

b) I raggi provenienti dallo specchio di un focus può ritenersi abbiano le stesse proprietà dei raggi catodici diretti.

c) Le stesse proprietà posseggono i raggi provenienti dalla faccia posteriore di una lamina sottilissima, la cui faccia anteriore sia battuta dai raggi catodici.

d) Un fascio di raggi catodici appare costituito di vari raggi di natura diversa: quando essi vanno a colpire un corpo di tenue spessore, sembra che essi abbiano potere di attraversarlo, ma nel modo stesso in cui attraverserebbero un filtro, che permettesse il passaggio più o meno facile ad alcuni di essi, piuttostochè ad altri.

Istituto di fisica della R. Università di Pisa,
Aprile 1897.

**SULL'ELISSOIDE DI POLARIZZAZIONE RELATIVO ALLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
NELLA SELENITE E SULLA POLARIZZAZIONE ELITTICA DI QUESTE ONDE.**

Nota di A. RIGHI ¹⁾.

È noto, che nel gesso uno solo dei tre assi dell'elissoide di polarizzazione relativo alle onde luminose, e precisamente l'asse medio, coincide con uno degli assi cristallini, e cioè coll'asse di simmetria, e che gli altri due assi del detto elissoide, mentre giacciono nel piano di simmetria come i due rimanenti assi cristallografici, hanno direzioni variabili colla lunghezza d'onda, e senza relazione alcuna colla forma cristallina.

Risulta poi da esperienze descritte in due mie precedenti Note ²⁾, che, per le onde elettromagnetiche lunghe 10,6 c., uno degli assi dell'elissoide di polarizzazione giacenti nel piano di simmetria, coincide sensibilmente coll'asse cristallografico perpendicolare alla direzione della sfaldatura secondaria non fibrosa. Infatti ho dimostrato, che una delle linee di estinzione relative a quelle onde fa col detto asse cristallografico un angolo, il quale, se non è rigorosamente nullo, non supera certo

1) Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. 6°, 1° sem., serie 5, fasc. 6°, 1897.

2) Rend. della R. Accad. dei Lincei, 17 nov. 1895 e 1° marzo 1896.

un grado o poco più. Perciò la doppia rifrazione delle onde elettromagnetiche nel gesso ha colla forma cristallina di questo un legame, che non esiste nel caso della doppia rifrazione delle onde luminose.

Avendo ripreso le mie ricerche su questo argomento ho potuto ottenere qualche nozione intorno alle grandezze relative dei tre assi dell'elissoide di polarizzazione, e quindi intorno alla forma di questa superficie. Di più, studiando le onde emergenti dal gesso, ho potuto riconoscere la loro polarizzazione ellittica, e costruire lamine, le quali pel loro modo di comportarsi, possono chiamarsi lamine quarto-d'-onda o lamine mezz'-onda.

Nella presente Nota riferisco i risultati di queste nuove ricerche.

Polarizzazione ellittica. — Davanti all'oscillatore disposto verticalmente, e a circa 20 cm. di distanza, è collocato un grande diaframma metallico verticale avente un'apertura circolare, il cui diametro è alquanto più piccolo delle dimensioni della lamina di gesso, che si vuole adoperare; per esempio, questo diametro è di 8 cm. La lamina è posta contro l'apertura, ed è orientata in modo, che le sue linee di estinzione formino colla verticale angoli di 45° . Il risonatore è posto a circa un metro dall'oscillatore, e viene fatto girare lentamente intorno al suo asse di rotazione (che è parallelo alla direzione di propagazione), mentre si osservano le sue scintille.

Adoperando successivamente lamine di più in più grosse, a cominciare da una grossa pochi millimetri, si osservano i fenomeni seguenti:

a) Quando la lamina è sottilissima l'azione da essa prodotta è sensibilmente nulla. Infatti si fanno sparire le scintille del risonatore collocandolo orizzontalmente. Non si riesce dunque in tal caso a constatare la ellitticità della radiazione emergente.

b) Se la lastra è un poco più grossa, il risonatore dà scintille, comunque venga orientato; ma si osserva un massimo, quando è quasi verticale. Dunque la vibrazione emergente è ellittica, coll'asse maggiore dell'elisse quasi verticale. Più esattamente, questo asse fa un angolo un po' maggiore

di 45° con una delle linee di estinzione, e precisamente con quella che sensibilmente coincide colla sfaldatura non fibrosa.

Si consideri che, nell'analogia esperienza ottica, l'asse maggiore dell'elisse è esattamente verticale, e che è inclinato, come nel caso dell'esperienza ora descritta, allorchè si adopera, invece del gesso, una lastra di legno parallela alle fibre, in causa della diversità di assorbimento che questo corpo produce sulle vibrazioni parallele o perpendicolari alle fibre. Perciò è a ritenersi che il gesso produca un sensibile assorbimento sulle vibrazioni parallele alla sfaldatura non fibrosa, e non assorba, oppure assorba assai meno, quelle perpendicolari a questa direzione.

c) Aumentando ancora lo spessore della lamina di selenite, sinchè divenga 2,5 cm. a 2,8 cm., la vibrazione emergente è quasi circolare. Più esattamente, questa vibrazione è ellittica, coll'asse maggiore perpendicolare alla sfaldatura non fibrosa, e pochissimo eccentrica. Ma se s'inclina leggermente l'oscillatore verso la sfaldatura non fibrosa, in modo che risulti inclinato su questa, non più di 45° , ma solo di 36° a 40° , la vibrazione emergente è circolare, come si riconosce dal fatto, che le scintillette del risonatore conservano una costante intensità, comunque se ne varii l'orientazione. Anche qui dunque il risultato dell'esperienza è simile a quello che ottenni altravolta col legno, se non che, nel caso dell'esperienza eseguita con una tavola di abete grossa 13,7 cm., bisognava accostare assai più la direzione dell'oscillatore a quella delle fibre del legno. La lamina di gesso grossa 2,5 cm. a 2,8 cm. è una lamina quarto-d'-onda.

d) Con lamine di grossezza anche maggiore l'eccentricità della vibrazione emergente aumenta di nuovo, sinchè si giunga allo spessore di 5 cm. a 6 cm., col quale la vibrazione è nuovamente rettilinea.

La lamina grossa da 5 cm. a 6 cm. si può chiamare lamina di mezz'-onda, giacchè si comporta come le lamine che in ottica meritano questa denominazione. Però la vibrazione emergente non è orizzontale, come lo è nell'esperienza ottica, ma bensì ha una direzione intermedia fra l'orizzontale e la direzione perpendicolare alla sfaldatura non fibrosa, sempre

in causa del maggior assorbimento prodotto sulle vibrazioni parallele a questa sfaldatura.

Con spessori anche maggiori dati alla lamina, si ottiene di nuovo la polarizzazione ellittica, e così di seguito.

Per eseguire la descritta serie di esperienze basta avere poche lamine di differenti grossezze, sovrapponendone diverse onde formare il voluto spessore. Ma devesi usare ogni cura, affinchè esse riescano concordemente orientate, e a questo scopo è comodo segnare su tutte la direzione della sfaldatura non fibrosa. Si potrà ancora mettere alcune delle lamine in modo, che la direzione segnata su di esse sia perpendicolare a quella delle altre. In tal caso lo spessore di quelle lamine va sottratto dalla somma degli spessori di queste, onde ottenere lo spessore del sistema.

In conclusione, il gesso si comporta come farebbe nelle analoghe esperienze ottiche una laminetta birefrangente (per es. di tormalina), dotata della proprietà di assorbire differentemente le vibrazioni luminose parallele alle sue due linee di estinzione. Per rendere conto dei fenomeni descritti, bisognerà dunque prendere le formole usuali della polarizzazione ellittica, e modificarle, introducendo in esse dei coefficienti di assorbimento.

Sia $\text{sen } \theta$ una vibrazione incidente diretta secondo l'asse delle y , che supporremo verticale, e sia α l'angolo (contato positivamente nel senso del moto degli indici nell'orologio) che una delle linee di estinzione fa col detto asse. La vibrazione che esce dalla lamina avrà per componenti, secondo le linee di estinzione:

$$n \cos \alpha \text{ sen } \theta, \quad m \text{ sen } \alpha \text{ sen } (\theta - \phi),$$

dicendo m ed n i fattori, minori dell'unità, e crescenti insieme allo spessore della lamina, pei quali si deve moltiplicare l'ampiezza delle vibrazioni che entrano nel gesso, e che sono parallele all'una o all'altra linea di estinzione, per avere l'ampiezza loro all'uscita dalla lamina, ed indicando con ϕ la differenza di fase, che la lamina stessa produce.

Le componenti secondo gli assi primitivi, cioè secondo la direzione orizzontale e la verticale, saranno:

$$\begin{aligned} x &= -m \text{ sen } \alpha \cos \alpha \text{ sen } (\theta - \phi) + n \text{ sen } \alpha \cos \alpha \cos \theta, \\ y &= m \text{ sen}^2 \alpha \text{ sen } (\theta - \phi) + n \cos^2 \alpha \text{ sen } \theta. \end{aligned}$$

Se si elimina θ , si ottiene l'equazione della traiettoria ellittica. Chiamando a , b , i suoi semiassi, e β l'angolo che il maggiore dei due, che supporremo essere b , fa colla verticale, si trova, dopo un calcolo non breve:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{m^2 \sin^2 \alpha + n^2 \cos^2 \alpha - r}{m^2 \sin^2 \alpha + n^2 \cos^2 \alpha + r},$$

$$\tan \beta = \frac{mn \sin^2 2\alpha \cos \phi - (m^2 \sin^2 \alpha - n^2 \cos^2 \alpha) \cos 2\alpha - r}{\sin 2\alpha (m^2 \sin^2 \alpha - n^2 \cos^2 \alpha + mn \cos 2\alpha \cos \phi)},$$

in cui per brevità si è rappresentato con r il valore positivo della radice quadrata di

$$(m^2 \sin^2 \alpha - n^2 \cos^2 \alpha)^2 + m^2 n^2 \sin^2 2\alpha \cos^2 \phi.$$

Ecco come con queste formole si rende conto delle esperienze descritte.

Se la lamina è sottilissima, m è poco differente da n e ϕ da 0. Perciò tale lamina non altera sensibilmente le vibrazioni, come risulta appunto dalla esperienza *a*).

Se si suppone $\alpha = 45^\circ$, come nella maggior parte delle esperienze precedenti, il valore di $\tan \beta$ diviene:

$$\tan \beta = \frac{2mn \cos \phi - \sqrt{(m^2 - n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \phi}}{m^2 - n^2},$$

ed ammesso che sia $m > n$, si vede essere β negativo. Dunque l'asse maggiore dell'elisse fa colla linea di estinzione alla quale corrisponde l'assorbimento maggiore, un angolo maggiore di 45° , come appunto risulta dalla esperienza *b*). Se fosse $m = n$ l'asse maggiore dell'elisse sarebbe verticale, se, come ora si suppone, ϕ è minore di $\frac{\pi}{2}$.

Quando, come nell'esperienza *c*), oltre ad $\alpha = 45^\circ$ si abbia $\phi = \frac{\pi}{2}$, si trova $\tan \beta = -1$, e cioè l'asse maggiore è diretto secondo la linea di estinzione cui corrisponde n , cioè perpendicolarmente alla sfaldatura non fibrosa. Se poi anzichè essere $\alpha = 45^\circ$, si pone $m \sin \alpha = n \cos \alpha$, il valore di $\frac{a^2}{b^2}$ diventa l'unità, e cioè la vibrazione emergente è circolare.

Questo è appunto ciò che si osserva nell'esperienza *c*), allorchè si inclina convenientemente l'oscillatore verso la sfaldatura non fibrosa.

Infine, se si ha $\phi = \pi$ ed $\alpha = 45^\circ$, come nell'esperienza *d*) fatta con una lamina grossa da 5 cm. a 6 cm., si trova $a^2 = 0$, $\text{tang } \beta = -\frac{m+n}{m-n}$. Si vede così che la vibrazione emergente è rettilinea, e diretta come lo indica la detta esperienza.

Dunque il gesso si comporta veramente come in ottica la lamina birefrangente dotata di poteri assorbenti diversi per le vibrazioni parallele alle sue linee di estinzione. Si può dire anche che il gesso si comporta come il legno di abete, se la direzione delle fibre di questo coincide colla direzione della sfaldatura non fibrosa di quello. Soltanto, la differenza di assorbimento è assai minore nel caso del gesso che in quello del legno, per cui i fenomeni prodotti colla selenite differiscono meno dei corrispondenti fenomeni ottici ottenuti con una laminetta birefrangente di trasparenza perfetta.

Misura delle differenze di fase. — Se si trascura la differenza degli assorbimenti prodotti dal gesso sulle vibrazioni parallele alle due linee di estinzione, si può misurare la differenza di fase ϕ col metodo seguente, che in fondo è simile a quello adoperato da me altra volta per misure ottiche ¹⁾. Benchè questo metodo non dia nel caso del gesso risultati molto soddisfacenti, lo descriverò qui perchè potrà riuscire utile per corpi che sieno egualmente trasparenti per ogni direzione delle vibrazioni incidenti.

Fra il risonatore e la lamina birefrangente, e quasi in contatto di questa, si colloca un reticolo a fili orizzontali. Non uscirà da questo che la componente verticale della vibrazione ellittica, e si potrà apprezzarne l'intensità, misurando l'angolo ω_1 del quale si deve far girare il risonatore, a partire dalla verticale per spegnerne le scintille. Ciò fatto, si pone il reticolo in modo, che i conduttori lineari, che lo costituiscono, siano verticali, ed allora si misura l'analoga rotazione ω_2 , a partire dalla direzione orizzontale. Il rapporto $\cos^2 \omega_1 : \cos^2 \omega_2$ sarà

1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5, t. 1^o, pag. 189.

uguale al rapporto fra l'intensità della componente orizzontale x e quella della componente verticale y . Ora, questo rapporto è uguale a $\operatorname{tang}^2 \frac{\phi}{2}$.

Infatti, per $m = n$ ad $\alpha = 45^\circ$ si ha:

$$x = m \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \cos \left(\theta - \frac{\phi}{2} \right), \quad y = m \cos \frac{\phi}{2} \operatorname{sen} \left(\theta - \frac{\phi}{2} \right).$$

Dunque in base alle misure fatte di ω_1 ed ω_2 si potrà calcolare ϕ . Con una lamina di gesso grossa 3,5 cm. ottenni $\omega_1 = 66^\circ$, $\omega_2 = 77^\circ$. Se ne deducono per ϕ i valori (espressi in gradi): 122° , 238° , 482° etc., dei quali il primo concorda abbastanza col risultato già avuto, secondo cui una lamina grossa 5 cm. a 6 cm. dà per ϕ il valore 180° .

Il reticolo adoperato merita d'essere descritto. Presi una lamina d'ebanite, su una delle faccie della quale era incollato un disco di stagnuola di 21,5 cm. di diametro, e mediante la riga ed il temperino tagliai la foglia metallica secondo tante rette parallele fra loro ed equidistanti, coll'intervallo di circa un millimetro e un terzo fra l'una e l'altra. Dopo di ciò levai le striscie alterne, in modo che rimasero sull'ebanite tante striscie parallele di metallo, separate da intervalli eguali alla loro larghezza.

Ché un tale reticolo soddisfi bene al suo ufficio, risulta dal fatto che, se viene posto fra oscillatore e risonatore colle sue striscie parallele in pari tempo ai due apparecchi, non si osserva nel risonatore nessuna azione.

Si ottengono migliori risultati per la misura di ϕ nel caso del gesso, se si tien conto dei due coefficienti m ed n . Allora, oltre che misurare ω_1 ed ω_2 , occorre misurare ancora l'angolo β ; ma si ha poi il vantaggio di determinare, oltre che ϕ , anche il rapporto $\frac{m}{n}$.

Infatti, se nelle formole generali si pone $\alpha = 45^\circ$, si può ricavarne:

$$\operatorname{tang} 2\beta = \frac{n^2 - m^2}{2mn \cos \phi},$$

mentre pel rapporto ρ fra le intensità delle due componenti x ed y si trova

$$\rho = \frac{m^2 + n^2 - 2mn \cos \phi}{m^2 + n^2 + 2mn \cos \phi}.$$

Ponendo per brevità $p = (m^2 - n^2) : 2mn \cos \phi$, si ricava da queste due formole:

$$\cos^2 \phi = \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2 - p(1 - \rho)^2}, \quad \frac{m}{n^2} = \frac{1 + \rho + p(1 - \rho)}{1 + \rho - p(1 - \rho)}.$$

Dunque, una volta misurati gli angoli ω_1 , ω_2 , e β , si può calcolare, non solo $\cos^2 \phi$, ma anche $m:n$. Ho già detto come si eseguisca la misura dei primi due angoli; quanto a quella di β , il meglio è determinare l'orientazione del risonatore, che rende minime le scintille, naturalmente senza far uso in questo caso del reticolo. Questa orientazione è perpendicolare a quella cercata,

L'elissoide di polarizzazione. — Indichiamo con n_1 , n_2 , n_3 i tre indici di rifrazione principali del gesso per le onde di 10,6 cm. di lunghezza, ed ammettiamo che n_1 si riferisca all'asse dell'elissoide di polarizzazione, parallelo alla sfaldatura secondaria non fibrosa, n_2 all'asse perpendicolare alla sfaldatura principale, ed n_3 all'asse perpendicolare alla sfaldatura non fibrosa.

Se a è lo spessore di una lamina di gesso parallela alla sfaldatura principale, la differenza di fase ϕ è uguale a $\frac{2\pi a}{\lambda} (n_1 - n_3)$. E siccome quando la grossezza a è di 5 cm. a 6 cm. si ha $\phi = \pi$, risulta per la differenza $n_1 - n_3$ un valore compreso fra 0,88 e 1,06.

Ciò dimostra, che la doppia rifrazione nel gesso delle onde lunghe 10,6 cm. è molto più energica di quella delle onde luminose. Infatti in quest'ultimo caso gli indici principali non differiscono che nella seconda cifra decimale. Un risultato così impreveduto mi ha indotto a studiare più intimamente la doppia rifrazione delle onde elettromagnetiche nel gesso, ed in particolare a ricercare, se differenze egualmente rilevanti esistono anche fra i due indici n_1 ed n_3 ed il terzo indice n_2 .

Occorreva perciò sperimentare con lamine, non più perpendicolari all'asse dell'elissoide cui corrisponde n_2 , ma con lamine perpendicolari ad uno degli altri due assi.

Indichiamo con L_1 , L_2 , L_3 le lamine di gesso, quando le loro faccie sono ordinatamente perpendicolari ai tre assi dell'elissoide nominati più sopra. Le lastre finora adoperate furono dunque lamine L_2 . Avendo preparato lamine L_1 ed L_3 , ho con esse ottenuti i risultati seguenti.

Le lastre L_3 , cioè quelle perpendicolari alla sfaldatura principale e parallele alla sfaldatura secondaria non fibrosa, mi hanno mostrato fenomeni quasi identici a quelli delle lastre L_2 ; ed avendo cercato di determinare quale grossezza doveva avere la lastra L_3 per comportarsi come lastra quarto-d'onda o come lastra mezz'-onda, ho trovato valori appena superiori a quelli analoghi relativi alle lastre L_2 . Ne consegue, che la differenza $n_1 - n_2$ è quasi eguale alla $n_1 - n_3$, e quindi che l'indice n_2 , relativo all'asse di simmetria, diversifica pochissimo da n_3 , cioè dall'indice relativo all'asse dell'elissoide perpendicolare alla sfaldatura non fibrosa. Anzi, può rimanere il dubbio che i due indici n_2 ed n_3 sieno fra loro eguali.

Però questo dubbio sembra eliminato dalla esperienza seguente. Ad una lastra L_2 ne ho sovrapposto una L_3 , ponendo la direzione della sfaldatura non fibrosa della prima ad angolo retto con quella della seconda, poi ho collocato il sistema delle due lastre contro la finestra del solito diaframma metallico, in modo, che quelle due direzioni fossero a 45° colla direzione delle vibrazioni incidenti. È chiaro che, se la doppia rifrazione prodotta dalle due lastre è identica, e se uguale è il loro spessore, non si deve ottenere dal sistema nessun effetto di doppia rifrazione. Ma, eseguendo l'esperienza, un effetto si è prodotto, giacchè sono apparse scintille nel risonatore diretto perpendicolarmente all'oscillatore. Per rendere minime o nulle tali scintille occorre, che la lastra L_2 sia un poco più sottile della L_3 ; se per esempio, questa è grossa 3 cm., quella deve essere grossa circa 2,9 cm.

Sembra dunque veramente che n_2 ed n_3 sieno differenti fra loro, e perciò che l'elissoide di polarizzazione sia a tre assi, come nel caso delle onde luminose. Ma in ogni modo la forma di questa superficie è assai differente nei due casi, giacchè, nel caso delle onde lunghe 10,6 cm., essa diversifica po-

chissimo da un ellissoide, che sia di rivoluzione intorno alla direzione della sfaldatura non fibrosa.

Poichè, come si è visto, il valore di $n_1 - n_3$ è compreso fra 0,88 e 1,06, dalla precedente esperienza risulterebbe per la differenza $n_2 - n_3$ un valore compreso fra 0,03 e 0,04. Perciò, affinchè una lastra L_1 , e cioè una lastra perpendicolare in pari tempo al piano di sfaldatura principale ed alla direzione della sfaldatura non fibrosa, si comportasse come lamina mezz'onda, essa dovrebbe avere uno spessore compreso fra 150 cm. e 180 cm.

Gli effetti che produce una lamina L_1 sono perfettamente d'accordo coi precedenti risultati.

Infatti, una tal lastra non produce in modo sicuro la doppia rifrazione. Se, per esempio, essa è grossa 3 cm., ed è posta nel solito modo fra oscillatore e risonatore incrociati, non appariscono in quest'ultimo che scintille debolissime, quali potrebbero essere prodotte nelle stesse circostanze da una lastra L_2 od L_3 grossa appena un millimetro o due. Le lamine L_1 si comportano dunque quasi nello stesso modo d'una tavola di abete, le cui faccie sieno perpendicolari alle fibre.

Dall'essere assai piccola la differenza fra n_2 ed n_3 risulta, che i due *assi ottici* relativi alle onde elettromagnetiche, ossia le due direzioni che si comportano come quelle, alle quali si dà in ottica la stessa denominazione, devono essere inclinati di un angolo piccolissimo sulla direzione della sfaldatura non fibrosa.

Se poi ulteriori esperienze (che per ora non posso eseguire, non essendo riuscito a procurarmi nuovi blocchi di selenite adatti allo scopo) mostrassero, che i due indici principali n_2 ed n_3 sono rigorosamente eguali fra loro, si dovrebbe concludere che i due assi ottici coincidono fra loro e colla sfaldatura non fibrosa, e che l'ellissoide è di rivoluzione. In questa ipotesi il gesso si comporterebbe, di fronte alle onde elettromagnetiche, come cristallo ad un solo asse ottico, ed i fenomeni da esso prodotti diverrebbero qualitativamente identici a quelli prodotti dal legno, la direzione delle fibre di questo corrispondendo alla direzione della sfaldatura non fibrosa di quello.