

# Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume.

Von

FRIEDRICH SCHUR in Leipzig.

---

Nachdem in früheren Abhandlungen unrichtige oder ungenaue Angaben über die Deformirbarkeit eines Raumes von  $n$  Dimensionen innerhalb eines ebenen  $(n+1)$ -dimensionalen Raumes gemacht worden waren, habe ich in meiner Schrift „über die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses“\*) gezeigt, dass die Nicht-Deformirbarkeit solcher Räume nur unter gewissen Voraussetzungen behauptet werden darf, und habe auch Beispiele deformirbarer Räume gegeben. Bereits vorher war freilich Herr Killing\*\*) zu demselben Resultate gekommen und hatte auch seinerseits in denjenigen  $n$ -dimensionalen Räumen, welche eine Schaar ebener  $(n-1)$ -dimensionaler Räume enthalten, Beispiele von Räumen gefunden, die innerhalb eines ebenen  $(n+1)$ -dimensionalen Raumes deformirbar sind.

Was indessen die weitere ohne Beweis von Herrn Killing aufgestellte Behauptung betrifft, dass hierdurch alle  $n$ -dimensionalen innerhalb eines ebenen  $(n+1)$ -dimensionalen Raumes deformirbaren Räume gefunden seien, so schien mir dieselbe schon bei Abfassung der o. a. Schrift zweifelhaft. In der That fand ich sehr bald, dass dieser Zweifel begründet sei, insofern gerade die von mir dort angegebenen Räume keine ebenen  $(n-1)$ -dimensionalen Räume zu enthalten brauchen. Es schien mir daher der Mühe werth, die Frage nach allen innerhalb eines ebenen  $(n+1)$ -dimensionalen Raumes deformirbaren Räumen von  $n$  Dimensionen näher zu untersuchen, wobei ich mich indessen auf den Fall  $n=3$  beschränkt habe, der mir besonderes Interesse zu bieten scheint. In diesem Falle ist es mir auch gelungen, die Frage bis zu einem gewissen Grade zu erledigen.

---

\*) S. Math. Ann. Bd. XXVII, p. 172.

\*\*) S. Killing, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig, 1885, p. 238.

Man findet nämlich, dass diese Räume  $\infty^2$  gerade Linien enthalten müssen, dass ferner jede derselben von zwei unendlich benachbarten getroffen wird, sodass man dieselben zu zwei Schaaren abwickelbarer Flächen zusammenfassen kann. Ordnet man nun die Richtungen der geraden Linien des ebenen vierdimensionalen Raumes den Punkten eines dreidimensionalen sphärischen Raumes in bekannter Weise zu, so entsprechen jenen  $\infty^2$  geraden Linien die Punkte einer gewissen Fläche innerhalb desselben und jenen beiden Schaaren abwickelbarer Flächen entsprechen zwei Schaaren von Linien, welche die Fläche in unendlich kleine sphärische Vierecke theilen, also conjugirte Linien sind. Die Entscheidung nun, ob der gegebene dreidimensionale Raum innerhalb des ebenen vierdimensionalen deformirbar sei oder nicht, ist dann zurückgeführt auf die Entscheidung darüber, ob jene Fläche innerhalb des sphärischen Raumes so deformirbar sei, dass jenen beiden Schaaren von Linien auf derselben die Eigenschaft erhalten bleibt, sie in unendlich kleine sphärische Vierecke einzutheilen. Hierbei bedürfen allerdings einige Ausnahmefälle einer besonderen Untersuchung.

Was nunmehr das Problem betrifft innerhalb eines sphärischen dreidimensionalen Raumes alle Flächen aufzustellen, die so deformirbar sind, dass zwei Schaaren conjugirter Linien auf derselben in ebensolche übergehen,\*) so ist es mir nicht gelungen der Lösung desselben näher zu kommen. Es lässt sich nur so viel sagen, dass bei Annahme einer beliebigen Fläche und irgend zweier Schaaren conjugirter Linien auf derselben die Deformation i. A. nicht unter obigen Bedingungen möglich ist, dass also die von mir a. a. O. aufgestellten nothwendigen Bedingungen für die Deformirbarkeit eines dreidimensionalen Raumes innerhalb eines ebenen Raumes von vier Dimensionen nicht zugleich auch hinreichend sind.

Wenn es mir also auch nicht gelungen ist, das im Titel gemeinte Problem vollständig zu erledigen, so dürfte das Folgende doch zur besseren Einsicht in die Natur desselben beitragen.

I. Im zweiten Paragraphen meiner o. a. Schrift habe ich als nothwendige Bedingungen dafür, dass ein Raum von  $n$  Dimensionen, der innerhalb eines ebenen  $(n+1)$ -dimensionalen Raumes durch die Gleichung:

$$(1) \quad x_{n+1} = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{a, b}^n c_{ab} x_a x_b + \dots$$

---

\*) Offenbar enthält dies Problem als speciellen Fall dasjenige: eine Fläche so zu deformiren, dass die Krümmungslinien derselben in ebensolche übergehen, welches für den ebenen Raum von Bonnet in seinem „mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée“, Journal de l'école polyt. ton. XXV, p. 58. behandelt worden ist.

gegeben ist, innerhalb desselben in der Nähe des Anfangspunktes deformirbar sei, die angegeben, dass alle Unterdeterminanten 3. Ordnung der aus den  $c_{ab}$  gebildeten Determinante verschwinden. Es folgte dies aus der Betrachtung des Riemann'schen Krümmungsmaasses, welches für den Anfangspunkt die Form annimmt:

$$(2) \quad K^0 = \frac{\sum_{a,b;c,d}^n (c_{ab} c_{cd} - c_{ac} c_{bd}) (dx_a \delta x_b - dx_b \delta x_a) (dx_b \delta x_c - dx_c \delta x_b)}{\sum_{a;c}^n (dx_a \delta x_c - dx_c \delta x_a)^2}.$$

Denn nur dann ergaben sich aus vorgelegten Werthen der Unterdeterminanten 2. Ordnung  $c_{ab} c_{cd} - c_{ac} c_{bd}$  nicht eindeutig die Werthe der  $c_{ab}$  selbst.

Um diese Bedingungen nun auch in dem Falle zu erhalten, dass der zu deformirende Raum in der Form:

$$(2) \quad x_a = \varphi_a(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n+1)$$

gegeben ist, wird es vorthellhaft sein, das Riemann'sche Krümmungsmaass durch die sogenannten *Fundamentalgrössen* 1. und 2. Ordnung auszudrücken. Als Fundamentalgrössen 1. Ordnung bezeichnen wir die Ausdrücke:

$$(4) \quad e_{ab} = \sum_c^{n+1} \frac{\partial x_c}{\partial u_a} \frac{\partial x_c}{\partial u_b};$$

und als Fundamentalgrössen 2. Ordnung die Grössen:

$$(5) \quad E_{ab} = \sum_c^{n+1} P_c \frac{\partial^2 x_c}{\partial u_a \partial u_b} = - \sum_c^{n+1} \frac{\partial P_c}{\partial u_a} \frac{\partial x_c}{\partial u_b} = - \sum_c^{n+1} \frac{\partial P_c}{\partial u_b} \frac{\partial x_c}{\partial u_a}.$$

Hier sind die Grössen  $P_a$ , die sogenannten *Richtungscosinus der Normale*, bestimmt durch die Gleichungen:

$$(6) \quad \sum_b^{n+1} P_b \frac{\partial x_b}{\partial u_a} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n),$$

und:

$$(7) \quad \sum_a^{n+1} P_a^2 = 1.$$

Falls die Fundamentalgrössen 1. und 2. Ordnung in geeigneter Weise als Functionen der  $u_a$  gegeben sind, so ist der Raum (3) bekanntlich\*) bis auf seine absolute Grösse und Lage im Raume vollkommen bestimmt.

\*) S. Runge, Ueber die Krümmung, Torsion u. s. w., Diss. Berlin, 1880.

Um nun aus (2) einen Ausdruck für das Riemann'sche Krümmungsmaass herzuleiten, müssen wir zunächst einen Uebergang suchen von dem hier vorausgesetzten allgemeinen Coordinatensysteme zu dem speciellen, welches der Gleichungsform (1) zu Grunde liegt. Bezeichnen wir die Coordinaten in demselben mit  $y_a$ , so mag der Anfangspunkt desselben, welcher ja ein Punkt von (3) ist, in dem allgemeinen Coordinatensysteme die Coordinaten  $x_1^0, \dots, x_{n+1}^0$  haben. Da seine  $y_{n+1}$ -Axe die Richtungscosinus  $P_1^0, \dots, P_{n+1}^0$  hat, so ist offenbar:

$$(8) \quad y_{n+1} = x_{n+1}^0 + \sum_a^{n+1} P_a^0 x_a.$$

Nun ist doch:

$$(9) \quad c_{ab} = \left( \frac{\partial^2 y_{n+1}}{\partial y_a \partial y_b} \right)^0,$$

und:

$$(10) \quad \frac{\partial^2 y_{n+1}}{\partial y_a \partial y_b} = \sum_{c; d, f}^{n+1; n} P_c^0 \frac{\partial^2 x_c}{\partial u_b \partial u_f} \frac{\partial u_b}{\partial y_a} \frac{\partial u_f}{\partial y_b} + \sum_{c, d}^{n+1; n} P_c^0 \frac{\partial x_c}{\partial u_b} \frac{\partial^2 u_b}{\partial y_a \partial y_b}.$$

Es wird demnach auf Grund von (5) und (6):

$$(11) \quad c_{ab} = \sum_{c, d}^n E_{c, d}^0 \frac{\partial u_c}{\partial y_a} \frac{\partial u_d}{\partial y_b}.$$

Wir erhalten daher nach ähnlichen Umformungen, wie ich sie in § 4 meiner Abhandlung\*) „Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen“ vorgenommen habe, für das Riemann'sche Krümmungsmaass in irgend einem Punkte des Raumes (3) den Ausdruck:

$$(12) \quad K = \frac{\sum_{a, b; c, d}^n (E_{ab} E_{cd} - E_{ac} E_{bd}) (du_a \delta u_d - du_b \delta u_c) (du_b \delta u_c - du_c \delta u_b)}{\sum_{a, b; c, d}^n (e_{ab} e_{cd} - e_{ac} e_{bd}) (du_a \delta u_d - du_b \delta u_c) (du_b \delta u_c - du_c \delta u_b)}.$$

Da bei Deformation das Riemann'sche Krümmungsmaass erhalten bleiben muss, so lehrt er ohne Weiteres, dass eine solche nur dann möglich ist, wenn alle *Unterdeterminanten 3. Ordnung der aus den Fundamentalgrößen 2. Ordnung  $E_{ab}$  gebildeten Determinante verschwinden*.

II. Beschränken wir uns nunmehr auf den Fall  $n = 3$ , so giebt es offenbar unter den gemachten Voraussetzungen in jedem Punkte des Raumes (3) eine ausgezeichnete Richtung von der Beschaffenheit,

\*) S. Math. Ann. Bd. XXVII, p. 537.

dass alle dieselbe enthaltenden geodätischen Flächen verschwindendes Krümmungsmaass besitzen. Aus diesen Richtungen setzt sich ein System von doppelt endlich viel Linien zusammen, welche man zu Linien  $u_1 = \text{const.}$ ,  $u_2 = \text{const.}$  machen kann. Dann muss offenbar sein:

$$(13) \quad E_{13} = 0, \quad E_{23} = 0, \quad E_{33} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun zunächst in Verbindung mit:

$$(14) \quad \sum_{a=1}^4 P_a \frac{\partial P_a}{\partial u_3} = 0,$$

dass die  $P_a$  von  $u_3$  unabhängig sind. Es besagen daher die Gleichungen:

$$(15) \quad \sum_{a=1}^4 \frac{\partial P_a}{\partial u_1} \frac{\partial x_a}{\partial u_3} = 0, \quad \sum_{a=1}^4 \frac{\partial P_a}{\partial u_2} \frac{\partial x_a}{\partial u_3}, \quad \sum_{a=1}^4 \frac{\partial P_a}{\partial u_3} \frac{\partial x_a}{\partial u_3},$$

und:

$$(16) \quad \sum_{a=1}^4 \left( \frac{\partial x_a}{\partial u_3} \right)^2 = 1,$$

welch letztere Gleichung nur den Parameter  $u_3$  näher definirt, dass auch die  $\frac{\partial x_a}{\partial u_3}$  unabhängig von  $u_3$  sind, d. h. dass die  $x_a$  lineare Functionen von  $u_3$  sind, dass der zu deformirende Raum also gerade Linien enthalten muss.

Wir können denselben daher darstellen in der Form:

$$(17) \quad x_a = \varphi_a(u_1, u_2) + u_3 \psi_a(u_1, u_2) \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

wo:

$$(18) \quad \sum_{a=1}^4 \psi_a^2 = 1.$$

Hierdurch wird  $E_{33}$  von selbst = 0. Sollen also auch  $E_{13}$  und  $E_{23}$  unabhängig von  $u_3$  verschwinden, so liefert das die vier Determinantengleichungen:

$$(19) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2}, \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \psi_a \right| = 0, \\ \left| \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2}, \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2}, \psi_a \right| = 0, \\ \left| \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2}, \psi_a \right| = 0, \\ \left| \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2}, \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2}, \psi_a \right| = 0, \end{cases}$$

welche in dem Verschwinden der Matrix:

$$(20) \quad \left| \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2}, \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2}, \psi_a \right| = 0$$

einen gemeinsamen Ausdruck finden.

Dies besagt nun geometrisch, dass es zu jeder Geraden zwei unendlich benachbarte gibt, von welchen sie getroffen wird. Denn dann müssen für gegebene Werthe von  $u_1$  und  $u_2$  die 4 Gleichungen befriedigt werden können:

$$(21) \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2} du_2 + u_3' \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1} du_1 + u_3' \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2} du_2 + (u_3' - u_3) \psi_a = 0$$

$$(\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Wir wollen hier zunächst von dem Fall absehen, dass diese zwei benachbarten und schneidenden Geraden für jede Gerade des betrachteten Raumes zusammenfallen. Dann können wir offenbar die Geraden desselben zu zwei Schaaren abwickelbarer Flächen zusammenfassen und annehmen, dass dies die Flächen  $u_1 = \text{const.}$  und  $u_2 = \text{const.}$  seien, dass also die Gleichungen (20) durch  $du_1 = 0$  resp.  $du_2 = 0$  befriedigt werden können. Es müssen daher die Matrices:

$$(22) \quad \left| \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \psi_a \right| \quad \text{und} \quad \left| \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2}, \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2}, \psi_a \right| = 0$$

sein, wodurch die Matrix (20) von selbst verschwindet.

Diesen Gleichungen genügt man nun auf die allgemeinste Weise dadurch, dass man setzt:

$$(23) \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1} = \lambda_1 \psi_a + \mu_1 \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2} = \lambda_2 \psi_a + \mu_2 \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2},$$

wo die  $\lambda_a$  und  $\mu_a$  gewisse Functionen von  $u_1$  und  $u_2$  sind; sind dieselben sowie die  $\psi_a$  den Integrabilitätsbedingungen gemäss gewählt, so sind die  $\varphi_i$  dadurch bis auf willkürliche Constanten bestimmt.

Offenbar wird jetzt:

$$(24) \quad \begin{cases} e_{11} = \lambda_1^2 + (u_3 + \mu_1)^2 F_{11}, & e_{13} = \lambda_1, \\ e_{12} = \lambda_1 \lambda_2 + (u_3 + \mu_1)(u_3 + \mu_2) F_{12}, & e_{23} = \lambda_2, \\ e_{22} = \lambda_2^2 + (u_3 + \mu_2)^2 F_{22}, & e_{33} = 1, \end{cases}$$

wo:

$$(25) \quad F_{ab} = \sum_c^4 \frac{\partial \psi_c}{\partial u_a} \frac{\partial \psi_c}{\partial u_b}.$$

Was nun die Integrabilitätsbedingungen betrifft, so lauten dieselben:

$$(26) \quad \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial u_1 \partial u_2} (\mu_1 - \mu_2) + \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \lambda_2 \right) \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1} - \left( \frac{\partial \mu_2}{\partial u_1} - \lambda_1 \right) \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2} \\ + \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_1} \right) \psi_a = 0.$$

III. Hier sind zunächst einige *specielle Fälle* gesondert zu behandeln. Es kann zunächst der Fall eintreten, dass die  $\psi_a$  überhaupt von  $u_1$  und  $u_2$  unabhängig, also constant sind, durch welche Annahme die Matrix (20) von selbst verschwinden würde, wie auch die  $\varphi_a$  beschaffen sein mögen. Bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems wird man dann  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$  und  $\psi_4 = 1$  setzen können; führt man noch für  $u_3$  als dritten Parameter  $u_3 + \varphi_4(u_1, u_2)$  ein, so kommt man gerade auf *den cylindrischen Raum*, welchen ich schon a. a. O. p. 172 als deformirbar erwähnt habe.

Es kann zweitens der Fall eintreten, dass die  $\psi_a$  nur von  $u_1$  abhängig sind. Dann muss offenbar nach (25) sein:

$$(27) \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \lambda_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_1} = 0.$$

Führt man daher statt des Parameters  $u_3$  den neuen Parameter

$$u_3' = \mu_1 + u_3$$

ein, wodurch die Gleichungen (17) unseres Raumes übergehen in:

$$(28) \quad x_a = \varphi'_a(u_1, u_2) + u_3' \psi_a,$$

wo:

$$\varphi'_a = \varphi_a - \mu_1 \psi_a,$$

so wird auch:

$$\frac{\partial \varphi'_a}{\partial u_2} = 0,$$

unser Raum würde sich also auf eine *Fläche* reduciren, welche natürlich innerhalb eines ebenen vierdimensionalen Raumes deformirbar ist.

Nehmen wir endlich an, dass die Integrabilitätsbedingungen dadurch erfüllt sind, dass ausser den Gleichungen (27) noch die Gleichungen:

$$(29) \quad \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial u_1} - \lambda_1 = 0$$

bestehen, so würde:

$$(30) \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_b} = \frac{\partial (\mu_1 \psi_a)}{\partial u_b}$$

sein. Führt man demnach  $u_3' = \mu_1 + u_3$  wiederum als neuen Parameter ein, so ist unser Raum darstellbar in der Form:

$$(31) \quad x_a = u_3 \psi_a(u_1, u_2),$$

und es ist evident, dass jede Deformation der in dem sphärischen Raume (18) gelegenen Fläche:

$$(32) \quad x_a = \psi_a(u_1, u_2)$$

eine Deformation *des conischen Raumes* (31) liefert.

IV. Was nun den *allgemeinen Fall* betrifft, so folgt aus den Integrabilitätsbedingungen (26) zunächst die Gleichung:

$$(33) \quad \left| \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2}, \quad \psi_a \right| = 0.$$

Ist dieselbe erfüllt, so kann man die Gleichungen (26) durch die drei symmetrischen ersetzen:

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial F_{11}}{\partial u_2} + \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \lambda_2 \right) F_{11} + \left( \lambda_1 - \frac{\partial \mu_2}{\partial u_1} \right) F_{12} = 0, \\ \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial F_{22}}{\partial u_1} + \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \lambda_2 \right) F_{12} + \left( \lambda_1 - \frac{\partial \mu_2}{\partial u_1} \right) F_{22} = 0, \\ -(\mu_1 - \mu_2) F_{12} + \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_1} \right) = 0. \end{cases}$$

Indem man die ersten beiden Gleichungen nach  $\frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \lambda_2$  und  $\frac{\partial \mu_2}{\partial u_1} - \lambda_1$  auflöst, ist es leicht aus diesen drei Differentialgleichungen 1. Ordnung eine Differentialgleichung 2. Ordnung für

$$\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) = \mu$$

von folgender Form abzuleiten:

$$(35) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial \mu}{\partial u_1} A_1 + \frac{\partial \mu}{\partial u_2} A_2 + \mu A = 0,$$

wo die  $A, A_1, A_2$  rationale Functionen der  $F_{a5}$  und deren ersten und zweiten Ableitungen sind. Auf Grund dieser Differentialgleichung ist  $\mu$  durch die  $F_{a5}$  bestimmt bis auf je eine willkürliche Function von  $u_1$  resp.  $u_2$ ;  $\mu_1$  und  $\mu_2$  selbst und in Folge dessen auch  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  kann man sich dann dadurch vollständig gegeben denken, dass man etwa  $\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$  noch gleich einer willkürlich gegebenen Function von  $u_1$  und  $u_2$  setzt. Man bemerke jedoch, dass diese willkürliche Function nicht als weiteres willkürliches Element in der Bestimmung des gesuchten Raumes auftritt, dass dieselbe vielmehr ihren Ursprung darin hat, dass über die Fläche  $u_3 = 0$  innerhalb desselben noch nichts festgesetzt ist, während ja  $u_3$  selbst die Entfernung irgend eines Punktes jeder Geraden vom Punkte  $u_3 = 0$  derselben bedeutet. So würde z. B. die Annahme, dass  $\mu_1 + \mu_2 = 0$ , geometrisch darauf hinauskommen, dass eine gewisse Mittelfläche als die Fläche  $u_3 = 0$  gewählt wird, nämlich der Ort der Mitten zwischen den beiden Schnittpunkten jeder Geraden mit den beiden unendlich benachbarten, welche sie treffen. Was aber die beiden zur näheren Bestimmung von  $\mu$  dienenden Functionen von  $u_1$  resp.  $u_2$  betrifft, so kann man, nachdem man etwa festgesetzt hat, dass  $u_1$  resp.  $u_2$  die Bögen der Curven  $u_2 = 0$  resp.  $u_1 = 0$  auf der Fläche (32) bedeuten, diese Functionen sich dadurch gegeben denken,



dass die Bögen der Curven  $u_2 = 0$  resp.  $u_1 = 0$  auf der Mittelfläche als Functionen von  $u_1$  resp.  $u_2$  vorgelegt sind.

Nachdem also die Fläche (32) innerhalb des sphärischen Raumes (18) willkürlich angenommen ist und auf ihr die Linien  $u_2 = \text{const.}$  und  $u_1 = \text{const.}$  der Bedingung (33) gemäss gewählt worden sind, ist durch die eben gemachte weitere Festsetzung vollständig ein Raum bestimmt, welcher die früher gefundenen nothwendigen Bedingungen der Deformirbarkeit befriedigt.

Nun hat offenbar die Bedingung (33) die geometrische Bedeutung, dass die Linien  $u_1 = \text{const.}$  und  $u_2 = \text{const.}$  die Fläche (32) in unendlich kleine Vierecke eintheilen, deren Ecken in grössten Kugeln des sphärischen Raumes (18) liegen, oder dass jene Linien *conjugirte Linien* sind. Betrachten wir daher die Ausdrücke (24) für die Coefficienten des Linienelements und bedenken, dass die developpablen Flächen sowohl, zu welchen sich die Geraden zusammenfassen lassen, als auch die Mittelfläche in unserem allgemeinen Falle eine bei Deformation invariante Bedeutung haben, so folgt, dass *der so bestimmte Raum dann und nur dann wirklich innerhalb des ebenen vierdimensionalen Raumes deformirbar ist, wenn die Fläche (32) innerhalb des sphärischen Raumes (18) so deformirt werden kann, dass die Linien  $u_1 = \text{const.}$  und  $u_2 = \text{const.}$  die Eigenschaft beibehalten, einander conjugirt zu sein.*

Es ist klar, dass bei willkürlicher Annahme der Fläche (18) sowohl als des einen Systems von Linien auf ihr eine solche Deformation nicht möglich sein wird. Wir erhalten demnach das Resultat, dass *ein innerhalb eines ebenen vierdimensionalen Raumes gelegener Raum von 3 Dimensionen, für welchen die aus den Fundamentalgrössen 2. Ordnung  $E_{\alpha\beta}$  gebildete Determinante (oder das Krümmungsmaass im Kronecker'schen Sinne) überall verschwindet, im Allgemeinen noch nicht deformirbar ist.* Die weiteren Bedingungen, welche hierzu nothwendig, aber auch hinreichend sind, zeigen, dass die Aufstellung aller solchen deformirbaren Räume, die Integration der Differentialgleichung (35) vorausgesetzt, hinauskommt auf die Lösung des Problems, *innerhalb eines sphärischen dreidimensionalen Raumes alle Flächen zu finden, welche in ihm so deformirbar sind, dass zwei conjugirte Liniensysteme derselben in ebensolche übergehen.* Dieses, wie es scheint, sehr schwierige Problem zu lösen, ist mir nicht gelungen. Ich will mich hier damit begnügen, auf sehr einfache *Beispiele* solcher Flächen hinzuweisen. Es sind die Rotationsflächen, d. h. die durch Rotation irgend einer Curve innerhalb des sphärischen Raumes (18) um eine durch den Anfangspunkt gehende Ebene entstandenen Flächen. Sie sind stets in andre Rotationsflächen so deformirbar, dass die Parallelkreise und Meridiane in ebensolche übergehen. Man sieht leicht, dass dieselben

i. A. keine grössten Kreise, die ihnen entsprechenden dreidimensionalen Räume also keine Ebenen enthalten werden.

V. Es bleibt uns zuletzt noch übrig den bisher ausgeschlossenen Fall zu untersuchen, dass die zwei jeder Geraden benachbarten, welche sie treffen, jedesmal zusammenfallen, dass die Geraden des betrachteten Raumes also nur *ein* System abwickelbarer Flächen bilden. Sind dies die Flächen  $u_2 = \text{const.}$ , ist also wieder:

$$(36) \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1} = \lambda_1 \psi_a + \mu_1 \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1},$$

so ergibt die Bedingung, dass jede Gleichung der Determinantenform (cfr. (21)):

$$(37) \quad \left| \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1} + u_3' \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2} + u_3' \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2}, \quad \psi_a \right| = 0$$

die Doppelwurzel  $u_3' = -\mu_1$  haben muss, dass sein muss:

$$(38) \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2} = \lambda_2 \psi_a + \mu_1 \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2} + \nu \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1},$$

woraus sich die Integrabilitätsbedingungen:

$$(39) \quad \nu \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial u_1^2} + \left( \lambda_2 + \frac{\partial \nu}{\partial u_1} - \frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} \right) \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1} + \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial u_1} - \lambda_1 \right) \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2} + \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_1} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_2} \right) \psi_a = 0$$

ergeben.

Sehen wir wiederum von denselben Specialfällen ab, die bei Behandlung der Integrabilitätsbedingungen (26) in Betracht kamen und auch dieselbe Erledigung finden, so folgt aus den Gleichungen (39), dass die Determinante:

$$(40) \quad \left| \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial u_1^2}, \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2}, \quad \psi_a \right| = 0$$

sein muss. Es bedeutet dies, dass die Curven  $u_2 = \text{const.}$  der Fläche (32) *Haupttangentialcurven* sind. Es kommt also darauf an, diese Fläche innerhalb des sphärischen Raumes (18) so zu verbiegen, dass eine Schaar von Haupttangentialcurven derselben in ebensolche übergeht. Das ist aber, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, nicht anders möglich, als wenn diese Haupttangentialcurven grösste Kreise sind, *die abwickelbaren Flächen, zu welchen wir die Geraden des zu deformirenden Raumes zusammengefasst haben, also Ebenen*. Dass in diesem Falle wirklich eine Deformation möglich ist, hat ja Herr Killing a. a. O. bewiesen. Aus unserer Behandlung der Frage geht noch hervor, dass mit Ausnahme eines sogleich zu erwähnenden Specialfalles diese Deformation nur auf dem von Herrn Killing angegebenen Wege

geschehen kann, nämlich so, dass *jene Ebenen wieder in Ebenen übergehen*. (Eine Ausnahme bilden natürlich auch die oben erwähnten cylindrischen und conischen Räume). Man bemerke noch, dass hier bei der Deformation noch über eine willkürliche Function einer Veränderlichen verfügt werden kann, während in dem oben behandelten sogenannten allgemeinen Falle nur eine willkürliche Constante disponibel sein wird.

Hingegen kann bei der Deformation noch über drei willkürliche Functionen je einer Veränderlichen verfügt werden eben in jenem Ausnahmefalle, nämlich, wenn die Fläche (18) auf eine grösste Kugel abwickelbar ist. Denn da sich in diesem Falle je zwei aufeinanderfolgende dieser grössten Kreise schneiden, so haben auch zwei aufeinanderfolgende Ebenen des zu deformirenden Raumes eine Gerade gemeinsam, *dieser Raum kann also in einen ebenen Raum deformirt werden oder er hat verschwindendes Riemann'sches Krümmungsmaass*. Dies lässt sich auch leicht analytisch verificiren.

Näher auszuführen, wie die Deformation in diesen Fällen wirklich vorzunehmen ist, scheint mir von geringerem Interesse. Die grosse Anzahl von Specialfällen, auf welche schon in diesem einfachsten Falle der Deformation eines dreidimensionalen Raumes innerhalb eines ebenen vierdimensionalen Rücksicht zu nehmen ist, mag erkennen lassen, wie sich dies Problem beim Aufsteigen zu höheren Dimensionen complicirt.

Maciejewo, im September 1886.

---