right|$$

$$\leqq \left| J - \int_1^\omega \varphi(t)\,dt \,.\, \int_1^\omega \psi(t)\,dt \right| + \left| \int_1^\omega \varphi(t)\,dt \,.\, \int_1^\omega \psi(t)\,dt - \int_1^\infty \varphi(t)\,dt \,.\, \int_1^\infty \psi(t)\,dt \right|$$

$$< \frac{2\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta,$$

womit der Satz (XII) bewiesen ist.

---

[110]) Leipzig, 1899.

§ 12.

Eine Anwendung der Multiplikation Dirichlet'scher Reihen auf die Darstellung der Anzahl der Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers.

Ich will jetzt zu den DIRICHLET'schen Reihen zurückkehren und mich spezielleren Problemen zuwenden, die sich zunächst noch auf die Multiplikation beziehen. In einem wichtigen Fall hatte ich in einer früheren Arbeit [111]) bewiesen, dass das DIRICHLET'sche Produkt einer konvergenten und einer divergenten Reihe konvergiert, und will jetzt hierfür einen einfacheren Beweis angeben, der auch etwas weniger aus der Primzahltheorie voraussetzt. Es handelt sich (in meiner gegenwärtigen Ausdrucksweise) um das DIRICHLET'sche Produkt der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

mit der divergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n},$$

wo $F(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Norm eines Ideals in einem gegebenen algebraischen Zahlkörper bezeichnet. Wie ich a. a. O. bewies, ist diese Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n},$$

welche im Falle des quadratischen Körpers der Diskriminante D mit der bekannten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

identisch ist, für jeden Körper konvergent und $= gh$, wo h die Anzahl der Idealklassen und g eine andere durch den Körper wohlbestimmte positive Konstante ist.

Für diesen Satz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} = gh,$$

wo

$$c_n = \sum_{k|n} \mu(k) F\left(\frac{n}{k}\right)$$

ist, will ich nun eine neue Beweisanordnung angeben. Dieser neue Konvergenzbeweis der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}$$

setzt aus der Primzahltheorie nur die von mir bewiesene Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1 \tag{109}$$

---

[111]) *Über die Darstellung der Anzahl der Idealklassen eines algebraischen Körpers durch eine unendliche Reihe* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXVII (1904), S. 167-174].

als bekannt voraus, während mein damaliger Beweis meinen weitergehenden Satz

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) = O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

zugrunde legte. Es wird ausserdem die aus der WEBER'schen [112]) Relation

$$(110) \qquad H(x) = \sum_{n=1}^{x} F(n) = g h x + O(x^{1-\frac{1}{\nu}}),$$

wo ν den Grad des Körpers bezeichnet, leicht fliessende Folgerung benutzt:

$$(111) \qquad R(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n} = g h \log x + \beta + O(x^{-\frac{1}{\nu}}),$$

wo β eine Konstante bezeichnet; aus (110) folgt in der Tat

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{F(n) - g h}{n} = \sum_{n=1}^{x} \frac{H(n) - g h n - \big(H(n-1) - g h (n-1)\big)}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \big(H(n) - g h n\big)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{H(x) - g h x}{x+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \frac{O(n^{1-\frac{1}{\nu}})}{n(n+1)} + \frac{O(x^{1-\frac{1}{\nu}})}{x+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{O(n^{1-\frac{1}{\nu}})}{n(n+1)} - \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{O(n^{1-\frac{1}{\nu}})}{n(n+1)} + O(x^{-\frac{1}{\nu}})$$

$$= \gamma + O\sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\nu}}} + O(x^{-\frac{1}{\nu}}) = \gamma + O(x^{1-\frac{1}{\nu}}),$$

wo γ konstant ist, also

$$R(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n} = g h \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} + \gamma + O(x^{-\frac{1}{\nu}}) = g h \log x + (g h C + \gamma) + O(x^{-\frac{1}{\nu}})$$

$$(111) \qquad = g h \log x + \beta + O(x^{-\frac{1}{\nu}}).$$

Aus (109) folgt einerseits die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n};$$

dieser Wert muss alsdann 0 sein, und es ergibt sich genauer, wenn

$$1 + \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n) \log n}{n} = \varepsilon(x)$$

gesetzt wird,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n} = - \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = - \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)}{\log n}$$

$$= - \sum_{n=x+1}^{\infty} \varepsilon(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\varepsilon(x)}{\log(x+1)}$$

$$(112) \qquad = \left\{\frac{1}{\log x}\right\}.$$

---

[112]) *Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung* [Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1896, S. 275-281]; *Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern.* (Zweite Abhandlung) [Mathematische Annalen, Bd. XLIX (1897), S. 83-100], S. 89-94.

Nach diesen Vorbemerkungen über bekannte Sätze (111) und (112) wird sich die Behauptung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} = g h$$

leicht folgendermassen ergeben. Es ist

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{c_n}{n} = \sum_{lm \leqq x} \frac{F(l)}{l} \frac{\mu(m)}{m} = \sum_{l=1}^{\sqrt{x}} \frac{F(l)}{l} g\left(\frac{x}{l}\right) + \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m} R\left(\frac{x}{m}\right) - R(\sqrt{x}) g(\sqrt{x})$$

$$= \left\{\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{F(l)}{l} \frac{1}{\log(\sqrt{x})}\right\} + \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m} \left(g h \log \frac{x}{m} + \beta + O(x^{-\frac{1}{2\nu}})\right) + O\left(\log(\sqrt{x})\right) \left\{\frac{1}{\log(\sqrt{x})}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{\log x} \cdot \log x\right\} + (g h \log x + \beta) g(\sqrt{x}) - g h \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{\mu(m) \log m}{m} + O(\log x . x^{-\frac{1}{2\nu}}) + \{1\}$$

$$= \{1\} + \left\{\log x \cdot \frac{1}{\log(\sqrt{x})}\right\} + g h + \{1\} + \{1\} = g h + \{1\},$$

was zu beweisen war.

§ 13.

Neuer Beweis einer Vermutung von Herrn Lehmer.

Eine andere Anwendung jener Multiplikationskunstgriffe ist folgende. In einer früheren Arbeit [113]) hatte ich durch eine komplexe Integration und unter Benutzung von Eigenschaften der Zetafunktion und verwandter Funktionen zuerst den Beweis dafür erbringen können, dass

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} 2^{\rho(n)} \Theta(n)$$

existiert, wo $\rho(n)$ die Anzahl der Primfaktoren von n bezeichnet und $\Theta(n) = 1$ ist, wenn alle Primfaktoren von n die Form $4m + 3$ haben, während sonst $\Theta(n) = 0$ ist [114]). Ich kann auch heute jenen Satz nicht elementar beweisen; der Zweck dieses Paragraphen ist vielmehr zu zeigen, dass er aus einem später [115]) von mir mit denselben transzendenten Hilfsmitteln bewiesenen Satz elementar folgt (sodass man also zum Beweise aller Sätze der Primzahltheorie hier jene Kette transzendenter Schlüsse einmal

[113]) *Bemerkungen zu Herrn* D. N. LEHMER's *Abhandlung in Bd. 22 dieses Journals, S. 293-335* [American Journal of Mathematics, Bd. XXVI (1904), S. 209-222].

[114]) Auf die a. a. O. bewiesenen zwei anderen Sätze, die den Progressionen $3m+2$ und $6m+5$ entsprechen, ist natürlich die neue Beweisanordnung des Textes auch anwendbar.

[115]) Meine in Anm. 15 zitierte Arbeit erschien zwar früher als die in Anm. 113 genannte, ist aber später verfasst und in Druck gegeben, wie aus den Datierungen 23.5.1904 und 28.10.1903 hervorgeht. Ich hätte also damals die LEHMER'sche Vermutung noch nicht wie im Text beweisen können.

ersparen kann), nämlich aus der Gleichung

$$(113)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} = \frac{4}{\pi} + \left\{\frac{1}{\log x}\right\},$$

von der schon in § 2, N°. 4, b) die Rede war [116]).

Wird zur Abkürzung

$$2^{\rho(n)}\Theta(n) = c_n$$

gesetzt, so ist für $s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^s}.$$

Dies folgt unmittelbar aus den Gleichungen

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\prod\limits_q \left(1 - \frac{1}{q^s}\right)\prod\limits_r \left(1 - \frac{1}{r^s}\right)}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^s} = \prod_q \left(1 + \frac{1}{q^s}\right)\prod_r \left(1 - \frac{1}{r^s}\right),$$

wo q die Primzahlen $4m + 3$, r die Primzahlen $4m + 1$ durchläuft; denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \prod_q \left(1 + \frac{2}{q^s} + \frac{2}{q^{2s}} + \frac{2}{q^{3s}} + \cdots\right) = \prod_q \frac{1 + \frac{1}{q^s}}{1 - \frac{1}{q^s}}.$$

Wird

$$\sum_{ln \leqq x} \chi(n)\mu(n) = \sum_{l=1}^{x} \sum_{n=1}^{\frac{x}{l}} \chi(n)\mu(n) = S_x$$

gesetzt, so ist S_x die Summe der ersten x Glieder in dem DIRICHLET'schen Produkt der Reihen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^s}$$

für $s = 0$, und man erhält weiter

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = S_x - S_{\frac{x}{2}}.$$

Ich setze

$$-\frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} = \varepsilon(x),$$

$$\sum_{n=1}^{x} \chi(n)\mu(n) = \psi(x).$$

---

[116]) Dort wurde sogar die Restabschätzung $O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)$ verwendet. Ein Blick auf die dortigen Rechnungen zeigt, dass $\left\{\frac{1}{\log x}\right\}$ auch genügt hätte; da es sich dort überhaupt nur darum handelte, eine noch nicht bewiesene Gleichung zu beweisen, war es gleichgiltig, welche bekannten Sätze angewendet wurden.

Aus (113) folgt

$$\varepsilon(x) = \left\{\frac{1}{\log x}\right\},$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{x} n\big(\varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)\big) = \sum_{n=1}^{x} \varepsilon(n)\big(n - (n+1)\big) + \frac{4}{\pi} + \varepsilon(x)(x+1)$$

$$= \left\{\sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n}\right\} + \left\{\frac{x}{\log x}\right\} = \left\{\frac{x}{\log x}\right\},$$

und nunmehr schliesse ich so:

$$S_x = \sum_{l=1}^{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\frac{x}{l}} \chi(n)\mu(n) + \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \chi(n)\mu(n) \sum_{l=1}^{\frac{x}{n}} 1 - \sum_{l=1}^{\sqrt{x}} 1 . \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \chi(n)\mu(n)$$

$$= \sum_{l=1}^{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \chi(n)\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right] - [\sqrt{x}]\psi(\sqrt{x})$$

$$= \left\{\sum_{l=1}^{\sqrt{x}} \frac{x}{l} \frac{1}{\log(\sqrt{x})}\right\} + x\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} + O(\sqrt{x}) + \left\{\sqrt{x}\frac{\sqrt{x}}{\log(\sqrt{x})}\right\}$$

$$= \left\{\frac{x}{\log x} \log x\right\} + \frac{4}{\pi} x + \{x\} + O(\sqrt{x}) + \left\{\frac{x}{\log x}\right\} = \frac{4}{\pi} x + \{x\},$$

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = S_x - S_{\frac{x}{2}} = \frac{2}{\pi} x + \{x\},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 14.

Lösung eines Problems von Herrn Kluyver.

Herr KLUYVER legte mir in einem Briefe ein Problem vor, welches im einfachsten Falle (den ich der Deutlichkeit wegen vorausschicken will) folgendermassen lautet.

Es sei $\rho(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n. Herr KLUYVER fragte mich, ob ich die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\rho(n)}{n} = 0 \tag{114}$$

beweisen könne, deren Richtigkeit er auf Grund heuristischer Erwägungen vermutete.

Dass im Falle der Konvergenz der Reihe auf der linken Seite von (114) ihr Wert $= 0$ ist, ist leicht einzusehen, z. B. auf Grund der für $s > 1$ giltigen Gleichung

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\rho(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \tag{115}$$

wo

$\gamma(n) = 1$ für Primzahlen und Primzahlpotenzen,

$\gamma(n) = 0$ für alle [117]) anderen n

[117]) Auch für $n = 1$.

ist; (115) beruht auf der offenbar zutreffenden Tatsache, dass

$$\sum_{l \mid n} \gamma(l)\mu\left(\frac{n}{l}\right)$$

nur für quadratfreie, von 1 verschiedene $n = p_1 \ldots p_\rho$ von Null verschieden und alsdann

$$= \gamma(p_1)\mu\left(\frac{n}{p_1}\right) + \cdots + \gamma(p_\rho)\mu\left(\frac{n}{p_\rho}\right) = \rho(-1)^{\rho-1} = -\mu(n)\rho(n)$$

ist. Wenn s gegen 1 abnimmt, so ist bekanntlich

$$\lim_{s=1} \frac{1}{\log \frac{1}{s-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)}{n^s} = 1,$$

und

$$\lim_{s=1} \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1;$$

da somit auf der rechten Seite von (115) der erste Faktor logarithmisch unendlich, der zweite von der ersten Ordnung Null wird, so ist

$$\lim_{s=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\rho(n)}{n^s} = 0,$$

woraus im Falle der Konvergenz der Reihe auf der linken Seite von (114) die Richtigkeit von (114) folgt [118]).

Ich bin nun imstande, die Konvergenz jener Reihe, also des DIRICHLET'schen Produktes der divergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)}{n}$$

mit der bedingt konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

nachzuweisen und stütze mich dabei erstens auf einen Satz von Herrn MERTENS [119]), nach welchem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\gamma(n)}{n} = \log\log x + A + \{1\}$$

ist, wo A eine Konstante bezeichnet, zweitens auf die von mir bewiesene Gleichung

$$g(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n} = O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right).$$

---

[118]) Ich lege keinen Wert darauf, die Schnelligkeit der Konvergenz der im Folgenden behandelten Reihen genauer abzuschätzen (was natürlich auf dem Wege des Textes geschehen kann), sondern löse genau die mir von Herrn KLUYVER vorgelegte Aufgabe, die Konvergenz jener Reihen zu beweisen.

[119]) Vergl. die in Anm. 32 zitierte Abhandlung, S. 52. Die Summe der den Primzahlpotenzen entsprechenden Zusatzglieder zu der MERTENS'schen Summe $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$ nähert sich offenbar für $x = \infty$ einer endlichen Grenze.

Daraus folgt

$$-\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)\rho(n)}{n}=\sum_{n=1}^{\frac{x}{\log x}}\frac{\gamma(n)}{n}\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}}\frac{\mu(m)}{m}+\sum_{n=\left[\frac{x}{\log x}\right]+1}^{x}\frac{\gamma(n)}{n}\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}}\frac{\mu(m)}{m}$$

$$=\sum_{n=1}^{\frac{x}{\log x}}\frac{\gamma(n)}{n}g\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{n=\left[\frac{x}{\log x}\right]+1}^{x}\frac{\gamma(n)}{n}g\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$=O\sum_{n=1}^{\frac{x}{\log x}}\frac{\gamma(n)}{n}\frac{1}{(\log\log x)^2}+O\sum_{n=\left[\frac{x}{\log x}\right]+1}^{x}\frac{\gamma(n)}{n}$$

$$=O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2}f(x)\right)+O\left(f(x)-f\left(\frac{x}{\log x}\right)\right)$$

$$=O\left(\frac{\log\log x}{(\log\log x)^2}\right)+O\left(\log\log x+A+\{1\}-\log\log\frac{x}{\log x}-A+\{1\}\right)$$

$$=\{1\}+O\left(\log\frac{\log x}{\log x-\log\log x}\right)=\{1\},$$

womit (114) bewiesen ist.

Herr Kluyver legte mir allgemeiner folgende Vermutung vor, die ich auch mit meinen Hilfsmitteln beweisen konnte. Er vermutete, dass allgemein für jede arithmetische Progression die Reihe

$$(116)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mu(mk+h)\rho(mk+h)}{mk+h}=\sum_{n\equiv h}\frac{\mu(n)\rho(n)}{n}$$

konvergiert. Mein Beweis hierfür lautet folgendermassen.

Für $s>1$ und jeden Charakter modulo k besteht wegen

$$\sum_{l|n}\gamma(l)\chi(l)\mu\left(\frac{n}{l}\right)\chi\left(\frac{n}{l}\right)=\chi(n)\sum_{l|n}\gamma(l)\mu\left(\frac{n}{l}\right)=-\mu(n)\rho(n)\chi(n)$$

die Gleichung

$$(117)\qquad -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\rho(n)\chi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma(n)\chi(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}.$$

a) Wenn $\chi(n)$ der Hauptcharakter ist, folgt die Konvergenz von

$$(118)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\rho(n)\chi(n)}{n}$$

aus (117) genau wie oben die Konvergenz der linken Seite von (114) aus (115); denn, wenn $\sum'$ eine Summe bezeichnet, in welcher n nur die zu k teilerfremden Zahlen durchläuft, so ist einerseits

$$(119)\qquad \sum_{n=1}^{x}\frac{\gamma(n)\chi(n)}{n}=\sum_{n=1}^{x}{}'\frac{\gamma(n)}{n}=\log\log x+A'+\{1\}$$

und andererseits [120])

(120)
$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n} = \sum_{n=1}^{x}{}' \frac{\mu(n)}{n} = O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right).$$

Aus (119) und (120) ergibt sich also analog zum Obigen für den Hauptcharakter die Konvergenz von (118).

b) Wenn $\chi(n)$ nicht der Hauptcharakter ist, so ist einerseits

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)\chi(n)}{n}$$

konvergent, da Herr MERTENS [121]) die Konvergenz von

$$\sum_{p} \frac{\chi(p)}{p}$$

nachgewiesen hat; andrerseits ist nach meiner Relation

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv h_1}} \frac{\mu(n)}{n} = \sum_{n \equiv h_1} \frac{\mu(n)}{n} + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n} + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right).$$

Wird

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\gamma(n)\chi(n)}{n} = S_x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)\chi(n)}{n} = S,$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n} = T_x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n} = T$$

---

[120]) Denn aus der Relation

$$\sum_{n \equiv h_1} \mu(n) = O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

folgt

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv h_1}} \frac{\mu(n)}{n} - \sum_{n \equiv h_1} \frac{\mu(n)}{n} = O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right),$$

also hier

$$\sum_{n=1}^{x}{}' \frac{\mu(n)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(n)}{n} = O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right),$$

und es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(n)}{n} = \lim_{s=1} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(n)}{n^s} = \lim_{s=1} \frac{\prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}{\prod_{p \mid k}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} = 0.$$

[121]) Auf S. 61 seiner in Anm. 32 zitierten Arbeit.

gesetzt, so ist also

$$S_x = S + \{1\},$$

$$T_x = T + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right).$$

Daraus folgt

$$-\sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)\rho(n)\chi(n)}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log x}} \frac{\gamma(n)\chi(n)}{n} \sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{\mu(m)\chi(m)}{m} + \sum_{n=\left[\frac{x}{\log x}\right]+1}^{x} \frac{\gamma(n)\chi(n)}{n} \sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{\mu(m)\chi(m)}{m}$$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log x}} \frac{\gamma(n)\chi(n)}{n} T_{\frac{x}{n}} + \sum_{n=\left[\frac{x}{\log x}\right]+1}^{x} \frac{\gamma(n)\chi(n)}{n} T_{\frac{x}{n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log x}} \frac{\gamma(n)\chi(n)}{n} \left(T + O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2}\right)\right) + O \sum_{n=\left[\frac{x}{\log x}\right]+1}^{x} \frac{\gamma(n)}{n}$$

$$= T(S + \{1\}) + O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2} \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log x}} \frac{\gamma(n)}{n}\right) + O\left(f(x) - f\left(\frac{x}{\log x}\right)\right)$$

$$= TS + \{1\} + O\left(\frac{\log\log x}{(\log\log x)^2}\right) + \{1\} = ST + \{1\},$$

sodass für jeden Charakter die Konvergenz von

$$(118) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\rho(n)\chi(n)}{n}$$

bewiesen ist.

Nunmehr müssen zwei Fälle unterschieden werden.

1) Es werde in der vorgelegten Progression $mk + h$

$$(k, h) = 1$$

angenommen. h' repräsentiere die zu h inverse Restklasse modulo k. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\rho(n)\chi_\nu(n)}{n},$$

welche für jeden Charakter, d. h. für $\nu = 1, 2, \ldots, \varphi(k)$ konvergiert, werde mit $\chi_\nu(h')$ multipliziert; alsdann mögen diese $\varphi(k)$ Reihen gliedweise addiert werden. So ergibt sich die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\rho(n)\sum_{\nu=1}^{\varphi(k)}\chi_\nu(nh')}{n} = \sum_{n\equiv h} \frac{\mu(n)\rho(n)\varphi(k)}{n},$$

also der vorgelegten Reihe (116).

2) Es sei

$$(k, h) = d > 1$$

und es werde

$$\frac{k}{d} = K,$$

$$\frac{h}{d} = H,$$

$$\frac{(K, d)\varphi(d)}{\varphi(K, d)} = r$$

gesetzt. Es ergibt sich unter Anwendung einer elementar-zahlentheoretischen Betrachtung, die ich a. a. O. [122]) ausgeführt habe, wenn $\sum'$ bezeichnet, dass $mK + H$ zu d teilerfremd sein soll, für $s > 1$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mk+h)\rho(mk+h)}{(mk+h)^s} = \frac{\mu(d)}{d^s} \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{\mu(mK+H)\big(\rho(d) + \rho(mK+H)\big)}{(mK+H)^s}$$

$$(121) \qquad = \frac{\mu(d)\rho(d)}{d^s} \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mk+h_\lambda)}{(mk+h_\lambda)^s} + \frac{\mu(d)}{d^s} \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mk+h_\lambda)\rho(mk+h_\lambda)}{(mk+h_\lambda)^s},$$

wo h_λ für $\lambda = 1, 2, \ldots, r$ gewisse zu k teilerfremde, zwischen 0 und k gelegene Zahlen durchläuft. Für $s = 1$ ist nun auf der rechten Seite jede Summe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mk+h_\lambda)}{mk+h_\lambda}$$

nach meiner früheren Arbeit und jede Summe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mk+h_\lambda)\rho(mk+h_\lambda)}{mk+h_\lambda}$$

nach dem obigen konvergent. Die Gleichung (121) ergibt also, von rechts nach links gelesen, die Konvergenz von

$$(116) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mk+h)\rho(mk+h)}{mk+h} = \sum_{n \equiv h} \frac{\mu(n)\rho(n)}{n}$$

auch im vorliegendem Falle, dass k und h nicht teilerfremd sind.

Herr Kluyver teilte mir weiter die folgenden von ihm heuristisch erhaltenen Relationen mit, welche ich beweisen kann:

$$(122) \qquad \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\rho(n)}{n} P\left(\frac{n\vartheta}{2\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)}{n} \sin n\vartheta,$$

$$(123) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\rho(n)}{n} \log\left|\sin\frac{n\vartheta}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)}{n} \cos n\vartheta,$$

wo

$$P(y) = y - [y] - \tfrac{1}{2} \text{ für nicht ganze } y,$$
$$P(y) = 0 \text{ für ganze } y$$

und $\frac{\vartheta}{2\pi}$ eine rationale Zahl $\frac{a}{k}$ ist, deren Nenner k zum Zähler a teilerfremd ist und

[122]) Auf S. 75-76 der in Anm. 15 zitierten Arbeit.

überdies in (123) nicht quadratfrei sein darf. (123) ist so zu verstehen, dass links die Glieder, in welchen n einen quadratischen Teiler hat, garnicht auftreten [123]).

Was zunächst die rechten Seiten von (122) und (123) betrifft, so folgt ihre Konvergenz aus Schlüssen, welche schon Herrn FATOU [124]) für die Reihe

$$(124) \qquad \sum_p \frac{y^p}{p}$$

auf dem Einheitskreise für einen anderen Zweck angestellt hat. Auf der rechten Seite von (122) und (123) steht nämlich der imaginäre und reelle Teil der über alle Primzahlen und Primzahlpotenzen erstreckten Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{y^n}{n}$$

für $y = e^{\vartheta i}$. Da die Primzahlpotenzen jedenfalls einen konvergenten Beitrag liefern, ist also gerade die Konvergenz des imaginären Teils von (124) für $y = e^{\frac{2\pi a}{k} i}$, $(a, k) = 1$ und des reellen Teils von (124) für $y = e^{\frac{2\pi a}{k} i}$, $(a, k) = 1$ und nicht quadratfreies k zu beweisen. Herr FATOU wendet hierzu mit Recht die MERTENS'sche [125]) Relation

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv h}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi(k)} \log\log x + A + \{1\}$$

an und erhält [126]), wenn $h_1, h_2, \ldots, h_{\varphi(k)}$ ein vollständiges Restsystem teilerfremder Zahlen modulo k ist und

$$e^{\frac{2\pi a i}{k}} = \varepsilon$$

gesetzt wird,

$$\sum_{p \leqq x} \frac{e^{p\vartheta i}}{p} = \sum_{p \leqq x} \frac{e^{\frac{2\pi p a i}{k}}}{p} = \sum_{p \leqq x} \frac{\varepsilon^p}{p} = \sum_{\substack{p \leqq x \\ p | k}} \frac{\varepsilon^p}{p} + \varepsilon^{h_1} \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv h_1}} \frac{1}{p} + \cdots + \varepsilon^{h_{\varphi(k)}} \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv h_{\varphi(k)}}} \frac{1}{p}$$

$$= (\varepsilon^{h_1} + \cdots + \varepsilon^{h_{\varphi(k)}}) \frac{1}{\varphi(k)} \log\log x + B + \{1\},$$

wo B konstant ist, also, da $\varepsilon^{h_1}, \ldots, \varepsilon^{h_{\varphi(k)}}$ die primitiven $k$ten Einheitswurzeln sind,

$$(125) \qquad \sum_{p \leqq x} \frac{\varepsilon^p}{p} = \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} \log\log x + B + \{1\}.$$

Im Punkte $y = \varepsilon$ konvergiert also nach (125) der imaginäre Teil der Reihe (124) für alle k und der reelle Teil von (124) für jedes nicht quadratfreie k.

---

[123]) Dass der Logarithmus für gewisse n sinnlos sein kann, schadet also nichts; für quadratfreie n kann dies der gemachten Annahme gemäss nicht eintreten.

[124]) *Sur les séries entières à coefficients entiers* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXXXVIII (1904), S. 342-344], S. 343-344.

[125]) Vergl. S. 62 seiner in Anm. 32 zitierten Abhandlung.

[126]) In seiner zitierten Note brauchte er nur den Fall zu behandeln, dass k eine Primzahl ist.

In (122) und (123) konvergieren also die rechten Seiten schon auf Grund der älteren MERTENS'schen Primzahlsätze. Die Konvergenz der linken Seiten folgt erst aus den obigen Ergebnissen. In der Tat haben die Funktionen $P\left(\frac{n\mathfrak{z}}{2\pi}\right)$ und $\log\left(\left|\sin\frac{n\mathfrak{z}}{2}\right|\right)$ die Periode k, sodass jene linken Seiten durch Multiplikation endlich vieler konvergenter Reihen des Typus (116) mit konstanten Faktoren und gliedweise Addition entstehen, also konvergent sind.

Aus der Konvergenz ihrer linken und ihrer rechten Seiten folgt nun zwar die Richtigkeit der Gleichungen (122) und (123) noch nicht; aber es ist jetzt möglich, elementar den Beweis zu Ende zu führen.

Für $s > 1$ ist wegen der absoluten Konvergenz, falls h irgend eine ganze Zahl ist,

$$\sum_{m\equiv h}\frac{\mu(m)\rho(m)}{m^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{hn}}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s},$$

wo

$$c_n=\sum_{\substack{m\mid n\\ m\equiv h}}\mu(m)\rho(m)\varepsilon^{h\frac{n}{m}}=\varepsilon^n\sum_{\substack{m\mid n\\ m\equiv h}}\mu(m)\rho(m)$$

ist. Wird über $h=1, 2, \ldots, k$ summiert, so ist also

$$\sum_{h=1}^{k}\sum_{m\equiv h}\frac{\mu(m)\rho(m)}{m^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{hn}}{n^s}=\sum_{h=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n\sum\limits_{\substack{m\mid n\\ m\equiv h}}\mu(m)\rho(m)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n^s}\sum_{h=1}^{k}\sum_{\substack{m\mid n\\ m\equiv h}}\mu(m)\rho(m)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n^s}\sum_{m\mid n}\mu(m)\rho(m)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n^s}\gamma(n),$$

$$(126)\qquad -\sum_{h=1}^{k}\sum_{m\equiv h}\frac{\mu(m)\rho(m)}{m^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{hn}}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma(n)\varepsilon^n}{n^s}.$$

1) Es habe k einen quadratischen Teiler. In (126) konvergiert für $s=1$ die rechte Seite, wie oben festgestellt wurde; ferner konvergiert in jedem der endlich vielen Glieder links der erste Faktor

$$\sum_{m\equiv h}\frac{\mu(m)\rho(m)}{m},$$

wie gleichfalls oben bewiesen wurde, und [da zufolge des sonst verschwindenden ersten Faktors nur solche h in Betracht kommen, für welche (h, k) quadratfrei ist] der zweite Faktor

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{hn}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi hna}{k}}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi hna}{k}}{n}$$

$$=-\log\left(2\left|\sin\frac{\pi ha}{k}\right|\right)-\pi iP\left(\frac{ha}{k}\right)$$

$$=-\log\left(2\left|\sin\frac{h\mathfrak{z}}{2}\right|\right)-\pi iP\left(\frac{h\mathfrak{z}}{2\pi}\right)$$

konvergiert ebenfalls; (126) ergibt also beim Grenzübergang für $s = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)\varepsilon^n}{n} = \sum_{h=1}^{k} \sum_{m\equiv h} \frac{\mu(m)\rho(m)}{m} \log\left(2\left|\sin\frac{h\mathfrak{z}}{2}\right|\right) + \pi i \sum_{h=1}^{k}\sum_{m\equiv h} \frac{\mu(m)\rho(m)}{m} P\left(\frac{h\mathfrak{z}}{2\pi}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)\rho(m)}{m} \log\left(2\left|\sin\frac{m\mathfrak{z}}{2}\right|\right) + \pi i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)\rho(m)}{m} P\left(\frac{m\mathfrak{z}}{2\pi}\right),$$

also wegen (114)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)\varepsilon^n}{n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)\rho(m)}{m} \log\left|\sin\frac{m\mathfrak{z}}{2}\right| + \pi i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)\rho(m)}{m} P\left(\frac{m\mathfrak{z}}{2\pi}\right),$$

woraus durch Trennung des Reellen und Imaginären die behaupteten Gleichungen (122) und (123) folgen.

2) Es sei k quadratfrei. Dann werde in (126) zuvörderst für $s > 1$ der imaginäre Teil genommen:

$$-\sum_{h=1}^{k}\sum_{m\equiv h} \frac{\mu(m)\rho(m)}{m^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin hn\mathfrak{z}}{n^s} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)\sin n\mathfrak{z}}{n^s}.$$

Alsdann kann wegen der Konvergenz aller auftretenden Reihen zur Grenze $s = 1$ übergegangen verden, und man erhält die behauptete Relation (122).

§ 15.

Über das analytische Verhalten der Reihen $\sum_p x^p$ und $\sum_p \frac{1}{p^s}$.

Herr FATOU [127]) hatte für Primzahlen k die Relation (125), die alsdann

$$\sum_{p\leq x} \frac{e^{\frac{2\pi p a i}{k}}}{p} = -\frac{1}{\varphi(k)} \log\log x + B + \{1\}$$

lautet, benutzt, um aus ihr zu schliessen: Die unendliche Reihe

$$f(y) = \sum_p \frac{y^p}{p}$$

divergiert eigentlich für $y = e^{\frac{2\pi a i}{k}}$, indem ihr reeller Teil $-\infty$ ist; wenn y auf dem Radius $\rho e^{\frac{2\pi a i}{k}}$ sich dem Rande des Einheitskreises nähert, nähert sich also $f(v)$ nicht einem endlichen Grenzwert; die auf der Peripherie dicht verteilten Punkte $e^{\frac{2\pi a i}{k}}$ (k Primzahl) sind also singuläre Punkte der analytischen Funktion $f(y)$; $f(y)$ ist also über den Einheitskreis nicht fortsetzbar, und es ist daher auch die Funktion

$$yf'(y) = \sum_p y^p = y^2 + y^3 + y^5 + \cdots$$

nicht fortsetzbar. Wie Herr FATOU erwähnt, hatte ich gelegentlich einmal [128]) bemerkt,

[127]) l. c., S. 344.

[128]) Auf S. 102 der Abhandlung *Ueber die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der* TSCHEBYSCHEF'*schen Primzahlentheorie auf das Problem der Vertheilung der Primideale* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXV (1903), S. 64-188].

die für $\mathfrak{R}(s) > 1$ giltige Gleichung

(127) $$\sum_p \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \sum_p e^{-px} x^{s-1} dx$$

sei für die Fortsetzung der durch die linke Seite von (127) definierten Funktion $P(s)$ ungeeignet, während die Gleichung

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx$$

nach RIEMANN die Fortsetzbarkeit von $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ liefert; denn es sei nicht bekannt, ob

(128) $$\sum_p y^p$$

über den Einheitskreis fortsetzbar ist. Da nun Herr FATOU die Nichtfortsetzbarkeit von (128) bewiesen hat, ist gewiss (127) ungeeignet für jenen Zweck; ich hatte übrigens damals leicht auf anderem Wege [129]) die Fortsetzbarkeit der Funktion $P(s)$ feststellen können [130]). Immerhin habe ich inzwischen erkannt, dass Herrn FATOU's spezielle Beweismethode zum Nachweise der Nichtfortsetzbarkeit von (128) unnötig ist, indem diese Tatsache aus einem ganz allgemeinen Satze von Herrn FABRY [131]) über Potenzreihen folgt, also mit dem Umstande, dass die p Primzahlen sind, nichts zu tun hat.

Der Satz von Herrn FABRY, der kürzlich durch Herrn FABER [132]) auf neuem und einfacherem Wege bewiesen worden ist, lautet: « Die Koeffizienten einer im Einheitskreise konvergenten Potenzreihe

$$f(y) = \sum_{n=0}^\infty a_n y^n$$

mögen folgende Eigenschaften haben. Es gibt eine positive Konstante λ und unendlich viele Indizes $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ derart, dass

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = 1,$$

ferner

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{s_\nu}{m_\nu} = 0$$

ist, wo s_ν die Anzahl der Indizes n zwischen $m_\nu(1-\lambda)$ und $m_\nu(1+\lambda)$ bezeichnet,

---

[129]) S. 102-104.

[130]) Natürlich liesse sich a posteriori dieser Nachweis auch so wenden, dass er an die Gleichung (127) anknüpft; doch wäre dies nicht der einfachste Weg.

[131]) *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux* [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III, Bd. XIII (1896), S. 367-399], S. 381-382; *Sur les séries de* TAYLOR *qui ont une infinité de points singuliers* [Acta mathematica, Bd. XXII (1899), S. 65-87], S. 86.

[132]) *Über die Nicht-Fortsetzbarkeit gewisser Potenzreihen* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXIV (1904), S. 63-74], S. 70.

für welche a_n von Null verschieden ist. Dann hat $f(y)$ den Einheitskreis zur natürlichen Grenze ».

Hieraus folgt speziell [133]: « Die Potenzreihe

$$f(y) = \sum_p a_p y^p,$$

wo p eine Folge positiver ganzer Zahlen durchläuft, ist über ihren Konvergenzekreis nicht fortsetzbar, wenn die Anzahl der p von 1 bis x, dividiert durch x, für $x = \infty$ den Grenzwert 0 hat ». Denn, wenn der Radius des Konvergenzkreises gleich 1 vorausgesetzt wird (was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist), so lässt sich aus den p eine Folge $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ auswählen, für welche

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = 1$$

ist; falls nun $\lambda = 1$ gewählt wird, so ist gewiss

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{s_\nu}{m_\nu} = 0,$$

da s_ν nicht grösser als die Anzahl der p bis $2m_\nu$ ist.

Daraus folgt offenbar ganz speziell die Nichtfortsetzbarkeit von

$$f(y) = \sum_p y^p,$$

wo p die Primzahlen durchläuft. Aber auch die Nichtfortsetzbarkeit der a. a. O. [134] erwähnten Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}} y^{N\mathfrak{p}}, \tag{129}$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale eines algebraischen Zahlkörpers durchläuft, ergibt sich so. Denn es ist

$$\sum_{\mathfrak{p}} y^{N\mathfrak{p}} = \sum_{n=1}^{\infty} G(n) y^n,$$

wo die Anzahl $G(n)$ der Darstellungen von n als Norm eines Primideals nur für Primzahlen und Primzahlpotenzen von 0 verschieden sein kann.

Da von der Reihe

$$\sum_p y^p \tag{128}$$

die Rede war, möchte ich noch besonders hervorheben, dass TSCHEBYSCHEF [135] im Jahre

---

[133]) Vergl. FABER, *Über Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXVI (1906), S. 581-583], S. 581.

[134]) Vergl. S. 102 meiner in Anm. 128 erwähnten Abhandlung.

[135]) *Lettre de M. le professeur* TCHÉBYCHEV *à M.* FUSS, *sur un nouveau théorème relatif aux nombres premiers contenus dans les formes* $4n + 1$ *et* $4n + 3$ [Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, Bd. XI, S. 208; *Œuvres*, Bd. I (1899), S. 697].

1853 angab, beweisen zu können: « Die Reihe

$$e^{-3c} - e^{-5c} + e^{-7c} + e^{-11c} - e^{-13c} - e^{-17c} + e^{-19c} + e^{-23c} + \cdots$$

(wo den Primzahlen $4m+3$ das positive, den Primzahlen $4m+1$ das negative Vorzeichen entspricht) hat für positives zu Null abnehmendes c den Grenzwert $+\infty$ ». Diese Behauptung bedeutet für die Reihe (128), dass bei Annäherung von y auf dem Radius $-\rho i$ an den Punkt $-i$ ihr imaginärer Teil

$$\frac{1}{i}\sum_{p=3}^{\infty} y^p = \rho^3 - \rho^5 + \rho^7 + \rho^{11} - \cdots$$

über alle Grenzen wächst. Da bis heute nicht entschieden ist, ob dies der Fall ist oder nicht, so ist zu vermuten, dass TSCHEBYSCHEF's unpublizierte Begründung seiner Behauptung einen Irrtum enthalten hat.

Über die dem beliebigen Körper vom Grade $k \geqq 2$ entsprechende Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}, \tag{130}$$

welche durch die Identität

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} \sum_{\mathfrak{p}} e^{-xN\mathfrak{p}} x^{s-1}\,dx$$

mit (129) zusammenhängt, hatte ich seinerzeit [136]) auch ohne Kenntnis über das analytische Verhalten von (129) auf Grund der für $\mathfrak{R}(s) > 1$ giltigen Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} = \log\zeta_\kappa(s) - \left(\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{3s}} + \cdots\right)$$

zeigen können, dass die durch (130) definierte analytische Funktion über die Gerade $\mathfrak{R}(s) = 1$ hinaus fortsetzbar ist und für $\mathfrak{R}(s) > 1 - \frac{1}{k}$ mit Ausnahme der dem Streifen $1 - \frac{1}{k} < \mathfrak{R}(s) < 1$ etwa angehörigen Nullstellen von $\zeta_\kappa(s)$ und des Punktes $s = 1$ regulär ist. Ebenso benutzte ich für den natürlichen Rationalitätsbereich die bekannten für $\mathfrak{R}(s) > 1$ giltigen Gleichungen

$$\log\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{p}\frac{1}{p^{ms}}$$

und

$$\sum_{p}\frac{1}{p^s} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m}\log\zeta(ms), \tag{131}$$

um zu schliessen, dass die für $\mathfrak{R}(s) > 1$ durch

$$\sum_{p}\frac{1}{p^s}$$

definierte Funktion $P(s)$ in jedem Punkte der Halbebene $\mathfrak{R}(s) > 0$ regulär ist, welcher kein aliquoter Teil von $s = 1$ oder von einer Nullstelle von $\zeta(s)$ ist.

---

136) l. c., S. 104-105.

Unter der Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{R}(s) > \tfrac{1}{2}$$

hatte Herr KLUYVER [137]) schon früher aus der bekannten Gleichung (131) ohne nähere Ausführung geschlossen: $P(s)$ würde für $\mathfrak{R}(s) > 0$ mit Ausnahme unendlich vieler logarithmischer Singularitäten regulär und über die Gerade $\mathfrak{R}(s) = 0$ nicht fortsetzbar sein. Diese Behauptungen Herrn KLUYVER's sind richtig, wie ich im Folgenden durch Rekonstruktion seines Gedankenganges bestätigen will. Auf Grund der RIEMANN'schen Vermutung haben alle Nullstellen von $\zeta(s)$, welche der Halbebene $\mathfrak{R}(s) > 0$ angehören, den reellen Teil $\frac{1}{2}$. Auf jedem Strahl, der vom Punkt 0 aus durch eine solche Nullstelle ins Unendliche gezogen ist, liegt also nur je eine Nullstelle. Die aliquoten m ten Teile jeder solchen Nullstelle sind also für alle quadratfreien m Pole von $P'(s)$; ich spreche, um mehrdeutige Funktionen zu vermeiden, von $P'(s)$ und knüpfe die Schlüsse an die Gleichung

$$P'(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \frac{\zeta'(ms)}{\zeta(ms)} \tag{132}$$

an, welche zeigt, dass $P'(s)$ für $\mathfrak{R}(s) > 0$ meromorph ist. Wenn also dargetan werden kann, dass die aliquoten quadratfreien Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$ sich an jeder Stelle der Achse des Imaginären häufen, so ist unter Herrn KLUYVER's Annahme die Nichtfortsetzbarkeit bewiesen. Wegen der Symmetrie braucht dies nur für den oberen Teil der Achse gezeigt zu werden, und es ist nur nötig, unter der Annahme, dass die Nullstellen in der oberen Halbebene

$$\frac{1}{2} + \beta_1 i, \quad \frac{1}{2} + \beta_2 i, \ldots, \frac{1}{2} + \beta_n i, \ldots \quad (\beta_1 < \beta_2 < \ldots)$$

sind, festzustellen, dass die Zahlenmenge

$$\frac{\beta_n}{m} \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots;\ m = 1, 2, 3, 5, \ldots)$$

die Strecke $(0 \ldots \infty)$ dicht erfüllt; denn alsdann gehören der Umgebung

$$0 < \mathfrak{R}(s) \leqq \delta, \qquad a - \delta \leqq \mathfrak{J}(s) \leqq a + \delta$$

des Punktes ai $(a > 0)$ gewiss unendlich viele quadratfreie Teile $s = \mathfrak{R}(s) + i\mathfrak{J}(s)$ von Nullstellen der Zetafunktion an.

Nun hat Herr VON MANGOLDT [138]) für die Anzahl [139]) $\psi(t)$ der Nullstellen $\alpha + \beta i$

---

137) *Benaderingsformules betreffende de priemgetallen beneden eene gegeven grens* [Koninglijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Verslag van de Gewone Vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeeling, Bd. VIII (1900), S. 672-682], S. 678, Fussnote 2.

138) *Zu* RIEMANN'*s Abhandlung « Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse »* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXIV (1895), S. 255-305], S. 255-273. Übrigens hat Herr VON MANGOLDT neuerdings in (133) $O(\log^2 t)$ durch $O(\log t)$ ersetzt {*Zur Verteilung der Nullstellen der* RIEMANN'*schen Funktion* $\xi(t)$ [Mathematische Annalen, Bd. LX (1905), S. 1-19], S. 1-11}; doch ist für den vorliegenden Zweck bereits die Schärfe von (133) nicht erforderlich.

139) Hierbei sind mehrfache Nullstellen entsprechend oft zu zählen.

von $\zeta(s)$, für welche

$$0 < \beta \leqq t$$

ist, bewiesen, dass

$$(133) \qquad \psi(t) = \frac{1}{2\pi} t \log t - \frac{1 + \log(2\pi)}{2\pi} t + O(\log^2 t)$$

ist. Wenn also u und v gegeben sind, wo

$$v > u > 0$$

ist, so ist für grosses m die Anzahl der Nullstellen $\alpha_n + \beta_n i$ von $\zeta(s)$, für welche

$$u < \frac{\beta_n}{m} \leqq v$$

ist,

$$\begin{aligned} &= \psi(vm) - \psi(um) \\ &= \frac{1}{2\pi} vm \log m + O(m) - \frac{1}{2\pi} um \log m + O(m) \\ &= \frac{v-u}{2\pi} m \log m + O(m), \end{aligned}$$

also von einem gewissen m an positiv. Die aliquoten quadratfreien Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$ häufen sich also in der Nähe jeder Stelle der Achse des Imaginären. Unter der von ihm gemachten Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung konnte also Herr KLUYVER mit Recht schliessen, dass $P(s)$ über die Gerade $\mathfrak{R}(s) = 0$ nicht fortsetzbar ist.

Auf Grund des zur Zeit gesicherten Besitzes in der Theorie der Zetafunktion muss ich jedoch die Frage als offen bezeichnen, ob $P(s)$ über jene Gerade fortsetzbar ist oder nicht. Zwar ist der Punkt $s = 0$ sicher eine wesentlich singuläre Stelle von $P'(s)$, da er Häufungsstelle der Pole $s = \frac{1}{m}$ (m quadratfrei) von $P'(s)$ ist. Aber auf einem nicht reellen Strahl vom Nullpunkt in die rechte Halbebene könnte mehr als eine Nullstelle von $\zeta(s)$ liegen; auf der rechten Seite von (132) haben also eventuell mehrere (natürlich nur endlich viele) Glieder einen Pol erster Ordnung, sodass ein aliquoter quadratfreier Teil einer in der Halbebene $\mathfrak{R}(s) > 0$ gelegenen Nullstelle von $\zeta(s)$ auch reguläre Stelle von $P'(s)$ sein kann und die obigen Schlüsse versagen. Die singulären Punkte von $P'(s)$ in der Halbebene $\mathfrak{R}(s) > 0$ (sie sind Pole erster Ordnung) sind eben ausser den Punkten $\frac{1}{m}$ für quadratfreies m diejenigen quadratfreien Teile s_0 von einer Nullstelle von $\zeta(s)$, für welche

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\mu(m_\alpha)}{m_\alpha} \rho_\alpha \neq 0$$

ist, wo $m_1 s_0, \ldots, m_\nu s_0$ die Nullstellen von $\zeta(s)$ sind, welche Multipla von s_0 sind, und ρ_α die Ordnung der Nullstelle $m_\alpha s_0$ bezeichnet. In dem von Herrn KLUYVER behandelten Fall war stets $\nu = 1$, also jeder quadratfreie aliquote Teil singulär und darum $P(s)$ nicht fortsetzbar.

Wenn also die Zukunft lehren sollte, dass die für $\mathfrak{R}(s) > 1$ durch die DIRI-

CHLET'sche Reihe

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$$

definierte analytische Funktion über die Achse des Imaginären fortsetzbar ist, so würde damit die Unrichtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung bewiesen sein, nach welcher alle nicht reellen Nullstellen von $\zeta(s)$ den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben.

Berlin, den 27. Mai 1907.

EDMUND LANDAU.

INHALTSVERZEICHNIS.