

# Démonstration nouvelle du théorème de M. Casey par rapport aux cercles qui tou- chent à trois cercles donnés.

(par M. A. CAYLEY prof. à Cambridge).

---

LES deux problèmes que voici sont identiques:

1° Trouver un cercle qui touche à trois cercles donnés;

2° Trouver une 0- sphère (sphère à rayon zéro) qui passe par trois points donnés (en espace).

En effet, en dénotant par  $z$  une constante donnée (qui peut être  $=0$ ) si dans le premier problème on prend  $a_1, b_1, i(z-c_1)$ ;  $a_2, b_2, i(z-c_2)$ ;  $a_3, b_3, i(z-c_3)$  pour les coordonnées des centres et les rayons des trois cercles donnés, et de même  $A, B, i(z-C)$  pour les coordonnées du centre et le rayon du cercle cherché, les équations des cercles donnés seront:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=0,$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=0,$$

$$(x-a_3)^2+(y-b_3)^2+(z-c_3)^2=0.$$

Les conditions de contact, en supposant, pour fixer les idées, que les cercles donnés soient intérieurs au cercle cherché, seront:

$$(A-a_1)^2+(B-b_1)^2+(C-c_1)^2=0,$$

$$(A-a_2)^2+(B-b_2)^2+(C-c_2)^2=0,$$

$$(A-a_3)^2+(B-b_3)^2+(C-c_3)^2=0,$$

et, en supposant que  $A, B, C$  soient déterminés par ces conditions, on aura:

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=0$$

pour équation du cercle cherché. En éliminant  $A, B, C$  entre les quatre équations on obtient une équation laquelle est (comme nous allons voir) de

l'ordre 4 en  $x, y$ , (et  $z$ ), et qui représente ainsi l'ensemble de deux cercles dont chacun touche aux trois cercles donnés. Il est évident que dans le second problème, en prenant  $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$  pour les coordonnées des trois points donnés, et  $A, B, C$  pour les coordonnées du centre de la 0-sphère, les mêmes formules ont lieu, et l'équation finale en  $(x, y, z)$  sera celle de l'ensemble de deux 0-sphères qui passent chacune par les trois points donnés.

On obtient l'équation de la 0-sphère passant par trois points donnés, en cherchant la relation qui existe entre les coordonnées de quatre points sur une même 0-sphère. Considérons cinq points quelconques 1, 2, 3, 4, 5, et soient  $\overline{12}$ , etc., les distances des points 1 et 2, etc. On a entre les distances des cinq points la relation connue

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & \overline{15}^2 \\ 1 & \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 & \overline{25}^2 \\ 1 & \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \overline{34}^2 & \overline{35}^2 \\ 1 & \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \overline{43}^2 & 0 & \overline{45}^2 \\ 1 & \overline{51}^2 & \overline{52}^2 & \overline{53}^2 & \overline{54}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et delà, en supposant que 5 est le centre d'une 0-sphère qui passe par les points 1, 2, 3, 4 (ce qui donne  $\overline{51} = \overline{52} = \overline{53} = \overline{54} = 0$ ), on obtient la relation cherchée

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \overline{34}^2 \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \overline{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

entre les coordonnées de quatre points quelconques 1, 2, 3, 4 sur une même 0-sphère; cette équation est de l'ordre 4 par rapport aux coordonnées de l'un quelconque des points; donc en prenant  $(x, y, z)$  pour les coordonnées du point 4, l'équation sera celle de l'ensemble de deux 0-sphères qui passent chacune par les trois points 1, 2, 3. L'équation est la forme rationnelle de celle-ci

$$\overline{23} \cdot \overline{14} + \overline{31} \cdot \overline{24} + \overline{12} \cdot \overline{34} = 0,$$

et en supposant, comme auparavant, que  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$ ,  $(a_3, b_3, c_3)$  soient les coordonnées des points 1, 2, 3, les valeurs des expressions qui y entrent sont

$$\begin{aligned}\overline{23} &= \sqrt{(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (c_2 - c_3)^2}, & \overline{14} &= \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2}, \\ \overline{31} &= \sqrt{(a_3 - a_1)^2 + (b_3 - b_1)^2 + (c_3 - c_1)^2}, & \overline{24} &= \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2}, \\ \overline{12} &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}, & \overline{34} &= \sqrt{(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2}.\end{aligned}$$

On se souvient que dans le premier problème  $z$  est une constante, et que les rayons des cercles donnés sont  $i(z - c_1)$ ,  $i(z - c_2)$ ,  $i(z - c_3)$ ; donc  $\overline{23}$ ,  $\overline{31}$ ,  $\overline{12}$  représentent les distances tangentielles directes des cercles 2 et 3, 3 et 1 et 2, et l'on reconnaît ainsi dans l'équation  $\overline{23} \cdot \overline{14} + \overline{31} \cdot \overline{24} + \overline{12} \cdot \overline{34} = 0$ , l'équation  $\sqrt{l_1} s_1 + \sqrt{l_2} s_2 + \sqrt{l_3} s_3 = 0$  qu'a donnée M. CASEY (*Trans. Irish Acad.* 1866) pour équation de l'ensemble de deux cercles qui touchent chacun aux trois cercles donnés  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0$ ,  $S_3 = 0$ , les coefficients  $\sqrt{l_1}$ ,  $\sqrt{l_2}$ ,  $\sqrt{l_3}$  étant respectivement les distances tangentielles directes des cercles 2 et 3, 3 et 1, 1 et 2. En substituant pour les trois distances tangentielles directes, les systèmes composés de deux distances inverses et une seule distance directe, on obtient les équations de trois autres paires de cercles, en tout les équations des quatre paires de cercles, qui touchent aux trois cercles donnés.

Je remarque qu'en menant par le centre d'un cercle perpendiculairement à son plan, en l'un ou l'autre sens, une distance  $= i \times \text{rayon}$ , les extrémités de ces distances sont les centres des deux 0-sphères qui passent par le cercle: les points peuvent s'appeler les *contre-foyers* (en anglais *antifoci*) du cercle. Cela étant, on a la construction imaginaire que voici, pour les cercles qui touchent à trois cercles donnés. Prenez  $(A, A')$ ,  $(B, B')$ ,  $(C, C')$  les contre-foyers des trois cercles donnés; soient  $K, L$  les contre-foyers du cercle par les points  $(A, B, C)$  et de même  $K', L'$  les contre-foyers du cercle par les points  $(A', B', C')$ ,  $K, K'$  et de même  $L, L'$  étant des points symétriquement situés par rapport au plan des cercles donnés: alors  $K, K'$  seront les contre-foyers d'un cercle qui touche aux trois cercles donnés, et  $L, L'$  les contre-foyers d'un autre cercle qui touche aux trois cercles donnés: et si, au lieu des combinaisons  $(A, B, C)$ ,  $(A', B', C')$ , on considère les autres combinaisons  $(A, B', C')$ ,  $(A', B, C)$ , etc., on obtient de même les autres trois paires de cercles qui touchent aux trois cercles donnés.