

SOPRA I GRUPPI FINITI DI COLLINEAZIONI QUATERNARIE DOTATI DI CUBICHE GOBBE INVARIANTI.

Nota di **Edgardo Ciani**, in Milano.

Adunanza del 27 luglio 1902.

La Nota presente trae la sua origine da un'altra del KOHN riguardante le relazioni mutue di posizione di due cubiche gobbe invarianti simultanee, prima rispetto a un gruppo ottaedrico di collineazioni quaternarie, poi rispetto a un gruppo icosaedrico *). La Nota del KOHN ha carattere essenzialmente sintetico ed è quindi manchevole della rappresentazione analitica dei gruppi in parola mediante sostituzioni lineari quaternarie. D'altra parte un lavoro analitico del MASCHKE assegna tutte le specie proiettive di gruppi finiti lineari quaternari che sono oloedricamente isomorfi a gruppi totali, od alterni sopra n elementi **) e siccome fra questi figurano naturalmente quelli dei poliedri regolari ***) così

*) KOHN, *Ueber die Oktaëder und die Ikosaëderlage von zwei cubischen Raumcurven* (Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien 1899).

**) MASCHKE, *Bestimmung aller ternären und quaternären Collineations-gruppen, welche mit symmetrischen und alternirenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoeidrisch isomorph sind* (Mathematische Annalen, Bd. LI).

***) Sopra tali gruppi e particolarmente sulla cfz. generata dal più notevole di essi, che è un gruppo icosaedrico, è in corso di stampa negli Annali di Matematica una mia memoria la quale ha con questa qualche punto di contatto (Numeri 5, 6, 7 della Nota presente).

è certo che pure fra essi debbono cercarsi i gruppi considerati dal KOHN. Determinare quali essi siano fu il primo scopo della Nota presente e di qui a stabilire tutti i gruppi finiti lineari quaternari che posseggono cubiche gobbe invarianti il passo è così naturale e ovvio che basta appena accennarlo. A ciò è dedicata la prima parte di questo lavoro, il quale, per maggiore omogeneità e facilità di lettura, ho reso indipendente tanto da quello del KOHN, quanto da quello del MASCHKE. Quelli dei gruppi trovati che si possono mettere sotto forma reale, rientrano naturalmente nella classificazione che di tali gruppi fa il BAGNERA nella sua importante memoria destinata a tale scopo *) e di cui all'occorrenza richiamo notazioni e indicazioni di pagina.

Fra i gruppi qui costruiti, due danno luogo a cfz. notevoli dal punto di vista geometrico: sono l'ottaedrico e l'icosaedrico. Ma la cfz. di quest'ultimo è largamente studiata nella mia già citata memoria. Mi sono dunque limitato adesso a considerare la cfz. che ha origine dall'altro, cioè dall'ottaedrico e a ciò è dedicata la 2^a parte della Nota presente. Tale cfz. si aggruppa intorno a due esagoni e a due quadrangoli invarianti che ne formano il nucleo e intorno ai quali si dispongono per così dire le due cubiche gobbe e le superficie invarianti. Relativamente a queste superficie si vede subito che ne esiste una sola del 2° grado; che non ne esistono del 3°, e che del 4° grado ne esiste un fascio ed una rete (n° 14). Particolarmente interessano quelle fra esse dotate di un numero finito di punti singolari. Così se ne trovano, nella rete, due sistemi ∞^1 in guisa che la superficie generica dell'uno ha 8 punti doppi (n° 20) e la superficie generica dell'altro ne ha 12 (n° 19). Fra tutte vi figurano anche, in numero finito, esempi notevoli: così due Jacobiane di due sistemi lineari ∞^3 di quadriche (superficie di WEDDLE) (n° 15); due superficie di KUMMER 4 volte tetraedroidali (n° 19); due superficie desmiche (n° 19), e infine un caso, che credo nuovo, di quattro superficie con sei punti biplanari e 4 punti conici ciascuna, nei vertici dei due esagoni e dei due quadrangoli invarianti (n° 17).

*) BAGNERA, *I gruppi finiti reali di sostituzioni lineari quaternarie* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1901).

Costruzione dei gruppi cercati.

1. Per costruire tutti i possibili gruppi finiti di collineazioni quaternarie rispetto alle quali una cubica gobba irriducibile è invariante, si cominci dall'osservare che se G è uno di tali gruppi esso individuerà sulla curva un gruppo g subordinato di proiettività binarie il quale per la razionalità della curva presenterà i soliti cinque casi cosiddetti della piramide, della doppia piramide, del tetraedro, dell'ottaedro (o cubo), dell'icosaedro (o dodecaedro). Esaminiamo particolarmente ciascuno di essi.

2. *Gruppi della piramide.* — Il gruppo della piramide è costituito da un gruppo ciclico di potenze di una stessa collineazione che ha il periodo finito. Per esprimere analiticamente la collineazione ricorreremo alla ben nota rappresentazione parametrica della cubica gobba nella sua forma più semplice. Sieno perciò A e B due punti della curva. Noi assumeremo per tetraedro fondamentale quello formato dai piani osculatori in A e B e dai piani tangenti alla curva in A e B passanti rispettivamente per B e per A , e poichè dovremo ricorrere spesso a un siffatto tetraedro lo chiameremo, per brevità, un « *tetraedro associato* » alla curva. Ogni coppia di punti della cubica ne individua uno. Ricorrendo dunque a un tal tetraedro e disponendo opportunamente del punto unità, la rappresentazione parametrica della cubica è come ben si sa

$$x_1 = \lambda^3, \quad x_2 = \lambda^2, \quad x_3 = \lambda, \quad x_4 = 1.$$

Una collineazione C a periodo finito che trasformi la curva in sè stessa o avrà 4 punti uniti soltanto, o infiniti. Nel 1° caso, poichè il periodo è finito, i 4 punti sono vertici di un tetraedro associato alla curva: assumendolo come fondamentale la C può rappresentarsi nel modo seguente:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha^3 x_1, & \alpha^2 x_2, & \alpha x_3, & x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}, \quad \alpha^r = 1;$$

il periodo r può esser qualunque fuorchè 2, o 3. Nel caso invece che la C possenga infiniti punti uniti essa sarà necessariamente biassiale, o assiale. Se è biassiale è certo una involuzione gobba. Indicando con A e B i due punti uniti sulla curva, gli assi della involuzione sono costituiti da quei due spigoli del tetraedro associato, individuato da AB , che

hanno ciascuno un sol punto comune con la curva. La C può quindi rappresentarsi con la forma precedente supponendovi $\alpha = -1$.

Se finalmente la C è assiale il periodo è necessariamente uguale a 3: indicando come dianzi con A e B i due punti uniti sulla curva, la retta AB è asse di punti uniti; la intersezione dei piani osculatori in A e B è asse di piani uniti: su quest'ultimo sono punti uniti i vertici del tetraedro associato che A , B individuano e per la retta AB sono piani uniti le due facce del tetraedro medesimo che la contengono. La collineazione si rappresenta ancora con la C di prima supponendo che α sia una delle radici cubiche immaginarie dell'unità.

In conclusione si può dire che il gruppo attuale è individuato dando due punti distinti della curva i quali non sono altro che i punti uniti della proiettività ciclica binaria che viene a stabilirsi, in conseguenza, sulla curva medesima.

3. *Gruppi della doppia piramide.* — Per costruire un tal gruppo basta aggiungere al gruppo della piramide una collineazione C' a periodo 2 rispetto alla quale siano invarianti la curva e il gruppo delle potenze di C del n° precedente. Segue che C' è una involuzione gobba (n° 2) e che i punti uniti di C' sulla curva separano armonicamente i punti A , B del n° precedente. Prendendo quindi per punti uniti di C' quelli della coppia (11) , $(1, -1)$, la C' sarà data da

$$C' = \begin{pmatrix} x_4, x_3, x_2, x_1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \end{pmatrix}.$$

La C' e la C generano il gruppo generico cercato.

Appartiene a questa specie il gruppo quadrimio che può riguardarsi come gruppo della doppia piramide in 3 modi diversi. Per individuarlo basterà prendere tre coppie di punti armoniche, a due a due, sulla cubica. Le involuzioni che tali coppie individuano, insieme alla identità, costituiscono il gruppo cercato. Servendosi delle tre coppie $[(1, 0), (0, 1)]$; $[(1, 1), (1, -1)]$; $[(1, i), (1, -i)]$ il gruppo quadrimio cercato è formato dalla identità e dalle tre involuzioni gobbe seguenti:

$$\begin{pmatrix} -x_1, x_2, -x_3, x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_4, x_3, x_2, x_1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -x_4, x_3, -x_2, x_1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \end{pmatrix}.$$

Gli assi appartengono a una stessa serie rigata esistente sulla quadrica $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$. Il gruppo così trovato è uno dei 3 possibili gruppi quadrimio dello spazio a 3 dimensioni (il G_4^{II} della mia citata

memoria). Le tre coppie di punti armoniche a due a due sulla curva compongono un esagono al quale ricorreremo così sovente nel seguito da esser costretti per brevità a dargli un nome: lo chiameremo un esagono armonico.

4. Il gruppo quadriminomio precedente individua una seconda cubica gobba, pure invariante, e collegata alla prima da una notevole cfz. di cui ora vogliamo stabilire la esistenza. Si consideri perciò sulla cubica data un punto generico A e i suoi tre trasformati B, C, D per effetto delle collineazioni del gruppo. Il tetraedro $ABCD$ è invariante. Muovendosi il punto A e descrivendo la cubica si hanno infiniti di tali tetraedri: il luogo dei vertici è la cubica data: si domanda qual'è l'involuppo delle facce? Applicando a queste considerazioni la trasformazione duale che il sistema nullo della cubica data individua, si giunge ad una seconda serie di tetraedri invarianti di cui le facce involuppano la sviluppabile osculatrice della cubica medesima: si domanda qual'è il luogo dei vertici? La questione è semplice. Le coordinate dei vertici del tetraedro $ABCD$ possono assumersi, in funzione di λ , nel modo seguente:

$$\begin{aligned} A &\equiv (\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1); & B &\equiv (-\lambda^3, \lambda^2, -\lambda, 1); \\ C &\equiv (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3); & D &\equiv (1, -\lambda, \lambda^2, -\lambda^3). \end{aligned}$$

Allora le coordinate delle facce sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} BCD &\equiv (\lambda^2, \lambda^3, -1, -\lambda); & ABD &\equiv (-\lambda, -1, \lambda^3, \lambda^2) \\ ACD &\equiv (-\lambda^2, \lambda^3, 1, -\lambda); & ABC &\equiv (-\lambda, 1, \lambda^3, -\lambda^2) \end{aligned}$$

l'involuppo è dunque della 3^a classe. Il luogo gli deve corrispondere nel sistema nullo che la cubica data individua: esso sarà dunque costituito da una nuova cubica gobba. I punti corrispondenti ai 4 piani precedenti sono:

$$\begin{aligned} A' &\equiv (3\lambda, -1, -\lambda^3, 3\lambda^2); & C' &\equiv (3\lambda^2, -\lambda^3, -1, 3\lambda) \\ B' &\equiv (-3\lambda, -1, \lambda^3, 3\lambda^2); & D' &\equiv (3\lambda^2, \lambda^3, -1, -3\lambda) \end{aligned}$$

e si vede inoltre che i piani BCD, ACD, ABD, ABC sono osculatori della nuova curva in A', B', C', D' .

Possiamo dunque dire che:

Data una cubica gobba e un suo esagono armonico è individuato un gruppo quadriminomio rispetto al quale la curva è invariante. Il luogo dei vertici dei tetraedri invarianti circoscritti alla sua sviluppabile osculatrice e l'involuppo delle facce dei quadrangoli invarianti iscritti nella curva, co-

stituiscono una nuova cubica gobba invariante e la sua sviluppabile osculatrice. — Le due cubiche posseggono tre tetraedri associati comuni; ammettono lo stesso sistema nullo e si deducono l'una dall'altra nello stesso modo.

5. Gruppo del tetraedro. — Sarà ottenuto dal gruppo quadriminomio precedente aggiungendo una collineazione a periodo 3 rispetto alla quale la cubica gobba data e il gruppo quadriminomio siano invarianti.

Questa collineazione intanto sarà assiale (n° 2). Per individuarla indichiamo con mm' , nn' , pp' , le tre coppie di assi delle involuzioni gobbe del gruppo quadriminomio: con MM' , NN' , PP' i loro punti di appoggio con la curva. Si consideri poi su di essa il gruppo binario tetraedrico individuato dai punti suddetti e siano AA' due punti uniti di un suo sottogruppo di 3° ordine, cioè, come è ben noto, quelli che compongono l'hessiano di due terne come MNP , $M'N'P'$. Ebbene la coppia di punti AA' individua, alla maniera del n° 2, una collineazione assiale che è quella richiesta. Manifestamente essa trasformerà in sè medesima anche la 2ª cubica gobba di cui è parola nel n° precedente. Questa collineazione stabilisce fra le rette della serie rigata cui appartengono mm' , nn' , pp' una corrispondenza a periodo 3 di cui sono rette unite le hessiane delle terne mnp , $m'n'p'$.

Altrettanto può dirsi per le rette della serie coniugata, con la differenza che le due rette unite della corrispondenza (essendo invarianti ciascuna anche rispetto al gruppo quadriminomio) sono invarianti rispetto all'intero gruppo generato il quale viene così a possedere due rette invarianti alle quali manifestamente si appoggiano tutti gli assi dei sottogruppi di 2° e 3° ordine. Una maggiore opportunità per le formule che seguiranno suggerisce di mettere le involuzioni gobbe del gruppo quadriminomio sotto la forma seguente (MASCHKE, pag. 275):

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_4 \alpha \sqrt{2}, & -x_2 + x_3 \alpha^2 \sqrt{2}, & x_2 \alpha \sqrt{2} + x_3, & x_1 \alpha^2 \sqrt{2} - x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{bmatrix},$$

dove per α siano sostituiti successivamente i tre diversi valori delle radici cubiche dell'unità. Allora si vede subito che una qualunque delle precedenti insieme alla

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, \alpha x_3, \alpha^2 x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \end{pmatrix},$$

dove però è adesso α immaginaria, generano il gruppo richiesto. Esso è uno dei tre possibili gruppi tetraedrici dello spazio a tre dimensioni. È

il « tetraeder II » di MASCHKE (pag. 275) e il G_{12}^* di BAGNERA (pag. 59) (nella mia citata memoria è indicato con G_{12}''' e così continuerò a indicarlo). Le due rette invarianti sono 2 spigoli opposti del tetraedro di riferimento :

$$[(x_1 = 0, x_4 = 0); (x_2 = 0, x_3 = 0)].$$

6. Gruppo dell'ottaedro. — Lo otterremo dal gruppo tetraedrico precedente mediante queste considerazioni. Il g_{12} binario tetraedrico che già esiste su di una qualunque delle cubiche invarianti, come subordinato al G_{12}''' del numero precedente, appartiene a un g_{24} binario di facile e nota determinazione. Sieno AA' i due punti doppi di una delle 6 involuzioni binarie di g_{24} esterne a g_{12} . Ebbene la coppia AA' individua (n° 2) una involuzione gobba rispetto alla quale tanto la cubica considerata quanto il G_{12}''' sono invarianti. Questa involuzione gobba I è quella da aggiungersi al G_{12}''' per generare il gruppo cercato rispetto al quale, manifestamente, anche la 2ª cubica gobba dei n° precedenti sarà pure invariante. Per ottenere l'espressione analitica di I si osservi che essa, applicata ad una determinata collineazione a periodo 3 del G_{12}''' , la trasforma nel suo quadrato e quindi ne lascia invariati gli elementi uniti. Ne segue che le due rette invarianti del G_{12}''' (le quali rispetto al gruppo di cui ora trattiamo debbono comporre una coppia invariante) non possono essere separatamente invarianti rispetto a I , ma debbono invece essere trasformate l'una nell'altra. La I sarà dunque della forma:

$$\begin{bmatrix} ax_2 + bx_3, & cx_1 + dx_4, & mx_1 + nx_4, & px_2 + qx_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{bmatrix} = I.$$

Dopo, si esiga che I trasformi la collineazione di 3° ordine (n° 5)

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, \alpha x_3, \alpha^2 x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \end{pmatrix}$$

nel suo quadrato e finalmente si osservi che la I deve essere permutabile con quella involuzione gobba del gruppo quadriminomio che si ha per $\alpha = 1$ (n° 5).

Si trova così per la I la forma seguente

$$I = \begin{pmatrix} x_2, x_1, -x_4, -x_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \end{pmatrix}.$$

Questa col G_{12}''' genera il G_{24} cercato (indicato con G_{24}^v nella mia memoria: nel seguito continueremo ad indicarlo con G_{24}^v). È uno dei cinque gruppi ottaedrici nello spazio a tre dimensioni: è l'« octaeder. III » di MASCHKE (pag. 294) e il G_{24}^* di BAGNERA (pag. 125).

7. *Gruppo dell'icosaedro.* — Riprendiamo il G'''_{12} del n° 5, una qualunque delle due cubiche invarianti e il g_{12} binario subordinato che viene a stabilirsi sulla curva in causa del G'''_{12} . Ebbene si consideri sulla cubica un g_{60} binario icosaedrico di cui il precedente g_{12} sia sottogruppo e in g_{60} una involuzione esterna a g_{12} : se AA' sono i punti doppi di questa involuzione, la coppia AA' individua, alla maniera del n° 2, una involuzione che trasforma la cubica considerata in sè stessa e che insieme al G'''_{12} del n° 5 genera il gruppo icosaedrico cercato.

Così ne è dimostrata l'esistenza: per ottenerne la rappresentazione analitica e insieme far vedere che si tratta di una sola specie proiettiva basta cercare di costruirlo partendo da un G'''_{12} . Allo scopo si costruisca una collineazione I esterna al G'''_{12} e sottoposta alle seguenti condizioni:

$$I^2 = 1; \quad IS_3I = S_3; \quad (IS_2)^3 = 1,$$

dove S_2 ed S_3 sono due sostituzioni a periodi rispettivi 2 e 3 del G'''_{12} . Assumendo per S_2 ed S_3 le seguenti (n° 5)

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_4\sqrt{2}, & -x_2 + x_3\sqrt{2}, & x_2\sqrt{2} + x_3, & x_1\sqrt{2} - x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{bmatrix} = S_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \alpha x_3, & \alpha^2 x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{bmatrix} = S_3$$

si è condotti dopo semplici calcoli alla seguente forma per I :

$$I = \begin{bmatrix} x_1\sqrt{3} + x_2, & x_1 - x_2\sqrt{3}, & 2x_4, & 2x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{bmatrix}.$$

La I aggiunta al G'''_{12} genera il G_{60} cercato. Esso è «l'ikosaeder III» di MASCHKE (pag. 281). Non figura fra i gruppi di BAGNERA perchè non è reale. Nella mia memoria è indicato con G_{60}^v e a quella rimaniamo il lettore per maggiori dettagli tanto per la costruzione della I (n° 14), quanto per dimostrare che anche la seconda cubica gobba invariante del G'''_{12} , da cui siamo partiti, è pure invariante rispetto all'intero G_{60}^v costruito (n° 38); come infine per esaminare i particolari della notevole cfz. a cui G_{60}^v dà origine.

La configurazione del gruppo ottaedrico G_{24}^v .

8. Per caratterizzare, anzitutto, con simboli opportuni le collineazioni del G_{24}^v osserviamo che esso funziona come gruppo totale sopra 4 elementi: ad es. sopra i 4 assi di punti uniti dei 4 sottogruppi di 3°

ordine: indicando queste rette con i singoli m, n, p, q si vede (n° 5) che esse sono le seguenti:

$$\begin{aligned} m &= \begin{bmatrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{bmatrix}; & n &= \begin{bmatrix} x_2\sqrt{2} + x_3 = 0 \\ x_1\sqrt{2} - x_4 = 0 \end{bmatrix}; \\ p &= \begin{bmatrix} x_2\alpha\sqrt{2} + x_3 = 0 \\ x_1\alpha^2\sqrt{2} - x_4 = 0 \end{bmatrix}; & q &= \begin{bmatrix} x_2\alpha^2\sqrt{2} + x_3 = 0 \\ x_1\alpha\sqrt{2} - x_4 = 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dove α è radice cubica immaginaria dell'unità. Ebbene rappresenteremo simbolicamente ogni collineazione del gruppo mediante la sostituzione corrispondente che essa opera sopra i 4 simboli suddetti m, n, p, q .

Ciò premesso, il sottogruppo quadrimio è costituito dalla identità e dalle 3 involuzioni gobbe seguenti:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 + x_4\sqrt{2} & -x_2 + x_3\sqrt{2} & x_2\sqrt{2} + x_3 & x_1\sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} &= (mn)(pq) \\ \begin{bmatrix} x_1 + x_4\alpha\sqrt{2} & -x_2 + x_3\alpha^2\sqrt{2} & x_2\alpha\sqrt{2} + x_3 & x_1\alpha^2\sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} &= (mp)(nq) \\ \begin{bmatrix} x_1 + x_4\alpha^2\sqrt{2} & -x_2 + x_3\alpha\sqrt{2} & x_2\alpha^2\sqrt{2} + x_3 & x_1\alpha\sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} &= (mq)(np). \end{aligned}$$

Aggiungendovi la

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \alpha x_3 & \alpha^2 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = (nqp)$$

si genera il sottogruppo tetraedrico (sottogruppo alterno). E finalmente aggiungendo la involuzione gobba del n° 6

$$(pq) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

si genera il G_{24}^v che adesso vogliamo considerare.

9. Esso contiene 4 sottogruppi di 6° ordine simili fra di loro. Ecco le collineazioni di uno di essi

$$(pqn)^r, \quad (pn), \quad (pq), \quad (qn) \quad \text{dove } r=1, 2, 3.$$

In questo, il sottogruppo di 3° ordine è invariante e quindi gli assi dei suoi elementi uniti sono invarianti rispetto a (pq) , (pn) , (qn) : cioè questi assi incontrano quelli di (pq) , (qn) , (pn) . Ma un punto unito per (pqn) e per (pq) è unito per l'intero gruppo di 6° ordine

e quindi appartiene anche agli assi di (pn) e di (qn) . Queste poche osservazioni sono sufficienti per esplorare la cfz. del sottogruppo attuale di 6° ordine. Le conclusioni sono le seguenti: In un sottogruppo di 6° ordine G_6 i 6 assi delle involuzioni gobbe s'incontrano a tre a tre in due punti sull'asse di punti uniti del sottogruppo G_3 del 3° ordine di G_6 e dualmente esistono a tre a tre in due piani passanti per l'asse di piani uniti del G_3 stesso in guisa che quelli che passano per un punto esistono anche in un piano e viceversa. I punti in cui tali assi si appoggiano all'asse di piani uniti del G_3 compongono due terne binarie di cui l'una è la forma Q dell'altra: il comune gruppo hessiano è costituito dai punti uniti del G_3 che esistono sull'asse di piani uniti. Dualmente ecc. Un G_6 possiede dunque due punti e due piani invarianti.

Viceversa, se gli assi di due involuzioni gobbe del G_{24}^v s'incontrano, le due involuzioni appartengono a uno stesso G_6 . Infatti, è anzitutto a notare che non possono incontrarsi assi di involuzioni gobbe appartenenti entrambi al sottogruppo quadriminomio ($n^\circ 3$). Prendiamo poi un asse di (pq) e osserviamo che esso non può incontrare alcuno degli assi l, l' di $(mn)(pq)$. Perchè avendosi $(mqnp)^2 = (mn)(pq)$ segue che i punti uniti di $(mqnp)$ sono sopra l, l' . Ma si ha anche: $(mp)(nq)(pq) = (mqnp)$; ora $(mp)(nq)$ permuta fra loro l con l' , se dunque (pq) non facesse altrettanto, i punti uniti di $(mqnp)$ non potrebbero esistere sopra l od l' . Dunque la (pq) opera lo scambio di l con l' , quindi niuno di questi ultimi incontra assi di (pq) . Ne segue che un asse di (pq) non ne incontra alcuno di (mn) altrimenti un tal punto sarebbe unito anche per il prodotto $(mn)(pq)$, e finalmente ne segue pure che il medesimo asse in parola non ne incontra alcuno di $(mq)(pn)$ o di $(mp)(qn)$ altrimenti, avendosi $(pq)[(mq)(pn)](pq) = (pm)(qn)$ esisterebbe un punto unito comune a $(mq)(pn)$ e $(mp)(qn)$, il che è impossibile. Dunque l'affermazione fatta è provata e si può dire:

I 12 assi delle 6 involuzioni gobbe esterne al sottogruppo quadriminomio, s'incontrano a tre a tre in 8 punti ed esistono a tre a tre in 8 piani, in guisa che quelli che passano per un punto esistono anche in un piano e viceversa.

10. Gli 8 punti e gli 8 piani precedenti, i quali costituiscono i punti e i piani uniti dei sottogruppi di 6° ordine, sono tutti distinti perchè se due coincidessero esisterebbero punti, o piani invarianti rispetto a due

G_6 e quindi rispetto all'intero G_{24}^v . Inoltre non esiste in G_{24}^v alcuna collineazione che possa trasformare uno nell'altro i due punti uniti, o i due piani uniti di uno stesso G_6 perchè una tale collineazione dovrebbe essere esterna al G_6 e trasformarlo in sè stesso. Dunque gli 8 punti in questione e gli 8 piani si dividono in due quadrangoli separatamente invarianti e in due tetraedri pure separatamente invarianti. V'ha di più: considerando la figura descritta nel n° precedente si vede che un piano unito di un G_6 contiene 4 dei punti in questione: di questi, uno è unito per quel G_6 , gli altri appartengono ai 3 G_6 rimanenti. Dualmente ecc. Dunque:

*Gli 8 punti uniti e gli 8 piani uniti dei 4 sottogruppi di 6° ordine, costituiscono i vertici e le facce di due tetraedri di MÖBIUS iscritti e circoscritti l'uno all'altro e ciascuno invariante rispetto al gruppo totale G_{24}^v . Le rette che congiungono i vertici omologhi dei due tetraedri e quelle che sono intersezione di facce omologhe, compongono gli assi di punti uniti e gli assi di piani uniti dei sottogruppi di 3° ordine. Queste otto rette ammettono due, e due sole, trasversali comuni *) che compongono la coppia invariante del G_{24}^v totale.*

11. La considerazione delle collineazioni a periodo 4 del gruppo G_{24}^v mostra che esse debbono avere 4 soli punti uniti ciascuna (n° 2), due sopra ciascuno dei due esagoni armonici delle due curve. Dunque:

Esistono due, e due soli, esagoni invarianti: essi sono iscritti, uno in ciascuna, delle due cubiche invarianti, e secondo la denominazione adottata sono i due esagoni armonici del gruppo (n° 3).

Esistono finalmente ∞^1 ottagoni e dodecagoni invarianti. Per costruirli basta partire da un punto generico unito per un G_3 o per un G_2 e applicare le collineazioni del G_{24}^v .

12. Dimostrata la esistenza di due tetraedri invarianti T e T' (li indicheremo sempre convenzionalmente con queste lettere) assumiamo uno di essi T per fondamentale mediante la trasformazione (MASCHKE, pag. 275):

*) CAPORALI E DEL PEZZO, *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* (Volume delle Memorie di CAPORALI, pag. 277, n° 20).

$$\begin{aligned}
 y_1 &\equiv -i\sqrt{3}(x_1 + x_2), \\
 y_2 &\equiv x_1 - x_2 + \sqrt{2}(x_3 + x_4), \\
 y_3 &\equiv x_1 - x_2 + \sqrt{2}(\alpha x_3 + \alpha^2 x_4), \\
 y_4 &\equiv x_1 - x_2 + \sqrt{2}(\alpha^2 x_3 + \alpha x_4).
 \end{aligned}$$

In questo nuovo sistema di coordinate le sostituzioni del G_{24}^v assumono una forma più semplice. Per sostituzioni generatrici del sottogruppo tetraedrico si possono assumere le due:

$$(mn)(pq) = \begin{pmatrix} -y_2, y_1, -y_4, y_3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \end{pmatrix}; \quad (nqp) = \begin{pmatrix} y_1, y_3, y_4, y_2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \end{pmatrix}.$$

Aggiungendovi la

$$(pq) = \begin{pmatrix} -y_1, y_2, y_4, y_3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \end{pmatrix}$$

si ha il G_{24}^v totale. Il 2° tetraedro invariante T' ha per facce:

$$y_2 + y_3 + y_4 = 0; \quad y_1 + y_3 - y_4 = 0; \quad y_1 - y_2 + y_4 = 0; \quad y_1 + y_2 - y_3 = 0.$$

Un punto variabile sulle due rette della coppia invariante è:

$$[\alpha - \lambda\alpha^2, -(\alpha^2 + \lambda\alpha), \lambda, 1]; \quad [\alpha^2 - \lambda\alpha, -(\alpha + \lambda\alpha^2), \lambda, 1].$$

Per trovare i due esagoni armonici basta scegliere una collineazione a periodo 4: ad es. la $(mpnq)$ che proviene dal prodotto

$$(nbpq)(mn)(pq)(nqp)(pq);$$

e calcolarne due punti uniti, uno su ciascuno degli anzidetti esagoni. Si trovano così i due punti $(1, i, i^{\frac{3}{2}}, -i^{\frac{1}{2}})$; $(1, i, -i^{\frac{3}{2}}, i^{\frac{1}{2}})$, i quali per mezzo delle collineazioni del gruppo totale generano gli esagoni richiesti.

13. Ci proponiamo adesso qualche considerazione geometrica sopra le superficie di 4° ordine invarianti rispetto al gruppo totale. Notiamo, di passaggio, che esiste una sola quadrica invariante: la $\sum y_i^2 = 0$ e che non esistono superficie cubiche invarianti. Infatti è il sottogruppo quadrinomio medesimo che non può ammettere superficie invarianti del 3° ordine, perchè ogni retta della serie rigata coniugata a quella cui appartengono mm' , nn' , pp' (n^1 3, 4, 5) dovrebbe incontrare la superficie supposta in un gruppo invariante di punti, o appartenere per intero, e poichè la prima ipotesi non è ammissibile, la superficie supposta si spezzerebbe nella quadrica dianzi nominata e in un piano che sarebbe invariante rispetto all'intero G_{24}^v il che non può avvenire.

14. Quanto alle superficie di 4° ordine un calcolo facile porta a concludere che le invarianti sono tutte e sole quelle del fascio e della rete seguenti:

$$F \equiv ay_1y_2y_3y_4 + b[y_1^3(y_2 + y_3 + y_4) - y_1(y_2^3 + y_3^3 + y_4^3) + y_2y_3^3 + y_3y_4^3 + y_4y_2^3 - (y_2^3y_3 + y_3^3y_4 + y_4^3y_2)] = 0$$

$$R \equiv a \sum y_i^4 + b \sum y_i^2y_k^2 + c[y_1^2(y_2y_3 + y_3y_4 + y_4y_2) - y_2y_3y_4(y_2 + y_3 + y_4) + y_1(y_2^2y_3 + y_3^2y_4 + y_4^2y_2 - y_2y_3^2 - y_3y_4^2 - y_4y_2^2)] = 0.$$

Appartengono al fascio i tetraedri T e T' (si ha T per $b = 0$, si ha T' per $\frac{a}{b} = 3$) e quindi la curva base del fascio è composta dalle 16 rette comuni alle facce di T e T' . Fra tutte le superficie precedenti le riduttibili sono soltanto tre: cioè i tetraedri T e T' e la quadrica doppia (esiste nella rete per $c = 0$, $\frac{b}{a} = 2$). Infatti, se una superficie del 4° ordine invariante è riduttibile e ne fa parte un piano, essa riducesi necessariamente al sistema di 4 piani e quindi a T o T' perchè non esistono sistemi invarianti di uno, due o tre piani. Se poi la superficie in questione si spezzasse in due quadriche distinte, ciascuna sarebbe invariante rispetto a tutti i sottogruppi di 3° ordine, cioè rispetto all'intero G_{24}^v e si avrebbero due quadriche invarianti rispetto a G_{24}^v , il che è impossibile.

15. Nel fascio F esisteranno altre superficie dotate di punti singolari oltre i tetraedri T e T' ? La ricerca è così ovvia che ne enunceremo soltanto i punti principali.

Cominceremo anzitutto da quelle che hanno un numero finito di punti doppi. Essi dunque vanno cercati in punti uniti dei vari sottogruppi. Basterà perciò scrivere le derivate di F e annularle per le coordinate di un punto generico su di un asse di (pq) e si vedrà allora che si ricade necessariamente in T e T' . Poi si eseguirà lo stesso calcolo per un punto unito di un sottogruppo di 3° ordine: se il punto è sull'asse di punti uniti si è ricondotti a T e T' , se invece il punto è sull'asse di piani uniti e quindi appartiene a una delle rette della coppia invariante ($n^\circ 5$) ne segue che sono doppi anche gli altri tre punti consimili su tale retta, cioè è doppia la retta; il che conduce a un caso di impossibilità, perchè, almeno nel fascio, non esistono superficie quartiche invarianti che abbiano per rette doppie quelle della coppia invariante.

Rimane a considerare il caso di un punto doppio sopra un asse di $(mn)(pq)$: scartando ancora le soluzioni T e T' rimangono due sole superficie con 6 punti doppi ciascuna nei vertici dei due esagoni armonici. Esse sono individuate dai valori del rapporto $\frac{a}{b}$ che soddisfano a

$$a + 4b(1 \pm i\sqrt{2}) = 0.$$

Queste due superficie non possono essere altro che le jacobiane dei due sistemi ∞^3 di quadriche che passano per i due esagoni suddetti perchè è evidente che tali superficie sono certamente invarianti e poichè non possono appartenere alla rete ($n^\circ 17$) apparterranno al fascio.

Non resta che a considerare il caso in cui esistano nel fascio superficie con infiniti punti doppi. Ma una tale eventualità è impossibile perchè il luogo dei punti doppi dovrebbe essere invariante e quindi costituito o dalle rette della coppia invariante o da una delle due cubiche invarianti. Ma le rette della coppia invariante si escludono per considerazioni fatte sopra, e si escludono pure le cubiche perchè ognuna di esse si appoggia in due punti all'asse di punti uniti di un qualunque G_3 e l'ipotesi che sia doppio un punto di tale asse riconduce, come già abbiamo osservato, ai tetraedri T e T' . La conclusione è questa:

Le superficie singolari irriducibili del fascio F sono soltanto le due Jacobiane dei due sistemi ∞^3 di quadriche circoscritte ai due esagoni armonici invarianti (superficie di WEDDLE). Esse hanno ciascuna 6 punti doppi nei vertici di uno degli esagoni suddetti.

16. Le sviluppabili osculatrici delle due cubiche gobbe invarianti apparterranno dunque alla rete. Il modo più semplice per trovarle consiste nel cercare quelle fra esse che hanno un punto doppio unipolare sopra un asse di (pq) escludendo però la quadrica doppia. Con facile calcolo si giunge abbastanza rapidamente ai valori seguenti che servono a individuare le sviluppabili domandate:

$$a \equiv -2 \pm i5\sqrt{2}; \quad b \equiv -4 \mp i6\sqrt{2}; \quad c \equiv 16.$$

La quadrica doppia e le due precedenti sviluppabili esauriscono le superficie della rete con infiniti punti doppi. Infatti, se ne esiste un'altra, essa anzitutto non può spezzarsi per ragioni addotte già al $n^\circ 14$: la linea doppia deve essere invariante, ma non può comporsi delle rette della coppia invariante perchè è facile vedere che, come non esistono in F , così nemmeno esistono in R superficie che abbiano doppie quelle

rette all'infuori della quadrica doppia: dunque tale linea è una delle cubiche invarianti. Allora la superficie supposta e la sviluppabile osculatrice di tale cubica individuano, in R , un fascio di superficie che hanno tutte per linea doppia la cubica in parola. La quadrica doppia che esiste in R è esterna a questo fascio perchè essa non contiene alcuna delle due cubiche invarianti (come facilmente risulta dalle formule dei n° 3 e 4). Ne seguirebbe dunque che i vertici degli esagoni armonici sarebbero doppi per tutte le superficie di R , il che si vede facilmente essere impossibile. Dunque infine:

Le superficie di 4° ordine invarianti rispetto a G_{24}^ e dotate di infiniti punti doppi sono soltanto i tetraedri T e T' , le due sviluppabili osculatrici delle 2 cubiche invarianti e la quadrica doppia.*

17. Cerchiamo adesso le superficie della rete R dotate di un numero finito di punti singolari. Le più notevoli fra esse compongono due certi fasci di cui adesso vogliamo stabilire la esistenza. Vi perverremo cercando quali sono le superficie della rete che hanno punti doppi sopra gli assi delle tre involuzioni gobbe del sottogruppo quadrinomio, il che si ottiene esigendo un punto doppio sopra $(1, i, \lambda, i\lambda)$ che al variare di λ rappresenta un asse di $(mn)(pq)$. Si è così condotti alla condizione $\lambda = \pm i^{\frac{3}{2}}$ e alla relazione

$$2a - b \pm ic\sqrt{2} = 0$$

e si perviene a due fasci in R con 6 punti base ciascuno nei vertici dei due esagoni armonici (n° 12). Questi punti base sono doppi per tutte le superficie del fascio. Appartiene a entrambi i fasci la quadrica doppia e vi appartengono, una a ciascuno, le due sviluppabili delle cubiche invarianti (n° 16).

Sia P uno dei vertici di uno dei due esagoni armonici situato ad es. sopra un asse di $(mn)(pq)$ e f il fascio delle superficie quartiche relative aventi nei vertici di quell'esagono 6 punti doppi. Le quadriche polari di P rispetto alle superficie di f formano pure un fascio: ma in questo ci sono due piani doppi cioè il piano tangente in P alla quadrica doppia e il piano osculatore della cubica gobba la cui sviluppabile osculatrice appartiene a f . Questi piani sono distinti (n° 2 e 3) e si tagliano lungo l'asse di $(mn)(pq)$ che passa per P . Dunque il fascio di quadriche in parola si compone di coppie di piani per quell'asse. Oltre quelle nominate non ve ne sono altre costituite da piani doppi, altrimenti la

collineazione $(mqnp)$ che ha in P un punto unito avrebbe infiniti piani uniti per quel punto, il che è impossibile (n° 2). Possiamo dunque dire:

Esistono due fasci di superficie quartiche invarianti con 6 punti-base ciascuno nei vertici dei due esagoni armonici. I 6 punti-base di ogni fascio costituiscono 6 punti doppi biplanari per ciascuna superficie del fascio. Niuna di queste può essere una delle jacobiane di cui è parola al n° 15. Infatti, appartengono al cono osculatore in un punto doppio di una di tali jacobiane le rette che uniscono quel punto agli altri cinque. Se dunque la jacobiana in parola appartenesse a uno dei fasci sopra descritti, tali cinque rette dovrebbero distribuirsi in due piani e in ogni modo avremmo in un piano più di 3 vertici di un esagono armonico, il che è inammissibile, altrimenti la cubica circoscritta, che è una delle due invarianti, si spezzerebbe.

In ciascuno dei fasci precedenti esistono due superficie notevoli dotate ognuna di altri 4 punti doppi nei vertici dei tetraedri T , o T' . Per individuarle basta aggiungere alla condizione

$$2a - b \pm ic\sqrt{2} = 0$$

una qualunque delle altre due $a = 0$, $a + b - c = 0$.

Ciascuna di queste 4 superficie ha dunque 6 punti biplanari e altri 4 punti doppi che sono conici (come facilmente si può constatare); è irriduttibile (n° 16) e non ha altri punti singolari.

Esistono dunque nella rete R quattro superficie quartiche irridutibili dotate ciascuna di 6 punti biplanari e di 4 punti conici: i primi sono i vertici dei due esagoni armonici, i secondi sono i vertici dei due tetraedri invarianti T e T' .

Queste superficie appartengono al cosiddetto tipo asizigetico di ROHN *).

L'asse di $(mn)(pq)$ che passa per P e che è retta doppia per tutte le quadriche polari di P , rispetto al fascio f , incontra le superficie di f in tre punti riuniti in P e in un punto ulteriore vertice del 2° esagono armonico.

Dunque la diminuzione che il punto singolare P porta nella classe della superficie generica di f è 3. Questa superficie generica è dunque

*) ROHN, *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung* (Math. Ann., Bd. 29).

di classe 18 e le 4 superficie particolari di cui precedentemente è parola sono ciascuna di classe dieci *).

18. Un esagono armonico, cioè la cfz. composta dai 6 punti biplanari del n° precedente acquista adesso un maggiore interesse così da non ritenere del tutto inopportune le seguenti osservazioni che valgono a darne una semplice costruzione. Un esagono armonico è costituito su di una cubica gobba da 3 coppie (di punti) armoniche a due a due; cioè da quel che si suol chiamare covariante sestico di una binaria bi-quadratica. Se si prende la corda della cubica individuata da una delle coppie suddette si vede facilmente che essa incontra il tetraedro dei 4 vertici rimanenti in due coppie armoniche fra loro e armoniche alla coppia iniziale. Si hanno cioè due covarianti sestici, l'uno sulla cubica, l'altro sulla retta, dotati di una coppia comune. Viceversa, consideriamo due coppie (di punti) armoniche su di una cubica: esse individuano un tetraedro il quale è segato armonicamente da ∞^3 rette: sopra ognuna di queste viene dunque a stabilirsi un covariante sestico di cui due coppie sono date dalle intersezioni col tetraedro suddetto. Se si esige che la 3^a coppia esista sulla cubica si trova che tale coppia completa anche sulla curva il covariante sestico individuato dalle 2 coppie armoniche che hanno servito come punto di partenza. Per costruire un esagono armonico si possono dunque prendere arbitrariamente 4 punti non in un piano: allora sopra una retta che tagli il tetraedro di quei 4 punti in due coppie armoniche, si scelga la 3^a coppia armonica a queste due. Tale 3^a coppia insieme ai 4 punti suddetti individua l'esagono domandato.

19. Proseguendo nell'esame delle superficie singolari della rete cerchiamo quelle che hanno punti doppi sopra assi di involuzioni gobbe del $G_{2,4}^v$ non appartenenti al sottogruppo quadrinomio. Ad es. scegliamo un asse di (pq) . Un punto generico P su tale asse è $(o\lambda\mu\mu)$. Sostituendo questi valori nelle $\frac{\partial R}{\partial y_i}$ e annullando si hanno le condizioni:

$$\begin{aligned} 2a\lambda^3 + 2b\lambda\mu^2 - c\mu^2(1 + \lambda) &= 0, \\ \mu[4a\mu^2 + 2b(\lambda^2 + \mu^2) - c(3\lambda\mu + \lambda^2)] &= 0. \end{aligned}$$

*) BERZOLARI, *Sulle intersezioni di tre superficie algebriche* (Annali di Matematica, serie II, tomo XXIV).

Sia P in posizione generica sull'asse in questione, vale a dire escludiamo per ora i valori $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Eliminando il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ si trova la seguente equazione di condizione per a , b , c :

$$(1) \begin{cases} c^2(c-2b)^3 + (2b-c)^4(2a+b) + 16a^2(2a+b)^3 - 27ac^4 \\ - 8a(2a+b)^2(2b-c)^2 + 36ac^2(2b-c)(2a+b) = 0, \end{cases}$$

soddisfatta la quale si hanno ∞^1 superficie invarianti con 12 punti doppi ciascuna.

Esiste in R una serie semplicemente infinita di superficie quartiche invarianti, dotate ciascuna di 12 punti doppi, uno su ciascun asse delle 6 involuzioni gobbe esterne al sottogruppo quadrimio. Ogni punto della curva di 5° ordine (1) individua una superficie della serie. Appartengono a questa serie la quadrica doppia e le due sviluppabili, come è ben naturale.

20. Consideriamo qualche superficie particolare nella serie precedente. Per $\mu = 0$ si ha anche $a = 0$ e si è condotti a un fascio di superficie con 4 punti doppi nei vertici di T . Se inoltre si ha $b = 1$, $c = 2$ quei 4 punti doppi sono uniplanari. Altrettanto può dirsi in relazione al tetraedro T' . È facile anche vedere che in ciascun punto uniplanare si hanno 3 tangenti quadripunte distinte per cui la classe è 12 *).

Invece per $\lambda = 0$ (escludendo casi già considerati, o poco interessanti) si trova $c = 0$, $2a + b = 0$: l'equazione della superficie diviene

$$\sum y_i^4 - 2 \sum y_i^2 y_k^2 = 0,$$

che è quella d'una superficie desmica riferita al tetraedro T **).

Il tetraedro T' ne fornisce un'altra.

Finalmente, se si esige che una superficie della serie abbia altri 4 punti doppi nei vertici di T' bisogna aggiungere la condizione $a + b - c = 0$. Escludendo casi già considerati si trova, in conseguenza, $a + b = 0$, $c = 0$ e l'equazione diviene

$$\sum y_i^4 - \sum y_i^2 y_k^2 = 0,$$

*) SEGRE, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (Annali di Matematica, serie II, tomo 25, pag. 32).

**) VERONESE, *Sopra alcune notevoli cf. di punti, rette e piani, ecc.* (Atti R. Acc. Lincei, Memoria II, pag. 339).

che è quella di una superficie di KUMMER 4 volte tetraedroidale riferita al tetraedro T^*). Un'altra la otteniamo scambiando T con T' .

Dunque:

Nella serie ∞^1 precedente di superficie quartiche invarianti sono da segnalarsi due superficie dotate ciascuna di 4 punti uniplanari nei vertici di T o di T' ; due superficie desmiche e infine due superficie di KUMMER 4 volte tetraedroidali.

21. Infine un'altra serie ∞^1 si ottiene esigendo che un punto generico sull'asse di punti uniti di un G_3 sia doppio. Si può prendere per G_3 il gruppo $(nqp)^r$: un punto generico sul suo asse di punti uniti è $(\lambda \ 1 \ 1 \ 1)$.

Si trovano così in modo del tutto analogo a quello del n° precedente le condizioni:

$$2a\lambda^3 + 3\lambda(b+c) = 0,$$

$$(b+c)\lambda^2 + 2(a+b-c) = 0,$$

da cui eliminando λ si trova la condizione

$$(1) \quad 3(b+c)^2 - 4a(a+b-c) = 0.$$

Esiste dunque, sempre nella rete, un altro sistema ∞^1 di superficie invarianti dotate ognuna di 8 punti doppi.

Ogni punto della conica (1) precedente individua una superficie della serie. Queste appartengono al così detto tipo sizigetico di ROHN (1^a memoria citata).

EDGARDO CIANI.

Milano, luglio 1902.

^{*}) ROHN, *Einige specielle Fälle der KUMMER'schen Fläche* (Berichte der k. Sächs. Gesellschaft der Wissench. Mai 1884).