

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 2622

Beitrag zur Methode der kleinsten Quadrate.

Von R. Lehmann-Filhés.

Neben den constanten und zufälligen Beobachtungsfehlern müssen wir in vielen Fällen noch eine dritte Klasse von Fehlern einführen, deren Wesen im Folgenden ausinandergesetzt werden soll. Wir haben nämlich zu unterscheiden zwischen den Fehlern, die beim eigentlichen Beobachten, z. B. beim Einstellen eines Fernrohrs, eines Mikrometerfadens etc., und gewissen Fehlern, welche bei der Ablesung des beobachteten Werthes begangen werden, wobei jedoch von den Theilungsfehlern des Kreises, der Scala etc. abgesehen werden soll. Während die ersteren als dem bekannten Fehlergesetz folgend betrachtet werden können, ist dies mit den letzteren durchaus nicht der Fall. Streng genommen giebt uns die Ablesung nicht den beobachteten Werth selbst, sondern sie schliesst ihn nur in mehr oder weniger enge Grenzen ein. Ein Beispiel wird dies klar machen. Man habe mit einem Spiegelsextanten, dessen Nonius bis auf 10" genau abzulesen gestattet, einen Winkel = 43° 17' 20" gemessen. Dies bedeutet aber nicht, dass jener Winkel genau so beobachtet ist, sondern nur, dass der Beobachtungswerth unter allen auf ganze Zehner von Secunden abgerundeten Winkeln dem Winkel 43° 17' 20" am nächsten liegt, mit andern Worten, dass er zwischen den Grenzen 43° 17' 15" und 43° 17' 25" eingeschlossen ist.

Auf den Einwurf, dass eine so scharfe Fixirung der Grenzen misslich sei, entgegnen wir, dass eine Ueberschreitung derselben wohl vorkommen mag, dass aber diese Ueberschreitung dann compensirt gedacht werden kann durch einen zufälligen, beim Ablesen im entgegengesetzten Sinne begangenen Fehler, der mit zu den zufälligen Beobachtungsfehlern gerechnet werden kann.

Aus dem Gesagten geht also hervor, dass man durch die Ablesung nur eine Grenzbestimmung für den beobachteten Werth erhält; und zwar werden die Grenzen um so enger sein, je kleinere Scalentheile sich noch ablesen lassen.

Es ist klar, dass hierdurch das Fehlergesetz modificirt wird. Der Kürze des Ausdrucks wegen werden wir im Folgenden als Beobachtungswerth p denjenigen Werth bezeichnen, welcher sich aus der Beobachtung bei unbegrenzt scharfer Ablesung ergeben würde. Dagegen nennen wir den an der Scala abgelesenen Werth den Ablesungswerth l . Der wahre Werth X sei eine lineare Function der Unbekannten x, y, z, \dots , und zwar sei $X = ax + by + cz + \dots + f$. Die Coefficienten a, b, c, \dots, f mögen

für die zweite Beobachtung die Werthe a', b', c', \dots, f' , für die dritte die Werthe $a'', b'', c'', \dots, f''$ angenommen haben, sodass die wahren Werthe sind

$$\begin{aligned} X' &= a'x + b'y + c'z + \dots + f' \\ X'' &= a''x + b''y + c''z + \dots + f'' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Die kleinsten an der Scala noch ablesbaren Intervalle seien $= 2\varepsilon$. (In dem obigen Beispiel war also $2\varepsilon = 10''$). Demnach werden die Beobachtungswerthe resp. zwischen den Grenzen $l - \varepsilon$ und $l + \varepsilon$, $l' - \varepsilon$ und $l' + \varepsilon$ etc. liegen. Der Fehler Δ des Beobachtungswerthes ist $p - X$ und liegt zwischen den Grenzen $l - X - \varepsilon$ und $l - X + \varepsilon$. Ist nun e die Basis der natürlichen Logarithmen, h das Maass der Genauigkeit des Beobachtungswerthes, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Beobachtungsfehler zwischen den obigen Grenzen liegt, gleich

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{l-X-\varepsilon}^{l-X+\varepsilon} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta$$

Liegen demnach die Ablesungswerthe l, l', l'', \dots vor, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtungsfehler resp. zwischen den Grenzen $l - X - \varepsilon$ und $l - X + \varepsilon$, $l' - X' - \varepsilon$ und $l' - X' + \varepsilon$ etc. liegen, proportional dem Product

$$\int_{l-X-\varepsilon}^{l-X+\varepsilon} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta \cdot \int_{l'-X'-\varepsilon}^{l'-X'+\varepsilon} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta \cdot \int_{l''-X''-\varepsilon}^{l''-X''+\varepsilon} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta \cdot \dots$$

Wenn wir in den Integralen der Reihe nach setzen:

$$\begin{aligned} \Delta &= l - X + \eta, & \Delta &= l' - X' + \eta', \\ \Delta &= l'' - X'' + \eta'', & &\dots \end{aligned}$$

wobei $\eta, \eta', \eta'', \dots$ zwischen $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ liegen müssen, so wird das obige Product

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2 (l-X+\eta)^2} d\eta \cdot \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2 (l'-X'+\eta')^2} d\eta' \cdot \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2 (l''-X''+\eta'')^2} d\eta'' \cdot \dots$$

wofür wir, da die verschiedenen Integrationen von einander unabhängig sind, schreiben können:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2[(l-X+\eta)^2+(l'-X'+\eta')^2+(l''-X''+\eta'')^2+\dots]} d\eta \cdot d\eta' \cdot d\eta'' \dots$$

Das Integral ist natürlich ein vielfaches, und die Grenzen sind für alle Variablen dieselben. Für die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, y, z, \dots muss das Integral ein Maximum sein, sodass die Differentialquotienten desselben nach x , nach y , nach z etc. = 0 werden. Man kann hier offenbar nach der Leibnitz'schen

Regel unter dem Integralzeichen differenzieren, da sowohl vor wie nach der Differentiation die zu integrierende Function für alle endlichen Werthe der Variablen endlich und stetig, der Integralwerth also stets ein bestimmter bleibt. Setzen wir noch $l-X=t$, $l'-X'=t'$, $l''-X''=t''$ etc., so muss sein:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} [a(t+\eta) + a'(t'+\eta') + \dots] e^{-h^2[(t+\eta)^2+(t'+\eta')^2+\dots]} d\eta \cdot d\eta' \cdot d\eta'' \dots \\ 0 &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} [b(t+\eta) + b'(t'+\eta') + \dots] e^{-h^2[(t+\eta)^2+(t'+\eta')^2+\dots]} d\eta \cdot d\eta' \cdot d\eta'' \dots \\ 0 &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} [c(t+\eta) + c'(t'+\eta') + \dots] e^{-h^2[(t+\eta)^2+(t'+\eta')^2+\dots]} d\eta \cdot d\eta' \cdot d\eta'' \dots \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen sind die Werthe der Unbekannten abzuleiten. Da die zu integrierende Function für alle endlichen Werthe der η endlich, stetig und monodrom bleibt, so lässt sie sich nach einem bekannten Satze der Functionentheorie in eine nach Potenzen der η fortschreitende

Reihe mit unendlich grossen Convergenzkreisen entwickeln. Die Integration der Reihe kann ihre Convergenz nicht zerstören. Wir bezeichnen die zu integrierende Function durch $f(t+\eta, t'+\eta', t''+\eta'', \dots)$. Alsdann ist:

$$\begin{aligned} f(t+\eta, t'+\eta', t''+\eta'', \dots) &= f(t, t', t'', \dots) \\ &+ \frac{1}{1} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \cdot \eta + \frac{\partial f}{\partial t'} \cdot \eta' + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \cdot \eta^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial t'} \cdot \eta \eta' + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \cdot \eta^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t'} \cdot \eta^2 \eta' + \dots \right) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Die Bezeichnung ist bekanntlich eine symbolische; denn wenn wir die Polynome mit Rücksicht auf die eingeklammerten Exponenten entwickeln, so ist allgemein statt $(\partial f)^{(k)}$ zu setzen $\partial^k f$. Die Reihe ist nun zu multipliciren mit $d\eta, d\eta', d\eta'', \dots$ und in Bezug auf alle η zu integrieren, wobei die Reihenfolge der Integrationen gleichgültig ist. Die Integrationsgrenzen sind in allen Fällen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$.

Wenn wir zunächst in Bezug auf η integrieren, so kommen in obiger Reihe diejenigen Glieder garnicht in Betracht, welche η zu einer ungeraden Potenz erhoben enthalten, denn diese geben durch die Integration gerade Potenzen, welche sich nach Einsetzung der Grenzen $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ aufheben.

Dagegen geben alle Glieder, welche η in gerader Potenz enthalten, durch die Integration ungerade Potenzen. Die Integralwerthe für die obere und untere Grenze addiren

sich, d. h., man braucht den Integralwerth für die obere Grenze nur doppelt zu nehmen.

In gleicher Weise fallen alle Glieder weg, welche eine der Variablen $\eta', \eta'', \eta''', \dots$ in ungerader Potenz enthalten. Es sind daher in der obigen Reihe nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen, in denen alle Variablen mit geraden Exponenten $-o$ mit eingerechnet $-$ versehen sind. Hieraus geht nun gleich hervor, dass in der Reihe diejenigen Polynome, welche in der symbolischen Bezeichnung einen ungeraden eingeklammerten Exponenten haben, auszulassen sind; denn in jedem Gliede der Entwicklung eines solchen Polynoms muss mindestens eine der Grössen $\eta, \eta', \eta'', \dots$ mit einem ungeraden Exponenten behaftet sein. Wenn n die Anzahl der Beobachtungen ist, so tritt in allen Gliedern des Integrals der Factor $(2\varepsilon)^n$ auf, welchen wir weglassen wollen. Die ersten Glieder lauten alsdann:

$$\begin{aligned}
o &= f(t, t', t'', \dots) + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} + \dots \right) \\
&+ \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial t'^4} + \dots \right) + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 3} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial t'^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial t'^2 \partial t^2} + \dots \right) \right] \\
&+ \frac{\varepsilon^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left[\frac{1}{7} \left(\frac{\partial^6 f}{\partial t^6} + \frac{\partial^6 f}{\partial t'^6} + \dots \right) + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 3} \left(\frac{\partial^6 f}{\partial t^4 \partial t'^2} + \frac{\partial^6 f}{\partial t'^4 \partial t^2} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} \left(\frac{\partial^6 f}{\partial t^2 \partial t'^2 \partial t''^2} + \frac{\partial^6 f}{\partial t'^2 \partial t^2 \partial t''^2} + \dots \right) \right] \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Wir übersehen leicht das Gesetz der Bildung. Um eine allgemeine Formel zu gewinnen, bezeichnen wir in der Entwicklung eines Polynoms zur Potenz

$$m = i + k + l + \dots$$

den Coefficienten der Glieder, welche die Exponenten i, k, l, \dots enthalten, durch

$$C_{i, k, l, \dots} = \frac{m!}{i! k! l! \dots}$$

wobei

$$\begin{aligned}
m! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m \\
i! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot i \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Alsdann ist unser Integral

$$\begin{aligned}
o &= \sum \frac{\varepsilon^m}{m!} \sum \frac{C_{i, k, l, \dots}}{(i+1)(k+1)(l+1) \dots} \sum \left(\frac{\partial^m f}{\partial t^i \partial t'^k \partial t''^l \dots} \right) \\
&= \sum \varepsilon^m \sum \frac{1}{(i+1)!(k+1)!(l+1)! \dots} \sum \left(\frac{\partial^m f}{\partial t^i \partial t'^k \partial t''^l \dots} \right)
\end{aligned}$$

Das erste Summenzeichen deutet an, dass für m alle möglichen geraden positiven Zahlen zu setzen sind. Das zweite Summenzeichen fordert, dass für i, k, l, \dots alle geraden positiven Zahlen zu setzen sind, deren Summe $= m$ ist. Die dritte Summation endlich wird durch Permutation der Grössen $\partial t, \partial t', \partial t'', \dots$ ausgeführt, wobei i, k, l, \dots ihre Plätze behalten, oder umgekehrt. Noch

muss erwähnt werden, dass die Anzahl der Summanden i, k, l, \dots , in welche m zerlegt wird, nicht die Anzahl n der Beobachtungen, also der t übersteigen darf.

Die nächste Frage, die uns beschäftigt, ist die Entwicklung der partiellen Differentialquotienten der Function $f(t, t', t'', \dots)$. Wir setzen

$$[at + a't' + a''t'' + \dots] e^{-h^2[t^2 + t'^2 + t''^2 + \dots]} = \Sigma(at) \cdot y = f(t, t', t'', \dots)$$

indem wir

$$at + a't' + a''t'' + \dots = \Sigma(at)$$

und

$$e^{-h^2[t^2 + t'^2 + t''^2 + \dots]} = y$$

setzen.

Es lassen sich nun alle partiellen Differentialquotienten von $f(t, t', t'', \dots)$ sehr einfach durch die partiellen Differentialquotienten von y ausdrücken, denn man findet, wenn

$$m = i + k + l + \dots$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^m f}{\partial t^i \partial t'^k \partial t''^l \dots} &= \Sigma(at) \frac{\partial^m y}{\partial t^i \partial t'^k \partial t''^l \dots} + a \cdot i \frac{\partial^{m-1} y}{\partial t^{i-1} \partial t'^k \partial t''^l \dots} \\
&+ a' \cdot k \frac{\partial^{m-1} y}{\partial t^i \partial t'^{k-1} \partial t''^l \dots} \\
&+ a'' \cdot l \frac{\partial^{m-1} y}{\partial t^i \partial t'^k \partial t''^{l-1} \dots} \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Es kommt also darauf an, die partiellen Differentialquotienten von y herzustellen. Man kann sich überzeugen, dass folgende allgemeine Form bestehen muss

$$\frac{\partial^i y}{\partial t^i} = y \left[\alpha_i^{(i)} \cdot t^i + \alpha_i^{(i-2)} \cdot t^{i-2} + \alpha_i^{(i-4)} \cdot t^{i-4} + \dots \right] = y \cdot \varphi_i(t),$$

und dass die in den rationalen ganzen Functionen $\varphi_i(t)$ und $\varphi_{i-1}(t)$ vorkommenden Coefficienten folgender Relation unterworfen sind:

$$\alpha_i^{(i-p)} = g \alpha_{i-1}^{(i-p-1)} + (i-p+1) \alpha_{i-1}^{(i-p+1)},$$

wobei $g = -2/h^2$ ist, und p eine positive gerade Zahl bedeutet, deren Werth jedoch den von i niemals übersteigen kann.

Vermittelst der vorstehenden Gleichung lässt sich nun der Inductionsbevis führen, dass

$$\alpha_i^{(i-p)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (p-1) \cdot \binom{i}{p} \cdot g^{i-p/2},$$

wobei

$$\binom{i}{p} = \frac{i(i-1)(i-2) \cdot \dots \cdot (i-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p}$$

ist. Hiernach ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) = & g^i t^i + 1 \cdot \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} g^{i-1} \cdot t^{i-2} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} g^{i-2} \cdot t^{i-4} \\ & + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{i(i-1) \cdot \dots \cdot (i-5)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} g^{i-3} \cdot t^{i-6} \\ & + \dots \end{aligned}$$

Interessant ist die leicht erweisbare Relation

$$\frac{\partial^k \varphi_i(t)}{\partial t^k} = g^k i(i-1) \cdot \dots \cdot (i-k+1) \cdot \varphi_{i-k}(t)$$

Will man nun $\frac{\partial^{i+k} y}{\partial t^i \partial t^k}$ bilden, so hat man in der

Gleichung $\frac{\partial^i y}{\partial t^i} = y \varphi_i(t)$ auf der rechten Seite nur den Factor y k mal nach t zu differenzieren, wodurch

$$\frac{\partial^m y}{\partial t^i \partial t^k \partial t^l \dots} = y \left[\Sigma(a) \varphi_i(t) \varphi_k(t') \varphi_l(t'') \cdot \dots + a i \cdot \varphi_{i-1}(t) \cdot \varphi_k(t') \cdot \varphi_l(t'') \cdot \dots \right.$$

$$\left. \frac{\partial^{i+k} y}{\partial t^i \partial t^k} = \frac{\partial^k y}{\partial t^k} \cdot \varphi_i(t) = y \varphi_i(t) \varphi_k(t') \right.$$

Allgemein ist demnach

$$\frac{\partial^m y}{\partial t^i \partial t^k \partial t^l \dots} = y \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_k(t') \cdot \varphi_l(t'') \cdot \dots$$

Hierdurch wird

$$\begin{aligned} & + a' k \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_{k-1}(t') \cdot \varphi_l(t'') \cdot \dots \\ & + a'' l \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_k(t') \cdot \varphi_{l-1}(t'') \cdot \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

Man kann die Klammergrösse in kürzerer Form schreiben. Nennt man das Produkt $\varphi_i(t) \cdot \varphi_k(t') \cdot \varphi_l(t'') \cdot \dots$ für den Augenblick u , so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} + \dots$$

Aber es ist

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -a, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -a', \quad \frac{\partial t''}{\partial x} = -a'', \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t} \cdot \varphi_k(t') \cdot \varphi_l(t'') \cdot \dots$$

$$= g \cdot i \cdot \varphi_{i-1}(t) \cdot \varphi_k(t') \cdot \varphi_l(t'') \cdot \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = g \cdot k \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_{k-1}(t') \cdot \varphi_l(t'') \cdot \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial t''} = g \cdot l \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_k(t') \cdot \varphi_{l-1}(t'') \cdot \dots,$$

folglich

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial x} = & a i \cdot \varphi_{i-1}(t) \cdot \varphi_k(t') \cdot \varphi_l(t'') \cdot \dots \\ & + a' k \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_{k-1}(t') \cdot \varphi_l(t'') \cdot \dots \\ & + a'' l \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_k(t') \cdot \varphi_{l-1}(t'') \cdot \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial^m f}{\partial t^i \partial t^k \partial t^l \dots} = y \left[\Sigma(a t) \cdot u - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

Summirt man, indem man entweder i, k, l, \dots oder $\partial t, \partial t', \partial t'', \dots$ permutirt und

$$\Sigma(u) = \Sigma \varphi_i(t) \varphi_k(t') \varphi_l(t'') \dots = \Pi_{i, k, l, \dots}$$

setzt, so wird

$$\sum \frac{\partial^m f}{\partial t^i \partial t^k \partial t^l \dots} = y \left[\Sigma(a t) \Pi_{i, k, l, \dots} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Pi_{i, k, l, \dots}}{\partial x} \right]$$

Hiernach gelten für das wahrscheinlichste System der Unbekannten die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum \varepsilon^m \cdot \sum \frac{1}{(i+1)! (k+1)! (l+1)! \dots} \left(\Sigma(a t) \cdot \Pi_{i, k, l, \dots} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Pi_{i, k, l, \dots}}{\partial x} \right) \\ 0 &= \sum \varepsilon^m \cdot \sum \frac{1}{(i+1)! (k+1)! (l+1)! \dots} \left(\Sigma(b t) \cdot \Pi_{i, k, l, \dots} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Pi_{i, k, l, \dots}}{\partial y} \right) \\ 0 &= \sum \varepsilon^m \cdot \sum \frac{1}{(i+1)! (k+1)! (l+1)! \dots} \left(\Sigma(c t) \cdot \Pi_{i, k, l, \dots} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Pi_{i, k, l, \dots}}{\partial z} \right) \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen, deren man so viele hat, wie Unbekannte vorhanden sind, stellen die Verallgemeinerung der Normalgleichungen vor, welche sich auch aus ihnen ergeben, wenn $\varepsilon = 0$ gesetzt wird.

Es ist von Interesse, wenigstens die ersten Glieder dieser Gleichungen vollständig entwickelt vor Augen zu haben. Wir finden:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum (a t) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \cdot \frac{1}{3} \left[\Sigma(a t) [\varphi_2(t) + \varphi_2(t') + \dots] + 2 [a \varphi_1(t) + a' \varphi_1(t') + \dots] \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4} \left[\frac{\Sigma(a t)}{5} [\varphi_4(t) + \varphi_4(t') + \dots] + \frac{4}{5} [a \varphi_3(t) + a' \varphi_3(t') + \dots] \right] \\ &\quad + \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{1}{3.3} \sum [\Sigma(a t) \varphi_2(t) \varphi_2(t') + 2 a \varphi_1(t) \varphi_2(t') + 2 a' \varphi_2(t) \varphi_1(t')] \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

nun ist

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= g t \\ \varphi_2(t) &= g^2 t^2 + g \\ \varphi_3(t) &= g^3 t^3 + 3 g^2 t \\ \varphi_4(t) &= g^4 t^4 + 6 g^3 t^2 + 3 g^2 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma(a t) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \frac{\Sigma(a t)}{3} [\Sigma(g^2 t^2 + g) + 2 g] \\ &\quad + \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4} \left[\frac{\Sigma(a t)}{5} \cdot \Sigma(g^4 t^4 + 6 g^3 t^2 + 3 g^2) + \frac{4}{5} \Sigma[a (g^3 t^3 + 3 g^2 t)] \right] \\ &\quad + \frac{4.3}{1.2} \frac{\Sigma(a t)}{3.3} \Sigma[(g^2 t^2 + g) (g^2 t^2 + g)] + \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{2}{3.3} \Sigma[a g t (g^2 t^2 + g)] \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Vernachlässigt man also die vierte und höhere Potenzen von ε , so hat man die Unbekannten zu finden aus den Gleichungen

$$\Sigma(a t) = 0, \quad \Sigma(b t) = 0, \quad \Sigma(c t) = 0, \dots$$

oder, weil

$$t = l - [a x + b y + c z + \dots + f],$$

$$\begin{aligned} a a + a' a' + a'' a'' + \dots &= (a a), \\ a b + a' b' + a'' b'' + \dots &= (a b), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und ferner $f - l = q$ setzen, aus

$$\begin{aligned} (a a) x + (a b) y + (a c) z + \dots + (a q) &= 0 \\ (a b) x + (b b) y + (b c) z + \dots + (b q) &= 0 \\ (a c) x + (b c) y + (c c) z + \dots + (c q) &= 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Wir haben also hier die gewöhnlichen Normalgleichungen erhalten, welche nach dem oben Ausgeführten bis auf die dritte Potenz von ε incl. genau sind.

Wir machen noch darauf aufmerksam, dass die entwickelten Gleichungen, die wir uns noch mit h multiplicirt denken können, nur abhängen von den Producten εh und t/h . Hieraus folgt, dass es ganz gleichgültig ist, in welchen Einheiten man die Fehlergrössen ε und t ausdrückt, da ja das Produkt aus dem Maasse der Genauigkeit h und dem wahrscheinlichen Fehler stets gleich der Zahl 0.476936 ist, sodass eine Aenderung in der zu Grunde liegenden Einheit stets eine entsprechende Aenderung in h , also auch in $g = -2h^2$ hervorbringt.

In Folge des Umstandes, dass bei Anwendung der Normalgleichungen nur Grössen von der vierten und höherer Ordnung in Beziehung auf εh vernachlässigt werden, können wir die Anwendung der Normalgleichungen als für die Praxis im Allgemeinen hinreichend ansehen. Die Anwendung der strengen Gleichungen wäre sehr umständlich und erforderte ausserdem successive Approximationen.

Wenn wir aber nach den gewöhnlichen Normal-

gleichungen rechnen, so müssen wir noch auf einen wichtigen Punkt, nämlich auf die Bestimmung der mittleren Fehler, unsere Aufmerksamkeit lenken.

Die zur Berechnung der Unbekannten benutzten Ablesungswerthe l, l', l'', \dots entsprechen nicht genau den der Methode der kleinsten Quadrate zu Grunde liegenden Voraussetzungen, wohl aber ist dies der Fall mit den, allerdings unbekannten, Beobachtungswerthen $p = l + \eta, p' = l' + \eta', \dots$ etc. Wir müssten also eigentlich in den Normalgleichungen statt q setzen $q - \eta$ etc., und erhielten alsdann für die Unbekannten ein Werthsystem x_1, y_1, z_1, \dots nach den Normalgleichungen

$$\begin{aligned}(aa)x_1 + (ab)y_1 + (ac)z_1 + \dots + (aq) - (a\eta) &= 0 \\ (ab)x_1 + (bb)y_1 + (bc)z_1 + \dots + (bq) - (b\eta) &= 0 \\ (ac)x_1 + (bc)y_1 + (cc)z_1 + \dots + (cq) - (c\eta) &= 0 \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Folglich werden die Differenzen $x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z, \dots$ gefunden aus den Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}(aa)(x_1 - x) + (ab)(y_1 - y) + (ac)(z_1 - z) + \dots - (a\eta) &= 0 \\ (ab)(x_1 - x) + (bb)(y_1 - y) + (bc)(z_1 - z) + \dots - (b\eta) &= 0 \\ (ac)(x_1 - x) + (bc)(y_1 - y) + (cc)(z_1 - z) + \dots - (c\eta) &= 0 \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Wir multipliciren diese Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ addiren und bestimmen, dass

$$\begin{aligned}(aa)\alpha + (ab)\beta + (ac)\gamma + \dots &= 1 \\ (ab)\alpha + (bb)\beta + (bc)\gamma + \dots &= 0 \\ (ac)\alpha + (bc)\beta + (cc)\gamma + \dots &= 0 \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Hierdurch wird

$$\begin{aligned}x_1 - x &= (a\eta)\alpha + (b\eta)\beta + (c\eta)\gamma + \dots \\ &= (a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)\eta + (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \dots)\eta' + \dots\end{aligned}$$

Setzen wir die aus den Normalgleichungen gefundenen Werthe von $x, y, z, \dots, x_1, y_1, z_1, \dots$ in die ursprünglichen linearen Gleichungen ein und bezeichnen die übrigbleibenden Fehler resp. durch $\delta, \delta', \delta'', \dots, \lambda, \lambda', \lambda'', \dots$, so erhalten wir folgende Systeme von Gleichungen

$$\begin{aligned}ax + by + cz + \dots + q &= \delta \\ a'x + b'y + c'z + \dots + q' &= \delta' \\ a''x + b''y + c''z + \dots + q'' &= \delta'' \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}ax_1 + by_1 + cz_1 + \dots + q - \eta &= \lambda \\ a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + \dots + q' - \eta' &= \lambda' \\ a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 + \dots + q'' - \eta'' &= \lambda'' \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\lambda &= \delta - \eta + a(x_1 - x) + b(y_1 - y) + \dots \\ \lambda' &= \delta' - \eta' + a'(x_1 - x) + b'(y_1 - y) + \dots \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Bedeutet n die Anzahl der Beobachtungen, i die der Unbekannten, so findet man bekanntlich den mittleren Beobachtungsfehler gleich

$$\sqrt{\frac{(\lambda\lambda)}{n-i}}$$

In diesen Ausdruck haben wir statt der unbekannten λ die δ und η einzuführen. Da wir ferner nicht den mittleren Fehler der Beobachtungsgrösse p , sondern der Ablesungsgrösse l suchen, welche das Mittel aller möglichen Werthe von p ist, und da wir von den speciellen Werthen der η unabhängig sein müssen, so haben wir in bekannter Weise das Quadrat des oben genannten mittleren Fehlers für alle möglichen Werthe der η zu bilden und aus dem Mittel derselben die Quadratwurzel zu ziehen.

Wir benutzen ferner den aus der Methode der Theorie der Normalgleichungen bekannten Satz, dass

$$\begin{aligned}(\delta\delta) &= (\delta q) \quad \text{und analog} \\ (\lambda\lambda) &= (\lambda q) - (\lambda\eta)\end{aligned}$$

Indem wir $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ mit $q = \eta, q' = \eta', q'' = \eta'', \dots$ multipliciren und die Producte addiren, erhalten wir hiernach

$$(\lambda \lambda) = (\delta \delta) - (\delta \eta) - (q \eta) + (\eta \eta) + [(a q) - (a \eta)] (x_1 - x) \\ + [(b q) - (b \eta)] (y_1 - y) \\ + [(c q) - (c \eta)] (z_1 - z) \\ + \dots$$

Für die von $\eta, \eta', \eta'', \dots$ abhängigen Grössen haben wir nun ihre Mittelwerthe einzuführen, die wir erhalten, indem wir die η unabhängig von einander zwischen $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ variiren lassen. Der mittlere Werth von η^2 heisse μ^2 . Man findet

$$\begin{array}{llll} \text{für } (\delta \eta) \text{ den Mittelwerth } & 0 \\ \text{» } (q \eta) & 0 \\ \text{» } (\eta \eta) & n \cdot \mu^2 \\ \text{» } (a q) (x_1 - x) & 0 \\ \text{» } (b q) (y_1 - y) & 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{als Folge des für } x_1 - x \text{ aufgestellten Ausdruckes} \\ \text{und seiner Analoga für } y_1 - y, z_1 - z, \dots \end{array} \right\}$$

etc.

Es erübrigt noch die Bestimmung des mittleren Werthes von $(a \eta) (x_1 - x)$. Es ist

$$(a \eta) (x_1 - x) = [a \eta + a' \eta' + a'' \eta'' \dots] [(a \alpha + b \beta + c \gamma + \dots) \eta + (a' \alpha + b' \beta + c' \gamma + \dots) \eta' + \dots].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird, indem wir die nicht quadratischen Glieder weglassen und $\eta^2 = \eta'^2 = \eta''^2 = \dots = \mu^2$ setzen

$$[(a \alpha) \alpha + (a \beta) \beta + (a \gamma) \gamma + \dots] \cdot \mu^2 = \mu^2.$$

Ebenso wird der mittlere Werth von $(b \eta) (y_1 - y)$, von $(c \eta) (z_1 - z)$ etc. gleich μ^2 . Wir erhalten also mit Rücksicht darauf, dass i Unbekannte vorhanden sind, für $(\lambda \lambda)$ den Mittelwerth

$$(\delta \delta) + (n - i) \mu^2.$$

Hiernach ist der mittlere Fehler der Ablesungsgrössen l, l', l'', \dots

$$m = \sqrt{\frac{(\delta \delta)}{n - i} + \mu^2}$$

Bei der Bestimmung von μ wollen wir von der Hypothese ausgehen, dass der Beobachtungswerth p jeden Werth zwischen $l - \varepsilon$ und $l + \varepsilon$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit haben kann. Bedeutet f eine Constante, so können wir hiernach die Wahrscheinlichkeit, dass η zwischen η und $\eta + d\eta$ liegt, setzen gleich $f \cdot d\eta$. Da aber η zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegen muss, so ist

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f \cdot d\eta = 2f \cdot \varepsilon = 1$$

$$f = \frac{1}{2\varepsilon};$$

mithin

$$\mu^2 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \eta^2 f d\eta = \frac{\varepsilon^2}{3},$$

$$m = \sqrt{\frac{(\delta \delta)}{n - i} + \frac{\varepsilon^2}{3}}$$

Mit Hülfe des so gefundenen m wird die Bestimmung der mittleren Fehler der Unbekannten in bekannter Weise vorgenommen.

Beispiel. Es seien mit einem Universalinstrument, an dem sich noch $10''$ ablesen lassen, 12 Circummeridianhöhen beobachtet, aus denen die Polhöhe abgeleitet wurde. Da die zu den Circummeridianhöhen hinzugefügten Correctionen als absolut sicher bezeichnet werden können, so lassen sich die aus den einzelnen Messungen erhaltenen Polhöhen selbst genau wie Ablesungsgrössen l, l', l'', \dots behandeln. Nach der Methode der kleinsten Quadrate bilden wir aus den Einzelwerthen das arithmetische Mittel, welches $59^\circ 56' 30''.3$ betrage. Durch Subtraction dieses Werthes von den einzelnen l habe man die δ gebildet (in Bogensecunden) und deren Quadratsumme erhalten $(\delta \delta) = 98.10$.

Da nun $\varepsilon = 5''$, $n = 12$, $i = 1$, so ist

$$m = \sqrt{\frac{98.10}{11} + \frac{25}{3}} = 4''.15$$

Wollte man ε garnicht berücksichtigen, so erhielte man

$$m = \sqrt{\frac{98.10}{11}} = 2''.97,$$

also einen bedeutend kleineren Werth.

Aus den bisherigen Argumentationen ergibt sich, dass man durch die übliche Bestimmungsweise der mittleren Fehler stets eine zu grosse scheinbare Genauigkeit der Resultate erhält, und dieser Umstand mag wohl dazu beitragen, dass in umfangreicheren Beobachtungsreihen grössere

Fehler häufiger auftreten, als der mittlere oder wahrscheinliche Fehler erwarten lässt. Indessen wollen wir gegenwärtig diesem Gegenstande seines hypothetischen Charakters wegen nicht näher treten.

Berlin 1884 August 21.

R. Lehmann-Filhés.

Ephemeride des Cometen 1884 Wolf. (Fortsetzung zu Nr. 2619.)

Da die neuesten Beobachtungen vom 18. October die Correction der Ephemeride in Nr. 2619 nicht grösser als $+2^s$ und -0.2 ergeben, werden die Elemente wohl noch längere Zeit die Bewegung nahe darstellen und ich gebe deshalb hier eine ungeänderte Fortsetzung der früheren Ephemeride.

Ephemeride für Berliner Mitternacht.

1884	α app.	δ app.	$\log r$	$\log A$	1884	α app.	δ app.	$\log r$	$\log A$
Nov. 6	22 ^h 21 ^m 50 ^s	+1° 10.1	0.1960	9.9539	Nov. 29	23 ^h 17 ^m 29 ^s	—4° 33.9		
7	24 4	+0 49.7			30	20 2	—4 43.0	0.1962	0.0286
8	26 20	+0 29.7			Dec. 1	22 35	—4 51.6		
9	28 37	+0 10.2			2	25 9	—4 59.8		
10	30 55	—0 8.8	0.1953	9.9650	3	27 43	—5 7.5		
11	33 14	—0 27.3			4	30 18	—5 14.8	0.1973	0.0423
12	35 34	—0 45.3			5	32 53	—5 21.6		
13	37 55	—1 2.8			6	35 28	—5 28.0		
14	40 17	—1 19.8	0.1949	9.9768	7	38 3	—5 34.0		
15	42 40	—1 36.3			8	40 38	—5 39.6	0.1986	0.0561
16	45 4	—1 52.2			9	43 13	—5 44.8		
17	47 30	—2 7.7			10	45 48	—5 49.5		
18	49 56	—2 22.6	0.1948	9.9892	11	48 23	—5 53.9		
19	52 24	—2 37.1			12	50 59	—5 57.9	0.2003	0.0699
20	54 52	—2 51.0			13	53 34	—6 1.5		
21	57 21	—3 4.4			14	56 10	—6 4.7		
22	22 59 50	—3 17.3	0.1950	0.0020	15	23 58 45	—6 7.6		
23	23 2 20	—3 29.7			16	0 1 21	—6 10.1	0.2022	0.0838
24	4 50	—3 41.6			17	3 56	—6 12.2		
25	7 21	—3 53.0			18	6 32	—6 14.0		
26	9 52	—4 4.0	0.1955	0.0151	19	9 7	—6 15.5		
27	12 24	—4 14.4			20	0 11 43	—6 16.6	0.2043	0.0977
28	23 14 56	—4 24.4							

Kiel 1884 Oct. 21.

A. Krueger.

Beobachtungen des Cometen 1884 Wolf am Refractor der Kieler Sternwarte.

1884	M. Z. Kiel	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Vgl.	α app.	$\log p.A$	δ app.	$\log p.A$	*
Oct. 14	7 ^h 34 ^m 40 ^s	+1 ^m 17 ^s 77	+ 0' 59".5	12	21 ^h 38 ^m 6 ^s 13	8.640 _n	+11° 0' 24".3	0.782	1
18	6 49 58	+0 50.78	—12 59.1	8	21 44 16.32	8.982 _n	+ 9 7 0.9	0.798	2

Mittlere Oerter der Vergleichsterne für 1884.0.

- 1 $\alpha = 21^h 36^m 45^s 13 + 3^s 23$ $\delta = +10^\circ 58' 55".4 + 29".4$ $\frac{1}{2}$ (BZ. 30 + Lam₄ 2761)
 2 $\alpha = 21 43 22.33 + 3.21$ $\delta = + 9 19 30.9 + 29.1$ $\frac{1}{3}$ (BZ. 30 + Lam₄ 2812 + Schj. 8864)

Kiel 1884 Oct. 20.

E. Lamp.

Inhalt zu Nr. 2622. *R. Lehmann-Filhés*, Beitrag zur Methode der kleinsten Quadrate. 81. — *A. Krueger*, Ephemeride des Cometen 1884 Wolf. Fortsetzung. 95. — *E. Lamp.*, Beobachtungen des Cometen 1884 Wolf am Refractor der Kieler Sternwarte. 95.

Geschlossen 1884 Oct. 21. Herausgeber: A. Krueger. Druck von C. F. Mohr. Expedition: Sternwarte in Kiel.