SUL SISTEMA DI TRE FORME CUBICHE BINARIE.

Nota di **Luigi Sinigallia** (Milano).

Adunanza del 25 giugno 1905.

Il sistema completo di tre forme cubiche binarie consta, come ha dimostrato il sig. v. Gall *) delle seguenti forme fondamentali:

1) 28 invarianti:

$$R=(\Delta\,\Delta_1),\quad P=(\nabla\nabla_1)^2,\quad A=(\delta\,\delta_1)^2,\quad J=(f\varphi)^3,\quad J'=(\psi f)^3,\quad J''=(\varphi\,\psi)^3,$$
$$S=(\Theta\Delta)^2,\quad S'=(\Theta'\delta)^2,\quad S''=(\Theta''\nabla)^2,\quad \Sigma=(\Theta\nabla)^2,\quad \Sigma'=(\Theta'\Delta)^2,\quad \Sigma''=(\Theta''\delta)^2,$$
$$T=(\Delta\,\nabla)^2,\quad T'=(\delta\,\Delta)^2,\quad T''=(\nabla\,\delta)^2,\quad \Omega=(\Theta\,\Delta)(\Theta\,\nabla)(\Delta\,\nabla),$$
$$\Omega'=(\Theta'\,\delta)(\Theta'\,\Delta)(\delta\,\Delta),\quad \Omega''=(\Theta''\,\nabla)(\Theta''\,\delta)(\nabla\,\delta),$$
$$B=(\Theta''\,\Delta)^2,\quad B'=(\Theta'\,\nabla)^2,\quad B''=(\Theta\,\delta)^2,$$
$$C=(\xi''Q)^3,\quad C'=(\xi'K)^3,\quad C''=(\xi\,\chi)^3,$$
$$D=(\zeta''Q)^3,\quad D'=(\zeta'K)^3,\quad D''=(\zeta\,\chi)^3,$$
$$E=(\Delta\,\nabla)(\Delta\,\delta)(\nabla\,\delta);$$

2) 33 covarianti lineari:

$$p=(\varphi\,\Delta)^2,\quad p'=(f\delta)^2,\quad p''=(\psi\,\nabla)^2,\quad \pi=(f\nabla)^2,\quad \pi'=(\psi\,\Delta)^2,\quad \pi''=(\varphi\,\delta)^2,$$
$$s=(\Delta p),\quad s'=(\delta p'),\quad s''=(\nabla p''),\quad t=(\Delta\,\pi),\quad t'=(\delta\,\pi'),\quad t''=(\nabla\,\pi''),$$
$$\sigma=(\nabla p),\quad \sigma'=(\Delta p'),\quad \sigma''=(\delta p''),\quad \tau=(\nabla\,\pi),\quad \tau'=(\Delta\,\pi'),\quad \tau''=(\delta\,\pi''),$$
$$\rho=(\Theta\psi)^2,\quad \rho'=(\Theta'\varphi)^2,\quad \rho''=(\Theta''f)^2,\quad r=(\Theta''Q)^2,\quad r'=(\Theta'K)^2,\quad r''=(\Theta\,\chi)^2,$$
$$\varepsilon=(\gimel''Q)^3,\quad \varepsilon'=(\gimel'K)^3,\quad \varepsilon''=(\gimel\,\chi)^3,\quad g=(\xi\,\delta)^2,\quad g'=(\xi''\,\Delta)^2,\quad g''=(\xi'\nabla)^2,$$
$$h=(\zeta'\,\nabla)^2,\quad h'=(\zeta\,\delta)^2,\quad h''=(\zeta''\,\Delta)^2;$$

3) 21 covarianti quadratici:

$$\Delta=(ab)^2,\quad \nabla=(a'b')^2,\quad \delta=(a''b'')^2,\quad \Theta=(f\varphi)^2,\quad \Theta'=(\psi f)^2,\quad \Theta''=(\varphi\psi)^2,$$
$$q=(fp),\quad q'=(\psi p'),\quad q''=(\varphi p''),\quad \omega=(\varphi\,\pi),\quad \omega'=(f\pi'),\quad \omega''=(\psi\,\pi''),$$
$$\nu=(\Delta\,\nabla)=(\pi f)=(\varphi p),\quad \nu'=(\delta\,\Delta)=(\pi'\psi)=(fp'),\quad \nu''=(\nabla\,\delta)=(\pi''\varphi)=(\psi p''),$$
$$m=(\xi'\varphi)^2,\quad m'=(\xi\,\psi)^2,\quad m''=(\xi''f)^2,\quad n=(\zeta\,\psi)^2,\quad n'=(\zeta''f)^2,\quad n''=(\zeta'\varphi)^2;$$

---

*) v. Gall, *Das vollständige Formensystem dreier cubischen binären Formen* [Math. Ann., XLV (1894), pp. 207-234].

4) 15 covarianti cubici:

$$f = a_x^3, \quad \varphi = a_x'^3, \quad \psi = a_x''^3, \quad Q = (f\Delta), \quad K = (\varphi\nabla), \quad \chi = (\psi\delta),$$

$$\xi = (f\nabla), \quad \xi' = (\psi\Delta), \quad \xi'' = (\varphi\delta), \quad \zeta = (\varphi\Delta), \quad \zeta' = (f\delta), \quad \zeta'' = (\psi\nabla),$$

$$H = (\Theta\psi), \quad H' = (\Theta'\varphi), \quad H'' = (\Theta'' f);$$

5) 3 covarianti biquadratici:

$$\vartheta = (f\varphi), \quad \vartheta' = (\psi f), \quad \vartheta'' = (\varphi\psi).$$

Il sig. v. GALL nota poi che i covarianti ρ, ρ', ρ'' soddisfanno alla identità

$$\rho + \rho' + \rho'' = 0,$$

e che fra i covarianti H, H', H'' sussiste *una* relazione lineare

$$4H = 2(H' + H'') + J''f - J'\varphi.$$

Si può però subito osservare che scambiando in questa ultima equazione i simboli a, a'' fra loro si ottiene da essa un'altra relazione fra le H e le altre forme del sistema completo

$$4H'' = 2(H' + H) - J\psi + J'\varphi;$$

relazione questa *ben distinta* dalla precedente, tanto che, unita alla prima, ci permette di ricavare le espressioni di due delle H in funzioni della terza e delle altre forme dello stesso sistema. Si ha infatti

$$H' = \tfrac{1}{6}(6H + J\psi + J'\varphi - 2J''f), \quad H'' = \tfrac{1}{6}(6H - J\psi - J''f + 2J'\varphi).$$

Basterà quindi nel sistema completo tenere conto di due covarianti lineari ρ e di un covariante cubico H.

Diciamo (A) il sistema completo delle tre cubiche f, φ, ψ; e (B) il sistema completo delle altre tre cubiche:

$$\lambda f + \mu Q, \qquad \lambda_1\varphi + \mu_1 K, \qquad \lambda_2\psi + \mu_2\chi.$$

È chiaro che le forme del sistema (B) dovranno essere funzioni razionali intere delle forme del sistema (A): scopo di questa breve Nota è appunto di determinare queste funzioni.

Delle forme del sistema (A) ve ne sono alcune (12) che contengono i coefficienti di una sola delle forme date, altre (54) contengono i coefficienti di due delle cubiche date, mentre le rimanenti contengono contemporaneamente i coefficienti delle tre cubiche.

Per le 12 forme del primo gruppo il problema è stato già risoluto *).

Per trovare poi le altre formole che cerchiamo, analogamente a quanto è stato fatto nel caso di una sola cubica, possiamo procedere così. Sia Π una forma invariantiva qualunque del sistema (A) e sia $\pi_{\lambda,\mu,\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2}$ la forma corrispondente del sistema (B); se Π ha i gradi α, α_1, α_2 rispettivamente nei coefficienti di f, φ, ψ potremo porre:

---

*) CLEBSCH, *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872), pag. 119.

$$\text{(1)} \qquad \Pi_{\lambda,\mu\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2} = \sum_i \lambda^{\beta_{1i}} \mu^{\gamma_{1i}} \lambda_1^{\beta_{2i}} \mu_1^{\gamma_{2i}} \lambda_2^{\beta_{3i}} \mu_2^{\gamma_{3i}} \Pi_i,$$

ove

$$\beta_{1i} + \gamma_{1i} = \alpha, \qquad \beta_{2i} + \gamma_{2i} = \alpha_1, \qquad \beta_{3i} + \gamma_{3i} = \alpha_2.$$

Se ora ad ambo i membri della (1) applichiamo l'operazione $\delta_1 = \sum_i Q_i \frac{\partial}{\partial a_i}$, ne deduciamo la relazione:

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & \lambda \sum_i \gamma_{1i} \lambda^{\beta_{1i}} \mu^{\gamma_{1i}-1} \lambda_1^{\beta_{2i}} \mu_1^{\gamma_{2i}} \lambda_2^{\beta_{3i}} \mu_2^{\gamma_{3i}} \Pi_i \\ & - \tfrac{1}{2} R \mu \sum_i \beta_{1i} \lambda^{\beta_{1i}-1} \mu^{\gamma_{1i}} \lambda_1^{\beta_{2i}} \mu_1^{\gamma_{2i}} \lambda_2^{\beta_{3i}} \mu_2^{\gamma_{3i}} \Pi_i \\ & = \sum_i \lambda^{\beta_{1i}} \mu^{\gamma_{1i}} \lambda_1^{\beta_{2i}} \mu_1^{\gamma_{2i}} \lambda_2^{\beta_{3i}} \mu_2^{\gamma_{3i}} \delta_1 \Pi_i. \end{aligned} \right.$$

Un'altra simile equazione otteniamo applicando alla (1) l'operazione $\delta_2 = \sum_i K_i \frac{\partial}{\partial a'_i}$ ed una terza pure analoga si ha coll'applicazione alla (1) della operazione $\delta_3 = \sum_i \chi_i \frac{\partial}{\partial a''_i}$. Se poi uguagliamo fra loro i coefficienti delle stesse potenze di $\lambda \mu \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2$ dei due membri della (2) e di quelli delle altre due relazioni ad essa analoghe cui abbiamo ora accennato, otterremo tre gruppi di equazioni che ci permetteranno di calcolare successivamente tutti i coefficienti dello sviluppo (1).

Accade talvolta che potendosi uno stesso coefficiente calcolarsi con formole differenti, si giunga ad avere per esso diverse espressioni: si hanno così alcune sizigie del sistema (A). Il sig. v. Gall si riprometteva alla fine del suo citato lavoro di fare conoscere le più semplici sizigie del sistema (A), ma non ci è stato possibile di trovare la pubblicazione che egli allora annunciava, se pure è avvenuta.

Premesso ciò riportiamo i risultati che abbiamo ottenuto, omettendo di scrivere, per amore di brevità, le formole che si possono ottenere da quelle date con un semplice scambio di indici o di simboli e raggruppando le singole forme secondo i loro gradi nei coefficienti delle tre cubiche fondamentali, come si conviene di fare in questa ricerca.

I. — Forme contenenti i coefficienti di due sole delle tre cubiche.

a) Forme lineari nei coefficienti di ciascuna delle cubiche.

Sono qui comprese le forme J, J', J'', Θ, Θ', Θ'', ϖ, ϖ', ϖ'' e si ha

$$J_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \lambda \lambda_1 J - \lambda_1 \mu S + \lambda \mu_1 \Sigma + \tfrac{1}{2} \mu \mu_1 (2\Omega + J T)$$

$$\Theta_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \lambda \lambda_1 \Theta + \tfrac{1}{2} \lambda_1 \mu (J \Delta - q) - \tfrac{1}{2} \lambda \mu_1 (J \nabla + \omega) + \tfrac{1}{2} \mu \mu_1 (T \Theta - p \pi)$$

$$\varpi_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \lambda \lambda_1 \varpi + \tfrac{1}{2} \lambda_1 \mu (\Delta \Theta - f.p) + \tfrac{1}{2} \lambda \mu_1 (\varphi.\pi - \nabla \Theta) + \tfrac{1}{2} \mu \mu_1 \left[f.\sigma - \tfrac{1}{2} \Delta (\omega + J \nabla) \right].$$

b) Forme di secondo grado nei coefficienti di una cubica e lineari in quelli dell'altra.

Sono qui comprese le forme

$$p, \quad p', \quad p'', \quad \pi, \quad \pi', \quad \pi'', \quad \xi, \quad \xi', \quad \xi'', \quad \zeta, \quad \zeta', \quad \zeta'';$$

e se poniamo

$$\Gamma_1 = \lambda^2 + \tfrac{1}{2} R \mu^2, \qquad \Gamma_2 = \lambda_1^2 + \tfrac{1}{2} P \mu_1^2,$$

abbiamo

$$p_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \Gamma_1 (\lambda_1 p - \mu_1 \sigma), \qquad \xi_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \Gamma_2 \left[\lambda \xi + \tfrac{1}{2} \mu (\Delta \pi - T f)\right].$$

c) Forme di terzo grado nei coefficienti di una cubica e lineari in quelli dell'altra.

Sono qui comprese le forme

$$S, \quad S', \quad S'', \quad \Sigma, \quad \Sigma', \quad \Sigma'', \quad q, \quad q', \quad q'', \quad \omega, \quad \omega', \quad \omega''$$

ed abbiamo

$$S_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \tfrac{1}{2} \Gamma_1 [2 \lambda \lambda_1 S + \lambda_1 \mu J R - \lambda \mu_1 (2 \Omega + J T) + \mu \mu_1 R \Sigma]$$

$$\omega_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \Gamma_2 \{\lambda \lambda_1 \omega + \lambda_1 \mu (S \nabla + p \pi - T \Theta) + \lambda \mu_1 (P \Theta - \Sigma \nabla) + \tfrac{1}{2} \mu \mu_1 [T \omega - 2(\Omega \nabla + \pi \sigma)]\}.$$

d) Forme di secondo grado nei coefficienti di ciascuna delle due cubiche.

Queste sono

$$T, \quad T', \quad T'', \quad \nu, \quad \nu', \quad \nu'',$$

e si hanno le semplici relazioni

$$T_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \Gamma_1 . \Gamma_2 . T, \qquad \nu_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \Gamma_1 . \Gamma_2 . \nu.$$

e) Forme di quarto grado nei coefficienti di una cubica e lineari in quelli dell'altra.

Sono qui comprese le forme

$$s, \quad s', \quad s'', \quad \tau, \quad \tau', \quad \tau''$$

e si ha

$$s_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \Gamma_1^2 \left[\lambda_1 s + \mu_1 \left(J t - S \pi - \tfrac{1}{2} T p\right)\right].$$

f) Forme di terzo grado nei coefficienti di una cubica e di secondo grado in quelli dell'altra.

Queste sono le forme

$$\sigma, \quad \sigma', \quad \sigma'', \quad t, \quad t', \quad t''$$

ed abbiamo

$$\sigma_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \Gamma_1 . \Gamma_2 \left(\lambda_1 \sigma + \tfrac{1}{2} \mu_1 . P . p\right).$$

g) Forme di terzo grado nei coefficienti di ciascuna delle due cubiche.

Sono queste i tre invarianti Ω, Ω', Ω''; ed abbiamo

$$\Omega_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1} = \tfrac{1}{2} \Gamma_1 . \Gamma_2 \{2 \lambda \lambda_1 \Omega + \lambda_1 \mu (S T - R \Sigma) + \lambda \mu_1 (S P - T \Sigma) + \tfrac{1}{2} \mu \mu_1 [J (R P - T^2) - 2 T \Omega]\}.$$

II. — Forme contenenti contemporaneamente i coefficienti di tutte le tre cubiche.

a) Forme lineari nei coefficienti di ciascuna delle tre cubiche.

Appartengono a questo gruppo i tre covarianti lineari ρ, ρ', ρ'' ed i tre covarianti cubici H, H', H''.

Si ha qui:

$$\rho_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2} = \lambda\lambda_1\lambda_2\rho - \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\mu(2\varepsilon + r) + \tfrac{1}{2}\lambda\lambda_2\mu_1(2\varepsilon' - r')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\lambda_2\mu\mu_1(B'p + B\pi + T\varrho + J''t - J'\sigma) + \lambda\lambda_1\mu_2 r''$$
$$+ \tfrac{1}{2}\lambda_1\mu\mu_2(T'\rho - Jt' - B''\pi') + \tfrac{1}{2}\lambda\mu_1\mu_2(J\sigma'' + T''\rho - B''p'')$$
$$+ \tfrac{1}{4}\mu\mu_1\mu_2[2(Cp'' - S\sigma'') - T''(2\varepsilon + r)].$$

$$H_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2} = \lambda\lambda_1\lambda_2 H + \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\mu(\Delta\rho - J\xi' - \Theta\pi')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\lambda\lambda_2\mu_1(J\zeta'' + \nabla\rho - \Theta p'') + \tfrac{1}{2}\lambda\lambda_1\mu_2(B''\psi - \delta\rho)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\lambda_2\mu\mu_1[\Delta(2\varepsilon' - r') - 2\Sigma\xi' + \pi'(J\nabla + \omega)]$$
$$+ \tfrac{1}{4}\lambda_1\mu\mu_2[\delta(2\varepsilon + r) - 2C\psi] + \tfrac{1}{4}\lambda\mu_1\mu_2[\delta(r' - 2\varepsilon') - 2D'\psi]$$
$$+ \tfrac{1}{4}\mu\mu_1\mu_2[\Delta(T''\rho + J\sigma'' - B''p'') - (J\nabla + \omega)t' + \Sigma(\psi T' - \delta\pi')].$$

b) Forme di secondo grado nei coefficienti di una delle cubiche e lineari in quelli delle altre due.

Sono qui comprese le forme:

$$B,\quad B',\quad B'',\quad m,\quad m',\quad m'',\quad n,\quad n',\quad n''$$

ed otteniamo

$$B_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2} = \Gamma_1\left[\lambda_1\lambda_2 B - \lambda_1\mu_2 D'' - \lambda_2\mu_1 C' + \tfrac{1}{2}\mu_1\mu_2(J''E + S''T' + \Sigma''T - BT'')\right]$$

$$m_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2} = \Gamma_1\{\lambda_1\lambda_2 m + \tfrac{1}{6}\lambda_1\mu_2(2\pi'\pi'' + B\delta - J''\nu' - \Sigma''\Delta - 3T'\Theta'')$$
$$+ \tfrac{1}{6}\lambda_2\mu_1(B\nabla + T\Theta'' + S''\Delta - J''\nu - 2pp'')$$
$$+ \tfrac{1}{12}\mu_1\mu_2[2(2p\sigma'' - D''\nabla - \Sigma''\nu) - T(\omega'' + J''\delta) - \Delta(2\Omega'' + J''T'')]\}.$$

c) Forme di terzo grado nei coefficienti di una delle cubiche e lineari in quelli delle altre due.

Questo gruppo comprende i covarianti lineari r, r', r'', ε, ε', ε''.

Le formole relative si riducono a queste due:

$$r_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2} = \Gamma_1\{\lambda\lambda_1\lambda_2 r + \tfrac{1}{2}\lambda\lambda_1\mu_2(T'\rho'' + J''\sigma' - Bp') + \tfrac{1}{2}\lambda\lambda_2\mu_1(T\varrho'' - J''t - B\pi)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\lambda\mu_1\mu_2[2(C'p' - S''\sigma') - T'(2\varepsilon' + r')] - \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\mu R\rho''$$
$$- \tfrac{1}{4}\lambda_1\mu\mu_2 R(2\varepsilon'' - r'') + \tfrac{1}{4}\lambda_2\mu\mu_1 R(2\varepsilon' + r')$$
$$+ \tfrac{1}{4}\mu\mu_1\mu_2 R(J\sigma'' - B'\pi'' - B''p'' - T''\rho'' - J't'')\}.$$

$$\varepsilon_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2} = \Gamma_1\{\lambda\lambda_1\lambda_2\varepsilon + \tfrac{1}{4}\lambda\lambda_1\mu_2[2(Jt' + B''\pi') + Bp' - J''\sigma' + T'(\rho' - \rho)]$$
$$+ \tfrac{1}{4}\lambda\lambda_2\mu_1[2(J'\sigma - B'p) - B\pi - J''t + T(\rho' - \rho)] + \tfrac{1}{4}\lambda_1\lambda_2\mu R(\rho - \rho')$$
$$+ \tfrac{1}{4}\lambda\mu_1\mu_2(S\sigma'' + D\pi'' - \Sigma't'' - Cp'' + 2T''\varepsilon) + \tfrac{1}{8}\lambda_1\mu\mu_2 R(3r'' + 2\varepsilon'')$$
$$+ \tfrac{1}{8}\lambda_2\mu\mu_1 R(2\varepsilon' - 3r') + \tfrac{1}{8}\mu\mu_1\mu_2 R[J\sigma'' + J't'' + B'\pi'' - B''p'' + T''(\rho - \rho')]\}.$$

d) Forme di secondo grado nei coefficienti di due cubiche e lineari in quelli della terza.

Sono qui compresi i sei covarianti lineari g, h, g', h', g'', h''. I loro sviluppi possono tutti dedursi dal seguente

$$g_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2} = \Gamma_2 \cdot \Gamma_3 (\lambda g + \mu g_1),$$

ove

$$\Gamma_3 = \lambda_2^2 + \tfrac{1}{2} A \mu_2^2$$

$$12 . g_1 = 2(2B' + JJ'')\pi' - 2(B\rho + \Sigma' p'') + 6T'\pi - 5Tp' - S\pi''$$
$$- \tfrac{3}{5} J(4g' + h') + \tfrac{6}{5} J'(h'' - g'') + J''(2\varepsilon + r).$$

e) Forme di terzo grado nei coefficienti di una cubica, di secondo grado in quelli di un'altra e lineari in quelli della rimanente.

Questo gruppo comprende i sei invarianti C, C', C'', D, D', D'', il cui sviluppo può dedursi dalla formola:

$$C_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2} = \Gamma_1 . \Gamma_3 \left[\lambda\lambda_1 C + \tfrac{1}{2}\lambda_1 \mu RB'' + \tfrac{1}{2}\lambda\mu_1 (TB'' - T'\Sigma - T''S - JE) - \tfrac{1}{2}\mu\mu_1 RD'\right].$$

f) L'invariante E, che è di secondo grado nei coefficienti di ciascuna delle tre cubiche, soddisfa alla relazione:

$$E_{\lambda\mu\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2} = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 E.$$

Vogliamo da ultimo segnalare le più semplici relazioni tra le forme del sistema completo (A) cui siamo pervenuti coi calcoli precedenti.

Esse sono le seguenti:

$$2(RD' + SE - T'\Omega - TC) = J(TT' + T''R),$$
$$2(Cp'' + \Sigma t' + Tr'') - T''(2\varepsilon + r) = J(T''\pi' - T'p''),$$
$$2(p\sigma'' + \pi' t'') = T(\omega'' + J''\delta) + T'(q'' - J''\gamma),$$
$$2(C'\delta - \Sigma''\nu - D''\gamma - S''\nu') = T'(q'' - J''\gamma) - T(\omega'' + J''\delta),$$
$$2(\Delta r'' + \Theta t' + C\psi) - \delta(2\varepsilon + r) = J(\pi' . \delta - T'\psi),$$
$$\Delta(2\varepsilon' - r') + \gamma(2\varepsilon + r) + p''(J\Delta - q) + \pi'(J\gamma + \omega) = 2(\Sigma\xi' - S\zeta''),$$
$$Ef = \nu' . \pi + \nu . p',$$
$$\delta . \nu + \gamma . \nu' + \Delta . \nu'' = 0.$$

Da ciascuna di queste altre ne possiamo subito ottenere scambiando fra loro i simboli a, a', a'', e poi combinando opportunamente le relazioni che in tale modo si hanno. Così dalla seconda delle sizigie scritte, scambiando i simboli a, a', si ottiene:

$$2(D'\pi' + S\sigma'' + Tr'') + T'(2\varepsilon' - r') = J(T''\pi' - T'p''),$$

che, combinata colla precedente, dà

$$2(Cp'' + \Sigma t' - D'\pi' - S\sigma'') = T''(2\varepsilon + r) + T'(2\varepsilon' - r').$$

Milano, giugno 1905.

L. Sinigallia.