

Teorema relativo alle linee di curvatura delle superficie e sue applicazioni.

(Memoria di GEMINIANO PIRONDINI, a Parma.)

Sopra una superficie qualunque S siano u, v i parametri delle linee di curvatura, (x, y, z) le coordinate d'un punto qualunque, $(\cos a, \cos b, \cos c)$, $(\cos a', \cos b', \cos c')$, $(\cos a'', \cos b'', \cos c'')$ i coseni direttivi rispettivamente della normale alla superficie e delle tangenti alle linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$, r', r'' i raggi di curvatura delle sezioni piane normali, tangenti alle linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$ rispettivamente.

Posto:

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad G = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2,$$

dalla teoria generale delle superficie si hanno le seguenti formole:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E} \cos a'; \quad \frac{\partial \cos a}{\partial u} = -\frac{\sqrt{E}}{r'} \cos a'; \quad \frac{\partial \cos a'}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{r'} \cos a - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cos a'';$$

$$\frac{\partial \cos a''}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cos a'$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G} \cos a''; \quad \frac{\partial \cos a}{\partial v} = -\frac{\sqrt{G}}{r''} \cos a''; \quad \frac{\partial \cos a'}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cos a'';$$

$$\frac{\partial \cos a''}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r''} \cos a - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cos a',$$

ed altre analoghe relative alle altre coordinate y, z .

§ 1.

Sia ora una sfera S di raggio unitario col centro nell'origine delle coordinate ed S_1 una superficie qualsivoglia rappresentata sulla sfera col metodo di GAUSS. È noto che, se S_1 non è ad area minima, solamente le linee di curvatura hanno per immagini un doppio sistema di linee ortogonali; le linee di curvatura di S_1 e le loro immagini sferiche siano rappresentate dalle equazioni $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ Siano (x, y, z) , (x_1, y_1, z_1) le coordinate di due punti corrispondenti A, A_1 , delle superficie S, S_1 e siano H, M, N le coordinate di A_1 rapporto agli assi formati dal raggio OA della sfera e dalle tangenti in A alle linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$; se relativamente alla sfera S conserviamo le notazioni dianzi stabilite, avremo:

$$x_1 = x + H \cos a + M \cos a' + N \cos a'', \quad \text{ecc.}$$

dalle quali, coll'avere riguardo alle formole precedenti, si deduce:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left(\frac{\partial H}{\partial u} + M \sqrt{E} \right) \cos a + \left(\sqrt{E} - H \sqrt{E} + \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{N}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \cos a' - \\ &\quad - \left(\frac{M}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} \right) \cos a'' \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \left(\frac{\partial H}{\partial v} + N \sqrt{G} \right) \cos a - \left(\frac{N}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} \right) \cos a' + \\ &\quad + \left(\sqrt{G} - H \sqrt{G} + \frac{\partial N}{\partial v} + \frac{M}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) \cos a'', \quad \text{ecc.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

La condizione che le normali di S e di S_1 siano parallele è espressa dall'essere:

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \cos a = 0, \quad \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \cos a = 0,$$

le quali si trasformano nelle altre:

$$\frac{\partial H}{\partial u} + M \sqrt{E} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial v} + N \sqrt{G} = 0,$$

dalle quali si deduce

$$M = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial H}{\partial u}, \quad N = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial H}{\partial v}.$$

In forza di queste relazioni le (1) divengono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left[\sqrt{E} - H\sqrt{E} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) - \frac{1}{G} \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right] \cos a' + \\ &\quad + \left[\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial H}{\partial v} \right) \right] \cos a'' \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \left[\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] \cos a' + \\ &\quad + \left[\sqrt{G} - H\sqrt{G} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial H}{\partial v} \right) - \frac{1}{E} \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right] \cos a'', \text{ ecc.}\end{aligned}$$

Introduciamo la condizione che sulla S_1 le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ siano parallele alle linee sferiche u , v ; ciò ha luogo sempre e soltanto quando:

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \cos a'' = 0, \quad \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \cos a' = 0,$$

le quali relazioni divengono:

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial H}{\partial v} \right) = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0.$$

Se sviluppiamo le derivazioni indicate, queste due eguaglianze si trasformano entrambe nella seguente:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} = \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{E} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{G}. \quad (2)$$

Possiamo così enunciare il teorema generale « Se $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ è il quadrato dell'elemento lineare di una sfera di raggio unitario riferito a due sistemi di linee ortogonali, le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + H \cos a - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial H}{\partial u} \cos a' - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial H}{\partial v} \cos a'' \\ y_1 &= y + H \cos b - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial H}{\partial u} \cos b' - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial H}{\partial v} \cos b'' \\ z_1 &= z + H \cos c - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial H}{\partial u} \cos c' - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial H}{\partial v} \cos c'', \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dove H è soggetta alla sola condizione di verificare l'equazione differenziale (2), danno le coordinate d'un punto qualunque di una superficie in cui le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sono le linee di curvatura ed hanno inoltre per immagini sferiche le linee coordinate prese. »

§ 2.

Di questo teorema passiamo a fare varie applicazioni, mostrando come esso sia di grande utilità in molti casi. Per mezzo di esso possiamo dire che la determinazione delle superficie per le quali le linee di curvatura hanno particolari proprietà si riduce alla determinazione delle loro immagini sferiche e all'integrazione dell'equazione a derivate parziali lineari (2), la quale è compresa in quelle studiate da EULERO.

L'equazione (2) può scriversi sotto l'una o l'altra delle forme seguenti:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial H}{\partial v} - H \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right) - \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \left(\frac{\partial H}{\partial v} - H \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right) - \\ & - H \left(\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial H}{\partial u} - H \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \right) - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \left(\frac{\partial H}{\partial u} - H \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \right) - \\ & - H \left(\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \right) = 0, \end{aligned}$$

e quindi essa si riduce a un'equazione a derivate ordinarie del 1.° ordine e lineare quando sia soddisfatta l'una o l'altra delle seguenti condizioni:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = 0 \\ & \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Per vedere a quali condizioni geometriche corrispondono le relazioni (4), consideriamo la prima di esse che si può scrivere:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}}{\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Moltiplicando ambi i membri per du ed integrando, viene:

$$\log \left(\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right) = \log V + \log \sqrt{G},$$

essendo V una funzione arbitraria di v ; di qui si deduce:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = V,$$

la quale dimostra che sulla sfera le linee $v = \text{cost.}$ hanno curvatura geodetica costante e conseguentemente sono dei cerchi. Parimente si dimostra che la seconda delle (4) esprime che le linee sferiche $u = \text{cost.}$ sono dei cerchi; il problema dunque della determinazione delle superficie in cui le linee di curvatura siano curve determinate si riduce, nella parte che si riferisce alla determinazione della funzione H , alle quadrature quando si metta la condizione che le linee di uno di tali sistemi siano piane; la questione è tutta ridotta a trovare l'espressione dell'elemento lineare della sfera riferito a due sistemi ortogonali di linee, uno dei quali costituito da cerchi; e questo è stato dimostrato per altra via anche dal chiar. prof. DINI (*).

Per dare un esempio, determiniamo quelle superficie in cui le linee di curvatura di un sistema sono situate in piani seganti tutti la superficie sotto il medesimo angolo e inclinati di un angolo costante a una retta fissa.

Siccome il piano del cerchio immagine di una linea di curvatura piana è parallelo al piano di tale linea, così dovremo anzitutto determinare l'elemento lineare della sfera riferito a due sistemi di linee ortogonali, l'uno dei quali è formato da cerchi eguali inclinati di un angolo costante a una retta fissa (asse delle z).

Siccome poi le traiettorie ortogonali di questi cerchi sono pure curve eguali che risultano dalla rotazione di una qualunque di esse intorno all'asse delle z , così determiniamo quelle curve sferiche le quali, ruotando intorno a un diametro fisso, hanno per traiettorie ortogonali dei cerchi.

Le coordinate ξ , η , ζ dei punti di una linea descritta sopra una sfera di raggio unitario, espresse per l'arco σ , sono date così:

$$\xi = \sin \varphi \cos \left(\int \frac{\sqrt{1 - \varphi'^2}}{\sin \varphi} d\sigma \right), \quad \eta = \sin \varphi \sin \left(\int \frac{\sqrt{1 - \varphi'^2}}{\sin \varphi} d\sigma \right), \quad \zeta = \cos \varphi,$$

essendo φ una funzione arbitraria di σ .

Tale curva, se si fa ruotare intorno all'asse delle z , genera una sfera di cui un punto qualunque ha per coordinate:

$$x = \xi \cos v - \eta \sin v, \quad y = \xi \sin v + \eta \cos v, \quad z = \zeta.$$

(*) Annali della società italiana delle Scienze, S. III. T. II.
Annali di Matematica, tomo XVI.

Queste relazioni ci conducono alle altre:

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \right)^2 = 1, \quad F = \Sigma \frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{1 - \varphi^2} \sin \varphi, \quad G = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 = \sin^2 \varphi.$$

Denotando quindi con un ρ_t il raggio di curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle $v = \text{cost.}$ ed osservando che tale raggio deve essere eguale a una costante $\frac{1}{a}$, avremo:

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \right]_\sigma = a,$$

cioè:

$$\frac{d}{d\sigma} \log \left(\sin \varphi \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) = a,$$

d'onde:

$$\sin \varphi \frac{d\varphi}{d\sigma} = -b e^{a\sigma},$$

con b costante. Moltiplicando ambi i membri per $d\sigma$ ed integrando, si ha:

$$\cos \varphi = b e^{a\sigma} + c.$$

Nel caso che fosse $a = 0$, si avrebbe:

$$\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = -m,$$

la quale, coll'integrazione, dà:

$$\cos \varphi = \zeta = m\sigma = n.$$

Dunque « le sole curve sferiche che, ruotando intorno a un diametro della sfera, hanno per traiettorie ortogonali dei cerchi massimi sono le eliche sferiche aventi per asse quel diametro ».

Senza togliere nulla alla generalità potendo fare nella formola precedente $c = 0$, avremo per le coordinate d'un punto qualunque della linea determinata:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{1 - b^2 e^{2a\sigma}} \cdot \cos \left[\int \frac{\sqrt{1 - b^2(1 + a^2)e^{2a\sigma}}}{1 - b^2 e^{2a\sigma}} d\sigma \right] \\ \eta &= \sqrt{1 - b^2 e^{2a\sigma}} \cdot \sin \left[\int \frac{\sqrt{1 - b^2(1 + a^2)e^{2a\sigma}}}{1 - b^2 e^{2a\sigma}} d\sigma \right] \\ \zeta &= b e^{a\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

in forza delle quali equazioni il quadrato dell'elemento lineare della sfera, ri-

ferito alle linee $\sigma = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ acquista la forma:

$$ds^2 = d\sigma^2 + 2\sqrt{1 - b^2(1 + a^2)e^{2a\sigma}} \cdot d\sigma dv + (1 - b^2 e^{2a\sigma}) dv^2.$$

Conservando le linee $v = \text{cost.}$, sostituiamo alle $\sigma = \text{cost.}$ (paralleli) le linee $u = \text{cost.}$ traiettorie ortogonali delle $v = \text{cost.}$; si vede facilmente che ponendo

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial u} du + \frac{\partial \sigma}{\partial v} dv,$$

la condizione d'ortogonalità delle linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ porta alla condizione

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = -\sqrt{1 - b^2(1 + a^2)e^{2a\sigma}},$$

da cui si deduce

$$\int \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial v} dv}{\sqrt{1 - b^2(1 + a^2)e^{2a\sigma}}} = u - v, \quad (6)$$

avendo sostituito alla funzione arbitraria di u , che sarebbe venuta dall'integrazione, la variabile u stessa, il che non nuoce alla generalità.

L'elemento lineare allora diviene:

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)^2 du^2 + a^2 b^2 e^{2a\sigma} \cdot dv^2. \quad (7)$$

Per potere da (7) eliminare completamente σ , occorre fare la quadratura (6); ciò si fa facilmente, poichè ponendo

$$b\sqrt{1 + a^2 e^{a\sigma}} = \text{sen } x,$$

quell'integrale diviene:

$$\frac{1}{a} \int \frac{dx}{\text{sen } x} = \frac{1}{a} \log \text{tang } \frac{1}{2} x = u - v,$$

d'onde:

$$\text{tang } \frac{1}{2} x = e^{a(u-v)} = \frac{1 - \sqrt{1 - b^2(1 + a^2)e^{2a\sigma}}}{b\sqrt{1 + a^2 e^{a\sigma}}}.$$

Risolvendo questa eguaglianza rapporto a $e^{a\sigma}$, abbiamo:

$$e^{a\sigma} = \frac{1}{b\sqrt{1 + a^2}} \cdot \frac{1}{\cos h \cdot a(u - v)},$$

da cui è facile ricavare:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = -\text{tang } h \cdot a(u - v),$$

e quindi l'elemento (7) acquista la forma:

$$ds^2 = \operatorname{tang} h \cdot a(u-v) du^2 + \frac{a^2}{1+a^2} \frac{dv^2}{\cos h \cdot a(u-v)}. \quad (8)$$

Volendo ora determinare la funzione H , si osserverà che nel nostro caso le linee sferiche $u = \text{cost.}$ sono cerchi e quindi è soddisfatta la seconda delle (4); l'equazione da cui vuole dedotta H diviene allora:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial H}{\partial u} - H \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \right) - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \left(\frac{\partial H}{\partial u} - H \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \right) = 0,$$

la quale, con una prima integrazione offre subito:

$$\log \left(\frac{\partial H}{\partial u} - H \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \right) = \log U + \log \sqrt{E},$$

d'onde:

$$\frac{\partial H}{\partial u} - H \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = U \sqrt{E},$$

con U funzione arbitraria di u .

Questa è un'equazione differenziale lineare del 1.° ordine e quindi, integrandola col noto metodo, ci dà:

$$H = \sqrt{G} \left[V + \int \frac{U \sqrt{E}}{\sqrt{G}} du \right],$$

essendo V una funzione arbitraria di v . Sostituendo in questa a \sqrt{E} , \sqrt{G} i loro valori già determinati e cambiando poi $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} V$ in V , avremo:

$$H = \frac{1}{\cos h \cdot a(u-v)} \left\{ V + \int U \operatorname{sen} h \cdot a(u-v) du \right\}, \quad (9)$$

d'onde:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \operatorname{tang} h \cdot a(u-v) \left\{ U - \frac{a}{\cos h \cdot a(u-v)} \left(V + \int U \operatorname{sen} h \cdot a(u-v) du \right) \right\} \\ \frac{\partial H}{\partial v} &= \frac{1}{\cos h \cdot a(u-v)} \left\{ V' + a \int U \cos h \cdot a(u-v) du + a \operatorname{tang} h \cdot a(u-v) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(V + \int U \operatorname{sen} h \cdot a(u-v) du \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Per avere l'espressione delle ξ , η , ζ date dalle (5), bisogna eseguire la quadratura che entra in queste formole; avendosi:

$$e^{as} = \frac{1}{b \sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{1}{\cos h \cdot a(u-v)},$$

d'onde:

$$d\sigma = -\operatorname{tang.} h \cdot a(u-v) d(u-v),$$

avremo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1-b^2(1+a^2)e^{2a\sigma}}}{1-b^2e^{2a\sigma}} d\sigma &= -(1+a^2) \int \frac{\sqrt{\cos h^2 \cdot a(u-v)-1}}{(1+a^2)\cos h^2 \cdot a(u-v)-1} \cdot \operatorname{sen} ha(u-v) d(u-v) = \\ &= -(1+a^2) \int \frac{\operatorname{sen} h^2 \cdot a(u-v)}{(1+a^2)\cos h^2 \cdot a(u-v)-1} d(u-v). \end{aligned}$$

Ponendo:

$$\cos h \cdot a(u-v) = -\frac{1+y^2}{2y},$$

la funzione da integrarsi diviene razionale in y , ed allora applicando il noto processo d'integrazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} \omega = \int \frac{\sqrt{1-b^2(1+a^2)e^{2a\sigma}}}{1-b^2e^{2a\sigma}} d\sigma &= \frac{1}{2a} \left\{ [\cos h \cdot a(u-v) - \operatorname{sen} h \cdot a(u-v)]^4 - \right. \\ &\quad - 4[\cos h \cdot a(u-v) - \operatorname{sen} h \cdot a(u-v)]^2 + \\ &\quad + \log [\cos h \cdot a(u-v) - \operatorname{sen} h \cdot a(u-v)]^2 + \\ &\quad \left. + 2a \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(a^2+1)[\cos h \cdot a(u-v) - \operatorname{sen} h \cdot a(u-v)]^2 + (a^2-1)}{2a} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Notando inoltre che:

$$1-b^2e^{2a\sigma} = 1 - \frac{1}{1+a^2} \cdot \frac{1}{\cos h^2 \cdot a(u-v)} = \frac{(1+a^2)\cos h^2 \cdot a(u-v)-1}{(1+a^2)\cos h^2 \cdot a(u-v)},$$

le equazioni (5) divengono:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\sqrt{(1+a^2)\cos h^2 \cdot a(u-v)-1}}{\sqrt{1+a^2} \cdot \cos h \cdot a(u-v)} \cos \omega, & \eta &= \frac{\sqrt{(1+a^2)\cos h^2 \cdot a(u-v)-1}}{\sqrt{1+a^2} \cos h \cdot a(u-v)} \operatorname{sen} \omega, \\ \zeta &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{1}{\cos h \cdot a(u-v)}. \end{aligned}$$

Le coordinate d'un punto qualunque della superficie sferica riferita alle linee coordinate $u = \operatorname{cost.}$, $v = \operatorname{cost.}$ saranno dunque:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{(1+a^2)\cos h^2 \cdot a(u-v)-1}}{\sqrt{1+a^2} \cdot \cos h \cdot a(u-v)} \cos(v+\omega), \\ y &= \frac{\sqrt{(1+a^2)\cos h^2 \cdot a(u-v)-1}}{\sqrt{1+a^2} \cos h \cdot a(u-v)} \operatorname{sen}(v+\omega), \\ z &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{1}{\cos h \cdot a(u-v)}, \end{aligned} \quad (11)$$

dove ω è dato in funzione di u e di v per mezzo della (10).

Per ottenere dunque le superficie domandate basta sostituire nelle equazioni (3) i valori di E , G , $\left(H, \frac{\partial H}{\partial u}, \frac{\partial H}{\partial v}\right)$, (x, y, z) dati rispettivamente dalle (8), (9), (11) ed osservare inoltre che nel caso presente, in cui la superficie S è una sfera di raggio $= 1$ col centro nell'origine, i coseni direttivi $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ della normale son dati dalle coordinate x, y, z dei punti della sfera, e che inoltre gli altri coseni direttivi delle tangenti alle linee coordinate si hanno facilmente dalle formole generali ricordate in principio. Le (5) danno le coordinate dei punti della curva sferica ruotante l espresse in funzione dell'arco; se indichiamo con ρ_g il raggio di curvatura geodetica della linea l , sarà:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ (\sqrt{E})'_v - \left(\frac{F}{\sqrt{E}} \right)'_u \right\} = \frac{b(1 + a^2)e^{a\sigma}}{\sqrt{1 - b^2(1 - a^2)e^{2a\sigma}}}, \quad \} \quad (12)$$

dalla quale si deduce:

$$e^{-2a\sigma} = b^2(1 + a^2) \{ 1 + (1 + a^2)\rho_g^2 \}.$$

Se consideriamo una curva L dello spazio che abbia per indicatrice sferica delle tangenti la curva ruotante l , indicando con ρ , r , s il raggio di curvatura, quello di torsione e l'arco di L , avremo:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\rho_g}, \quad \frac{ds}{\rho} = d\sigma.$$

e in forza di queste relazioni la precedente ci dà:

$$\frac{2a}{\rho} + \frac{d}{ds} \log \left[1 + (1 + a^2) \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \right] = 0. \quad (13)$$

La relazione (13) per una curva dello spazio e la relazione (12) per l'indicatrice sferica delle sue tangenti sono equivalenti; ma la (12) è caratteristica per le curve sferiche l considerate, poichè dà la curvatura geodetica in funzione dell'arco. Dunque la (13) è verificata per tutte e sole le curve la cui indicatrice sferica delle tangenti è una delle curve considerate l .

Avremo così il teorema « quando le linee di curvatura di un sistema $u = \text{cost.}$ sono poste in piani seganti la superficie sotto angolo costante ed inclinati d'un angolo costante sopra una retta fissa, le linee di curvatura dell'altro sistema sono sviluppanti di curve i cui raggi di curvatura sono legati dalla relazione (13), e reciprocamente. »

§ 3.

JOACHIMSTHAL ha dimostrato (*) che la condizione necessaria e sufficiente perchè sopra una superficie qualunque i due sistemi di linee ortogonali $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ siano inoltre i due sistemi di linee di curvatura è che sia verificata la relazione:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Dalle relazioni:

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad G = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2,$$

si ottiene colla derivazione:

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}.$$

Se dunque si risolvono queste tre relazioni rapporto alle quantità $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$, si ha:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{E} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{G}, \text{ ecc.,}$$

dalle quali consegue che « *all'equazione differenziale (2) soddisfano le coordinate dei punti di una superficie qualunque, espresse in funzione dei parametri u , v delle linee di curvatura* ».

Sopra una sfera, essendo una linea qualunque sempre una linea di curvatura, ne viene di conseguenza che all'equazione differenziale (2) soddisfano le coordinate x , y , z dei punti di una sfera espresse per i parametri u , v di due sistemi di curve ortogonali qualunque e per conseguenza vi soddisferà altresì una combinazione lineare $Ax + By + Cz$ di tali coordinate, essendo A , B , C tre costanti. Potremo dunque nelle (3) fare:

$$H = Ax + By + Cz,$$

(*) Giornale di CRELLE, T. XXX.

e allora queste divengono:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + (Ax + By + Cz) \cos a - \frac{1}{\sqrt{E}} \left(A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial u} + C \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cos a' - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{G}} \left(A \frac{\partial x}{\partial v} + B \frac{\partial y}{\partial v} + C \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cos a'' \\ y_1 &= y + (Ax + By + Cz) \cos b - \frac{1}{\sqrt{E}} \left(A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial u} + C \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cos b' - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{G}} \left(A \frac{\partial x}{\partial v} + B \frac{\partial y}{\partial v} + C \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cos b'' \\ z_1 &= z + (Ax + By + Cz) \cos c - \frac{1}{\sqrt{E}} \left(A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial u} + C \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cos c' - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{G}} \left(A \frac{\partial x}{\partial v} + B \frac{\partial y}{\partial v} + C \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cos c''. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Abbiamo dunque il teorema « Se x, y, z sono le coordinate dei punti di una sfera di raggio unitario espresse per i parametri u, v di due sistemi di linee ortogonali, le equazioni (14) rappresentano le coordinate di un punto qualunque di una superficie in cui le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sono linee di curvatura ed hanno per immagini sulla sfera le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ »

Per la determinazione dei coseni direttivi della normale della sfera e delle tangenti alle linee coordinate $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ ci atterremo alle osservazioni fatte nel paragrafo precedente.

Applicheremo questo teorema a trovare una classe particolare di superficie in cui le linee di curvatura di un sistema sono sviluppanti di curve L per le quali è verificata la relazione:

$$\left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \cos^2 i + \rho \frac{d}{ds} \left(\frac{r}{\rho} \right) \cot i + 1 = 0. \quad (15)$$

Indicando con r_g il raggio di curvatura geodetica e con σ l'arco delle indicatrici sferiche l delle tangenti delle curve L , si ha:

$$\frac{r}{\rho} = r_g, \quad \sigma = \int \frac{ds}{\rho},$$

e la precedente diviene:

$$r_g^2 \cos^2 i + \frac{dr_g}{d\sigma} \cot i + 1 = 0,$$

d'onde:

$$\frac{\cot i \cdot \frac{dr_g}{d\sigma}}{1 + r_g^2 \cos^2 i} = -1.$$

Moltiplicando ambi i membri per $d\sigma$ ed integrando, risulta:

$$\operatorname{arc tang}(r_g \cos i) = a - \sigma \cdot \operatorname{sen} i,$$

con a costante e di qui si deduce:

$$r_g = \frac{1}{\cos i} \operatorname{tang}(a - \sigma \cdot \operatorname{sen} i),$$

la quale relazione, che ci dà il raggio di curvatura geodetica della linea sferica in funzione dell'arco, è caratteristica per la lossodromia segante i meridiani sotto l'angolo costante $\frac{\pi}{2} - i$.

Consideriamo il caso in cui le curve sferiche l si ottengono da una di esse facendola ruotare intorno a un diametro fisso della sfera, per es. attorno l'asse delle z ; le coordinate dei punti di una linea descritta sopra una sfera di raggio 1 sono:

$$\xi = R \cos u, \quad \eta = R \operatorname{sen} u, \quad \zeta = \sqrt{1 - R^2},$$

essendo R la distanza di un punto della linea dall'asse di rotazione ed u un parametro variabile. Facendo ruotare questa linea attorno l'asse delle z , si ha per coordinate d'un punto qualunque della superficie generata

$$x = \xi \cos v - \eta \operatorname{sen} v, \quad y = \xi \operatorname{sen} v + \eta \cos v, \quad z = \zeta.$$

Sopra la superficie generata le linee $u = \text{cost.}$ sono i paralleli e le $v = \text{cost.}$ la curva ruotante nelle sue varie posizioni; mettendo la condizione che l'angolo delle curve $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sia costante, si ha per determinare R :

$$R^2(1 - R^2) = \cotg^2 i \cdot R^2,$$

dalla quale si deduce:

$$\frac{1 + \sqrt{1 - R^2}}{R} = h e^{-u \operatorname{tg} i},$$

con h costante. Risolvendo quest'eguaglianza rapporto ad R , si ha:

$$R = \frac{2h}{e^{u \operatorname{tg} i} + h^2 e^{-u \operatorname{tg} i}}.$$

Ora sostituiamo ai paralleli $u = \text{cost.}$ le linee $t = \text{cost.}$ traiettorie ortogonali delle lossodromie $v = \text{cost.}$; considerando il parametro u come funzione delle variabili t, v , esso viene determinato, in forza della condizione d'ortogonalità,

dall'equazione differenziale:

$$\frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{1}{\cos^2 i} + 1 = 0,$$

la quale, coll'integrazione, offre:

$$u = t - v \cos^2 i,$$

avendo sostituito t (il che è lecito senza nuocere alla generalità) alla funzione arbitraria di t venuta dall'integrazione. In forza di questa relazione il quadrato dell'elemento lineare della sfera acquista la forma:

$$ds^2 = R^2 \left[\frac{dt^2}{\cos^2 i} + \sin^2 i \cdot dv^2 \right],$$

dove:

$$R = \frac{2h}{e^{(t-v \cos^2 i) \operatorname{tg} i} + h^2 e^{-t-v \cos^2 i \operatorname{tg} i}}.$$

Se ne deduce « facendo ruotare una lossodromia sferica intorno al suo asse, si ottiene un sistema di curve che fanno parte di un doppio sistema di linee isoterme; l'altro sistema è pure formato da lossodromie. »

Una qualunque delle lossodromie del secondo sistema sega i meridiani sotto l'angolo $\frac{\pi}{2} - i$ e quindi avremo « fra le superficie in cui le linee di curvatura di un sistema sono sviluppanti di curve per le quali è verificata la relazione (15), ve ne ha una classe in cui le linee di curvatura dell'altro sistema sono sviluppanti di curve per le quali è verificata la relazione $\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \sin^2 i + \rho \frac{d}{ds} \left(\frac{r}{\rho}\right) \operatorname{tg} i + 1 = 0$; le immagini sferiche di tali linee di curvatura sono isoterme. »

Per trovare una classe particolare di queste ultime superficie, basta osservare che nel nostro caso le equazioni che danno le coordinate di un punto qualunque della sfera sono:

$$x = \frac{2h \cdot \cos(t + v \sin^2 i)}{e^{(t-v \cos^2 i) \operatorname{tg} i} + h^2 e^{-(t-v \cos^2 i) \operatorname{tg} i}}, \quad y = \frac{2h \cdot \sin(t + v \sin^2 i)}{e^{(t-v \cos^2 i) \operatorname{tg} i} + h^2 e^{-(t-v \cos^2 i) \operatorname{tg} i}},$$

$$z = \sqrt{1 - \left[\frac{2h}{e^{(t-v \cos^2 i) \operatorname{tg} i} + h^2 e^{-(t-v \cos^2 i) \operatorname{tg} i}} \right]^2},$$

e quindi basterà sostituire nelle (3) alle x, y, z i valori ora trovati.

§ 4.

Ora passeremo a far vedere come il teorema del § 3 ci permetta di determinare una classe particolare di superficie in cui le linee di curvatura d'un sistema sono eliche cilindriche. Le coordinate dei punti di una sfera di raggio unitario si possono scrivere sotto la forma:

$$x_0 = \text{sen } \varphi \cos \psi, \quad y_0 = \text{sen } \varphi \text{sen } \psi, \quad z_0 = \cos \varphi, \quad (16)$$

essendo φ e ψ due funzioni arbitrarie di due parametri indipendenti u , v . Mettiamo la condizione che le linee $v = \text{cost.}$ siano delle eliche sferiche; dalle precedenti si deduce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u} &= \cos \varphi \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \text{sen } \varphi \text{sen } \psi \frac{\partial \psi}{\partial u}, & \frac{\partial y_0}{\partial u} &= \cos \varphi \text{sen } \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \text{sen } \varphi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z_0}{\partial u} &= -\text{sen } \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{aligned}$$

e quindi il coseno dell'angolo θ che le tangenti alle curve $v = \text{cost.}$ fanno coll'asse delle z è dato come segue:

$$\cos \theta = \frac{\frac{\partial z_0}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial u}\right)^2}} = -\frac{\text{sen } \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \text{sen}^2 \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2}}.$$

dalla quale si ottiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \varphi - \cos^2 \theta}}{\text{sen } \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

e in questa sarà θ da considerarsi come una funzione arbitraria della sola v .

Moltiplicando per du ed integrando, si ottiene:

$$\psi = V + \frac{1}{\cos \theta} \int \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \varphi - \cos^2 \theta}}{\text{sen } \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u} du,$$

essendo V una funzione arbitraria di v .

Per eseguire la quadratura che entra nella espressione di ψ , poniamo:

$$\sqrt{\text{sen}^2 \varphi - \cos^2 \theta} = \lambda,$$

e allora risulta:

$$I = \frac{1}{\cos \theta} \int \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \varphi - \cos^2 \theta}}{\text{sen } \varphi} d\varphi = \frac{1}{\cos \theta} \int \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\text{sen}^2 \theta - \lambda^2} (\lambda^2 + \cos^2 \theta)}.$$

La funzione sotto il segno integrale si rende razionale ponendo:

$$\sqrt{\text{sen}^2 \theta - \lambda^2} = \text{sen} \theta + \lambda t,$$

e l'integrale I diviene allora:

$$I = -\frac{8 \text{sen}^2 \theta}{\cos \theta} \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)\{t^4 \cos^2 \theta + 2t^2(1+\text{sen}^2 \theta) + \cos^2 \theta\}}.$$

L'integrale di questa funzione razionale di t si può calcolare seguendo il noto processo d'integrazione delle funzioni razionali e si ottiene:

$$I = \cos \theta \arctg \frac{t \cos \theta}{1 - \text{sen} \theta} + \cos \theta \arctg \frac{t \cos \theta}{1 + \text{sen} \theta} - 2 \arctg t.$$

Notando quindi che:

$$t = \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \theta - \lambda^2} - \text{sen} \theta}{\lambda} = \frac{\cos \varphi - \text{sen} \theta}{\sqrt{\text{sen}^2 \varphi - \cos^2 \theta}},$$

potremo dire « Le coordinate dei punti di una sfera di raggio $= 1$ riferita a due sistemi di linee coordinate $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, l'ultimo dei quali è un sistema di eliche aventi per asse comune l'asse delle z , sono espresse dalle (16) dove φ è una funzione arbitraria di u e v e ψ è data come segue:

$$\psi = \arctg \frac{(\cos \varphi - \text{sen} \theta) \cos \theta}{(1 - \text{sen} \theta) \sqrt{\text{sen}^2 \varphi - \cos^2 \theta}} + \arctg \frac{(\cos \varphi - \text{sen} \theta) \cos \theta}{(1 + \text{sen} \theta) \sqrt{\text{sen}^2 \varphi - \cos^2 \theta}} - \left. \begin{aligned} & - \frac{2}{\cos \theta} \arctg \frac{\cos \varphi - \text{sen} \theta}{\sqrt{\text{sen}^2 \varphi - \cos^2 \theta}} + V. \end{aligned} \right\} (17)$$

Ora, se riferiamo i punti della sfera a un altro sistema di assi coll'origine nel centro della sfera, avremo:

$$x = Ax_0 + By_0 + Cz_0, \quad y = A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0, \quad z = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0,$$

dove i coseni A, B, \dots, C_2 sono funzioni della sola v e sono legati fra loro dalle note relazioni a cui soddisfano i coseni direttivi di tre assi ortogonali rapporto ad altri tre assi ortogonali.

Se da queste relazioni si ricavano le derivate delle coordinate rapporto alle variabili u, v , si trova con calcoli facili:

$$\begin{aligned} E &= \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \text{sen}^2 \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 \\ F &= \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \text{sen}^2 \varphi \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \text{sen}^2 \varphi \frac{\partial \psi}{\partial u} \Sigma B \frac{dA}{dv} - \\ &- \left[\text{sen} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \text{sen} \varphi \cos \varphi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] \Sigma C \frac{dB}{dv} + \left[\cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \text{sen} \varphi \cos \varphi \text{sen} \psi \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] \Sigma A \frac{dC}{dv}. \end{aligned}$$

Quando il quadrato dell'elemento lineare della superficie

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2,$$

si riferisca alle eliche $v = \text{cost.}$ e alle traiettorie ortogonali $t = \text{cost.}$, la variabile u è determinata in funzione di v e t dall'equazione differenziale:

$$\frac{F}{E} + \frac{\partial u}{\partial v} = 0.$$

Se da questa relazione si può ricavare la u e sia per es.:

$$u = f(t, v),$$

allora le coordinate x, y, z si esprimono facilmente in funzione dei parametri t, v delle linee ortogonali; notando che, per essere le tangenti di una linea di curvatura parallele a quelle della sua immagine sferica, quando una linea di curvatura è un'elica è pure un'elica la sua immagine e viceversa, si otterrà una classe particolare di superficie con eliche per linee di curvatura di un sistema, rinnovando il calcolo e le sostituzioni già fatte nel caso precedente.

Supponiamo più particolarmente che le eliche sferiche si ottengano tutte da una sola di esse facendola ruotare intorno a un diametro della sfera; le coordinate d'un punto qualunque d'un'elica tracciata sopra una sfera di raggio $= 1$ sono date dalle equazioni:

$$\xi_0 = \sin u \cos \psi, \quad \eta_0 = \sin u \sin \psi, \quad \zeta_0 = \cos u, \quad (16)$$

le quali si ottengono dalle (16) surrogando la quantità φ , che in questo caso è funzione della sola u , colla variabile u , il che non nuoce alla generalità; in queste equazioni la ψ è una funzione della sola u determinata dalla (17), che nel nostro caso diviene:

$$\begin{aligned} \psi = \arctg \frac{(\cos u - \sin \theta) \cos \theta}{(1 - \sin \theta) \sqrt{\sin^2 u - \cos^2 \theta}} + \arctg \frac{(\cos u - \sin \theta) \cos \theta}{(1 + \sin \theta) \sqrt{\sin^2 u - \cos^2 \theta}} - \\ - \frac{2}{\cos \theta} \arctg \frac{\cos u - \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 u - \cos^2 \theta}} + k, \end{aligned}$$

in cui θ è da considerarsi come una costante.

Si prenda un nuovo sistema d'assi $O(\xi, \eta, \zeta)$ tale, che $O\xi$ coincida con $O\xi_0$, e quindi gli assi $O\eta, O\zeta$ siano nel piano $\xi_0 = 0$; se ε è l'angolo dei due assi $O\zeta, O\zeta_0$, sarà:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sin u \cos \psi, & \eta &= \sin u \sin \psi \cos \varepsilon - \cos u \sin \varepsilon, \\ \zeta &= \sin u \sin \psi \sin \varepsilon + \cos u \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Facendo ruotare questa curva attorno alla retta $O\xi$, le coordinate x, y, z dei punti della sfera hanno le seguenti espressioni:

$$x = \xi \cos v - \eta \sin v, \quad y = \xi \sin v + \eta \cos v, \quad z = \zeta, \quad (20)$$

dalle quali si deduce:

$$\begin{aligned} E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 &= \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 = \frac{\sin^2 u}{\cos^2 \theta}, \quad F = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \xi \frac{d\eta}{du} - \eta \frac{d\xi}{du} = \\ &= \left[\sin \varepsilon \cos \psi + \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\sin^2 u - \cos^2 \theta} \sin u \cos \varepsilon - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\sin^2 u - \cos^2 \theta} \cos u \sin \psi \sin \varepsilon \right], \end{aligned}$$

e quindi l'equazione precedente, da cui vuole ricavata u , diviene:

$$\frac{\sin^2 u \cdot \frac{\partial u}{\partial v} dv}{\cos \theta \sin \varepsilon \cos \psi + \cos \varepsilon \sin u \sqrt{\sin^2 u - \cos^2 \theta} - \sin \varepsilon \cos u \sin \psi \sqrt{\sin^2 u - \cos^2 \theta}} = -\cos \theta \cdot dv,$$

dalla quale integrando:

$$\int \frac{\sin^2 u \cdot du}{\cos \theta \sin \varepsilon \cos \psi + (\cos \varepsilon \sin u - \sin \varepsilon \cos u \sin \psi) \sqrt{\sin^2 u - \cos^2 \theta}} = t - v \cos \theta,$$

avendo sostituito t alla funzione arbitraria di t che sarebbe venuta dall'integrazione. — Fatta questa quadratura, se dalla relazione che si ottiene si ricava u in funzione di t e di v e si sostituisce questo valore nella (18) e nelle (19), si esprimono le ξ, η, ζ per t e v ; le (20) ci danno allora le coordinate dei punti della sfera espresse in funzione dei parametri delle linee ortogonali t, v ; a tal punto il problema si potrà dire completamente risolto, poichè non ci rimarrà allora che a sostituire questi valori di x, y, z nelle equazioni (14) del § 3.

§ 5.

Il problema risolto precedentemente, supponendo che la linea ruotante sia un'elica sferica, si può risolvere qualunque sia questa linea.

Infatti basterà, in ciò che precede, ritenere che ψ rappresenti una funzione arbitraria di u , per comprendere tutti i casi. Le quantità E, F risultano, anche in questo caso generale, funzioni della sola u , di modo che nell'equazione differenziale:

$$\frac{F}{E} + \frac{\partial u}{\partial v} = 0,$$

che ci fornisce la u , le variabili sono separate e si ottiene:

$$\frac{E}{F} \frac{\partial u}{\partial v} dv = -dv,$$

da cui integrando:

$$\int \frac{E}{F} du = t - v,$$

avendo sostituito alla funzione arbitraria di t , venuta dall'integrazione, la variabile t stessa.

Il problema è allora completamente ridotto a quadrature, poichè fatta la quadratura precedente e ricavato da quell'equazione:

$$u = \theta(v, t),$$

sappiamo come si deve procedere per condurre a termine il problema.

Il problema risoluto al paragrafo precedente dà, io credo, il primo esempio di determinazione di superficie in cui le linee di curvatura di un sistema, non essendo geodetiche, quello dell'altro sistema sono delle eliche. Ora per dare un altro esempio dell'uso importante che si può fare del teorema del § 3 nelle questioni che si riferiscono alle linee di curvatura, passerò a dimostrare come si possa anche determinare una classe particolare di superficie in cui le linee di curvatura di un sistema non essendo geodetiche, quelle dell'altro sistema sono delle geodetiche di elicoidi sviluppabili (sviluppabili aventi per spigolo di regresso un'elica qualunque).

Nel giornale del prof. BATTAGLINI (anno 1885) ho dimostrato, che se una linea di curvatura di una superficie è una geodetica d'un elicoide sviluppabile, altrettanto avviene della sua immagine sferica; ho poi dimostrato, nello stesso giornale, che le geodetiche delle elicoidi sviluppabili sopra una sfera sono tutte e sole le sviluppanti geodetiche delle eliche sferiche.

Sulla sfera rappresentativa sia L_0 un'elica ed L una sua sviluppante; siano A_0, A due punti corrispondenti di tali curve, l'arco di cerchio massimo $A_0 A$ è uguale all'arco σ dell'elica L_0 , compreso fra l'origine della sviluppante e A_0 . Sia $O\xi$ il raggio della sfera che va al punto A_0 , $O\eta$ la parallela alla tangente in A_0 all'elica, condotta pel centro della sfera, $O\zeta$ la perpendicolare alle due prime rette; essendo la sfera di raggio 1, sarà l'angolo $A_0 O A = \sigma$ e le coordinate ξ, η, ζ di A rapporto agli assi $O(\xi, \eta, \zeta)$ sono date così:

$$\xi = \cos \sigma, \quad \eta = \sin \sigma, \quad \zeta = 0.$$

Indicando con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto generico A_0 dell'elica rap-

porto agli assi fissi, abbiamo:

$$\begin{aligned}\cos(\xi x) &= x_0, & \cos(\xi y) &= y_0, & \cos(\xi z) &= z_0 \\ \cos(\eta x) &= \frac{x'_0}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}}, & \cos(\eta y) &= \frac{y'_0}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}}, \\ \cos(\eta z) &= \frac{z'_0}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}}.\end{aligned}$$

Indicando dunque con ξ, η, ζ le coordinate di A , sarà:

$$\xi = x_0 \cos \sigma + \frac{x'_0 \sin \sigma}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}}, \text{ ecc.}$$

Ricordando le equazioni (16)', che ci danno le coordinate x_0, y_0, z_0 dei punti dell'elica e le altre formole che da quelle si deducono colla derivazione, abbiamo:

$$\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} = \sqrt{E} = \frac{\sin u}{\cos \theta};$$

inoltre:

$$\sigma = \int \sqrt{E} du = -\frac{\cos u}{\cos \theta}.$$

Dunque le coordinate x, y, z di un punto qualunque della sviluppante dell'elica sono date nel seguente modo:

$$\left. \begin{aligned}\xi &= \sin u \cos \psi \cos \left(\frac{\cos u}{\cos \theta} \right) - [\cos \theta \cos u \cos \psi - \sqrt{\sin^2 u - \cos^2 \theta} \sin \psi] \frac{\sin \left(\frac{\cos u}{\cos \theta} \right)}{\sin u} \\ \eta &= \sin u \sin \psi \cos \left(\frac{\cos u}{\cos \theta} \right) - [\cos \theta \cos u \cos \psi + \sqrt{\sin^2 u - \cos^2 \theta} \sin \psi] \frac{\sin \left(\frac{\cos u}{\cos \theta} \right)}{\sin u} \\ \zeta &= \cos u \cos \left(\frac{\cos u}{\cos \theta} \right) + \cos \theta \sin \left(\frac{\cos u}{\cos \theta} \right),\end{aligned} \right\} (21)$$

dove la ψ è espressa in funzione di u dalla relazione (18).

Facendo ruotare questa linea intorno all'asse delle z , le coordinate x, y, z d'un punto qualunque della sfera si possono scrivere nel seguente modo:

$$x = \xi \cos v - \eta \sin v, \quad y = \xi \sin v + \eta \cos v, \quad z = \zeta, \quad (22)$$

dove ξ, η, ζ sono date dalle (21). — Derivando le (21) rapporto alla variabile u ed applicando poi le (22), si ottiene:

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 = \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 = \lambda(u, \psi), \quad F = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \xi \frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial u} = \mu(u, \psi),$$

nelle quali ψ è una funzione nota di u data dalla (18); il parametro u è allora determinato in funzione di v e del parametro t delle traiettorie ortogonali delle $v = \text{cost.}$ dall'equazione:

$$\int \frac{E}{F} \frac{\partial u}{\partial v} dv = t - v.$$

Il problema proposto è così ridotto a quadrature.

§ 6.

Le applicazioni fatte e quelle che si possono fare del teorema dimostrato al § 3 contengono una difficoltà, che qualche volta non si riesce a superare nella pratica; e consiste nel dovere esprimere il parametro u in funzione del parametro v e dell'altro t delle linee ortogonali alle $v = \text{cost.}$ Ma in questo paragrafo mostrerò come sia possibile risolvere completamente il problema, evitando tale difficoltà. Se t è il parametro di un sistema di linee comunque inclinate sulle $v = \text{cost.}$, e u è il parametro delle traiettorie ortogonali delle $v = \text{cost.}$, si potrà considerare u come funzione di t e v

$$u = f(t, v),$$

e sostituirla nell'espressione nelle (14) del § 3. — Con ciò le x, y, z divengono funzioni note delle variabili t, v ; le quantità

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

che geometricamente rappresentano i coseni direttivi delle tangenti alle $v = \text{cost.}$ si trasformano rispettivamente nelle altre:

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial t},$$

essendo E relativo al nuovo sistema di variabili, cioè:

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2.$$

Vediamo che cosa divengano le espressioni:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v},$$

cioè i coseni direttivi delle tangenti alle traiettorie ortogonali delle $v = \text{cost.}$

Per le linee ortogonali $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$ teniamo ferme le notazioni introdotte da principio, chiamiamo i l'angolo delle $t = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ ed indichiamo con α , β , γ i coseni direttivi delle tangenti alle $t = \text{cost.}$ Avremo:

$$\cos \alpha = \cos i \cos \alpha' + \sin i \cos \alpha'',$$

d'onde:

$$\cos \alpha'' = \frac{\cos \alpha - \cos \alpha' \cos i}{\sin i}.$$

Ora se:

$$ds^2 = E dt^2 + 2F dt dv + G dv^2,$$

è il quadrato dell'elemento lineare della sfera, si ha:

$$\cos \alpha' = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \sin i = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}, \quad \cos i = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

e quindi:

$$\cos \alpha'' = \frac{G \frac{\partial x}{\partial t} - F \frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G} \sqrt{EG - F^2}}.$$

Operando analogamente sugli altri coseni, si vede che nelle (14) alle quantità

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v},$$

vanno sostituite le altre:

$$\frac{G \frac{\partial x}{\partial t} - F \frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G} \sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{G \frac{\partial y}{\partial t} - F \frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{G} \sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{G \frac{\partial z}{\partial t} - F \frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{G} \sqrt{EG - F^2}}.$$

Facendo tali sostituzioni nelle (14) e cambiando poi t in u , abbiamo il teorema « Se $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ è il quadrato dell'elemento lineare di una sfera di raggio 1 riferito a due sistemi di linee coordinate qualunque $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, ed x , y , z le coordinate d'un punto qualunque della sfera, le equazioni:

$$\begin{aligned} x_1 = & x + (Ax + By + Cz) \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial u} + C \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cos \alpha' - \\ & - \frac{1}{\sqrt{G} \sqrt{EG - F^2}} \left\{ A \left(G \frac{\partial x}{\partial u} - F \frac{\partial x}{\partial v} \right) + B \left(G \frac{\partial y}{\partial u} - F \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \right. \\ & \left. + C \left(G \frac{\partial z}{\partial u} - F \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right\} \cos \alpha'', \text{ ecc.,} \end{aligned}$$

dove $(\cos a, \cos b, \cos c)$, $(\cos a', \cos b', \cos c')$, $(\cos a'', \cos b'', \cos c'')$ sono i coseni direttivi della normale e delle tangenti alle linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$, rappresentano le coordinate d'un punto qualunque di una superficie sulla quale le linee $v = \text{cost.}$ sono linee di curvatura ed hanno per immagini le linee sferiche $v = \text{cost.}$ »

Applicando queste formole nei due casi particolari contemplati precedentemente, si ottengono completamente due classi particolari di superficie, in una delle quali le linee di curvatura d'un sistema sono eliche e nell'altra geodetiche di elicoidi sviluppabili.

§ 7.

Il risultato ottenuto al § 3 ci conduce alla determinazione di una classe di superficie ad area minima dotate di una proprietà notevole. È noto per un teorema di BONNET che ad ogni superficie ad area minima S corrisponde un'altra superficie ad area minima S_1 applicabile alla prima; le normali alle due superficie in punti corrispondenti sono parallele e alle linee di curvatura dell'una corrispondono le assintotiche dell'altra.

Si supponga che le immagini sferiche delle linee di curvatura di S , che sono pure le immagini delle assintotiche di S_1 , siano caratterizzate dalla relazione:

$$f(\rho_g, \sigma) = 0,$$

fra il raggio di curvatura geodetica ρ_g e l'arco σ . Per l'indicatrice delle tangenti di una linea si ha:

$$\rho_g = \frac{r}{\rho}, \quad \sigma = \int \frac{ds}{\rho},$$

e per l'indicatrice delle binormali:

$$\rho_g = \frac{\rho}{r}, \quad \sigma = \int \frac{ds}{r}.$$

Quindi potremo dire che se per le linee involupate dalle normali ad S lungo le linee di curvatura abbiamo:

$$f\left(\frac{r}{\rho}, \int \frac{ds}{\rho}\right) = 0.$$

per le assintotiche di S_1 abbiamo:

$$f\left(\frac{\rho}{r}, \int \frac{ds}{r}\right) = 0.$$

Dunque « considerando due superficie ad area minima conjugate, se una linea di curvatura di una di esse è una sviluppante di una curva lungo la quale è verificata una determinata relazione fra il raggio di curvatura e quello di torsione, l'assintotica corrispondente della sua conjugata ha i suoi raggi di curvatura legati dalla relazione che si ottiene scambiando fra loro nella precedente i due raggi. »

Ricordando quanto si è dimostrato al § 3, potremo dire « fra le superficie ad area minima le cui linee assintotiche di un sistema sono curve per le quali è verificata la relazione

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \cos^2 i + r \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho}{r}\right) \cot g i + 1 = 0,$$

ve ne ha una classe in cui le linee assintotiche dell'altro sistema sono curve per le quali è verificata la relazione:

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \sin^2 i + r \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho}{r}\right) \tan g i + 1 = 0. »$$

Si possono facilmente trovare queste superficie ad area minima, col notare che se

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2),$$

è il quadrato dell'elemento lineare di una sfera di raggio 1, le coordinate di un punto qualunque di una superficie ad area minima in cui le $u = \cos t$, $v = \cos t$ sono assintotiche sono:

$$x_i = \int \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial x}{\partial v} du + \frac{\partial x}{\partial u} dv \right), \quad \text{ecc.},$$

essendo x, y, z le coordinate dei punti della sfera.

Ricordando la forma trovata al § 3 per l'elemento lineare della sfera e cambiando in esso $\frac{t}{\cos i}$ in t e $v \cdot \sin i$ in v , per ridurre tale elemento ai parametri isometrici delle assintotiche, potremo dire che le coordinate d'un punto qualunque delle superficie ad area minima domandate sono rappresentate così:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{4h^2} \int \left(\frac{\partial x}{\partial v} du + \frac{\partial x}{\partial u} dv \right) [e^{u \sin i - v \cos i} + h^2 e^{-u \sin i + v \cos i}]^2 \\ y_i &= \frac{1}{4h^2} \int \left(\frac{\partial y}{\partial v} du + \frac{\partial y}{\partial u} dv \right) [e^{u \sin i - v \cos i} + h^2 e^{-u \sin i + v \cos i}]^2 \\ z_i &= \frac{1}{4h^2} \int \left(\frac{\partial z}{\partial v} du + \frac{\partial z}{\partial u} dv \right) [e^{u \sin i - v \cos i} + h^2 e^{-u \sin i + v \cos i}]^2. \end{aligned}$$

Parma, novembre 1887.