Theorie der Transformationsgruppen I.

Von

SOPHUS LIE in Christiania.

In einer Reihe Abhandlungen, unter denen die nachstehende die erste ist, beabsichtige ich eine neue Theorie, die ich die *Theorie der Transformationsgruppen* nenne, zu entwickeln. Die betreffenden Untersuchungen, mit denen ich mich seit 1873 eifrig beschäftige*), haben, wie der Leser bemerken wird, viele Berührungspunkte mit mehreren mathematischen Disciplinen, insbesondere mit der Substitutionstheorie; mit der Geometrie und der modernen Mannigfaltigkeitslehre; und endlich auch mit der Theorie der Differentialgleichungen. Am Schlusse dieser Arbeit führe ich alle früheren mir bekannten Untersuchungen auf, die mit meiner Theorie der Transformationsgruppen mehr oder weniger verwandt sind.

Diese erste Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die Bestimmung aller Transformationsgruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit liefert, während der zweite alle Gruppen einer *zweifach* ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmt. Spätere Abhandlungen werden einerseits die allgemeine Theorie einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit behandeln, andererseits im Anschlusse an die dargestellten Theorien neue Gesichtspunkte für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen entwickeln.

Abschnitt I.

Bestimmung aller Transformationsgruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

In diesem ersten Abschnitte erledige ich ein allgemeines Problem, das ich folgendermassen formulire.

*) Göttinger Nachrichten Nr. 22. 1874; Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. I., III., IV., Christiania 1876, 1878, 1879. In der zuerst citirten Note findet sich bereits ein Resumé aller Resultate dieser Abhandlung.

Problem. *Man soll die allgemeinste Function f von x und r Parametern $a_1, a_2 \cdots a_r$ bestimmen, die eine Bedingungsgleichung von der Form*

$$f(f(x\, a_1 \cdots a_r)\, b_1 \cdots b_r) = f(x\, c_1 \cdots c_r) \tag{1}$$

erfüllt, wobei vorausgesetzt wird, dass die c_i nur von den a und b abhängen.

Dieses Problem kann vielleicht übersichtlicher formulirt werden, wenn man den Begriff Transformationsgruppe, den wir sogleich definiren, anwendet.

Definition. *Eine Schaar von Transformationen:*

$$x' = f(x\, a_1 \cdots a_r)$$

wo x' die ursprüngliche, x die neue Variable, und die a_i Parameter bezeichnen, bilden eine Transformationsgruppe, wenn die Succession zweier Transformationen der Schaar mit einer einzigen Transformation derselben Schaar äquivalent ist, wenn also aus den Gleichungen

$$x' = f(x\, a_1 \cdots a_r)$$
$$x'' = f(x'\, b_1 \cdots b_r)$$

hervorgeht

$$x'' = f(x\, c_1 \cdots c_r),$$

wo die c_i blosse Functionen der a und b sind.

Wir denken uns wie gewöhnlich die unbekannte Function $f(x\, a_1 \cdots a_r)$ als eine nach ganzen Potenzen der Grössen x und a_i fortschreitende Reihenentwicklung, die innerhalb gewisser Bereiche dieser Grössen convergirt. In Folge dessen ist f eine eindeutige und differentiirbare Function ihrer Argumente. Wegen der Form der Bedingungsgleichung (1) tritt eo ipso die Forderung hinzu, dass die Grössen $x, a_1 \cdots a_r$ derart gewählt werden können, dass der Werth der Grösse $f(x\, a_1 \cdots a_r)$ nicht ausserhalb des Bereiches der Grösse x fällt.

Befriedigt die Grösse $f(x\, a_1 \cdots a_r)$ eine oder mehrere Relationen von der Form

$$\sum_k \Phi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0,$$

so kann die Zahl der Parameter erniedrigt werden. Sind nämlich $\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}$ unabhängige Functionen der a_i, die die letzte partielle Differentialgleichung befriedigen, so kann f die Form

$$f(x\, a_1 \cdots a_r) = \varphi(x\, \alpha_1 \cdots \alpha_{r-1})$$

erhalten.

Definition. *Eine Gruppe mit r Parametern*

$$x' = f(x\, a_1 \cdots a_r)$$

heisst r-gliedrig, wenn die Zahl der Parameter nicht erniedrigt werden kann.

Mit Anwendung der eingeführten Terminologie kann unser Problem auch folgendermassen formulirt werden.

Man soll alle r-gliedrigen Transformationsgruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmen.

Ist eine beliebige r-gliedrige Gruppe $x' = f(x a_1 \cdots a_r)$ vorgelegt, so findet man leicht neue r-gliedrige Gruppen. Sind in der That φ und Φ zwei beliebige inverse Functionen, so bestimmt die Gleichung

$$x' = \Phi\,[f(\varphi(x)\, a_1 \cdots a_r)] = F(x\, a_1 \cdots a_r),$$

wie man unmittelbar verificirt, wiederum eine r-gliedrige Gruppe. Dabei ist zu bemerken, dass die vorgelegte Gruppe die Form

$$x' = \varphi\,[F(\Phi(x)\, a_1 \cdots a_r)]$$

erhalten kann, so dass die Beziehung zwischen den beiden Gruppen eine gegenseitige ist.

Definition. *Zwei Gruppen*

$$x' = f(x\, a_1 \cdots a_r)$$
$$x' = F(x\, a_1 \cdots a_r)$$

heissen ***ähnlich****, wenn die zweite Gruppe die Form*

$$x' = \Phi\,[f(\varphi(x)\, a_1 \cdots a_r)],$$

wo φ und Φ inverse Functionen sind, annehmen kann, und also auch die erste Gruppe die Form

$$x' = \varphi\,[F(\Phi(x)\, a_1 \cdots a_r)]$$

erhalten kann.

Aus dieser Definition folgt sogleich, dass zwei Gruppen, die mit derselben dritten Gruppe ähnlich sind, selbst ähnlich sind. Aehnliche Gruppen kann man, wenn man will, als identisch auffassen.

§ 1.

Die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe.

1. Das einfachste Beispiel einer Gruppe ist die sogenannte lineare Gruppe, die durch die Gleichung

$$(1) \qquad x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3}$$

definirt wird. Dass diese Gleichung eine Gruppe bestimmt, verificirt man, indem man die zweite Gleichung

$$x'' = \frac{x' + \alpha_1}{\alpha_2 x' + \alpha_3}$$

hinzufügt, und darnach x'' als Function von x:

$$x'' = \frac{x + \frac{a_1 + \alpha_1 a_3}{1 + \alpha_1 a_2}}{\frac{\alpha_2 + \alpha_3 a_2}{1 + \alpha_1 a_2} x + \frac{\alpha_2 a_1 + \alpha_3 a_3}{1 + \alpha_1 a_2}}$$

berechnet; hierdurch ergiebt sich nämlich, dass auch x'' eine lineargebrochene Function von x ist.

Setzt man

$$\alpha_1 = -\frac{a_1}{a_3}, \quad \alpha_2 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{a_3},$$

so kommt $x'' = x$. Hiermit erkennen wir, dass die successive Ausführung der beiden linearen Transformationen

$$(a_1 \quad a_1 \quad a_3) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{a_1}{a_3}, \ -\frac{a_2}{a_3}, \ \frac{1}{a_3}\right)$$

mit der identischen Transformation $x'' = x$ äquivalent ist. Zwei solche Transformationen, die sich gegenseitig aufheben, nennen wir *inverse* Transformationen.

Setzt man in (1)

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1,$$

so erhält man die identische Transformation $x' = x$, die somit der linearen Gruppe angehört. Setzt man andererseits

$$a_1 = \varepsilon_1, \quad a_2 = \varepsilon_2, \quad a_3 = 1 + \varepsilon_3$$

und betrachtet dabei ε_1, ε_2, ε_3 also unabhängige infinitesimale Grössen, so erhält man durch Wegwerfung von inf. Grössen zweiter Ordnung die *infinitesimale Transformation*

$$x' = x + \varepsilon_1 - \varepsilon_3 x - \varepsilon_2 x^2.$$

Insbesondere erhält man durch passende Wahl der Grössen ε_i die drei infinitesimalen Transformationen

$$\begin{aligned} x' &= x + \lambda_1, & \text{oder } \delta x &= \lambda_1, \\ x' &= x + \lambda_2 x, & \delta x &= \lambda_2 x, \\ x' &= x + \lambda_3 x^2, & \delta x &= \lambda_3 x^2, \end{aligned}$$

aus denen sich alle weiteren infinitesimalen Transformationen der Gruppe linear zusammensetzen lassen.

Die lineare Gruppe (1) *enthält somit eine identische Transformation und drei unabhängige infinitesimale Transformationen. Die endlichen Transformationen der Gruppe ordnen sich paarweise als inverse Transformationen zusammen.*

2. In der Substitutionstheorie beweist man bekanntlich, dass die Substitutionen einer Gruppe sich paarweise als inverse Subsitutionen zusammenordnen lassen. Da nun der Unterschied zwischen einer Substitutionsgruppe und einer Transformationsgruppe nur darin besteht, dass die erste eine endliche Zahl, die letzte eine unendliche Zahl von

Operationen enthält, so liegt es nahe, zu vermuthen, dass auch die Transformationen einer Transformationsgruppe sich paarweise als inverse Transformationen zusammenordnen lassen. In früheren Arbeiten kam ich zu dem Schlusse, dass dies wirklich der Fall sei. Da indess bei meinen betreffenden Untersuchungen *implicite* gewisse Voraussetzungen über die Beschaffenheit der auftretenden Functionen gemacht wurden, so halte ich es für nothwendig, meiner Definition des Begriffs Transformationsgruppe *ausdrücklich die Forderung hinzuzufügen, dass die Transformationen der Gruppe sich paarweise als inverse Transformationen zusammenordnen lassen.* Ich vermuthe allerdings, dass diese Forderung eine nothwendige Consequenz meiner ursprünglichen Definition des Begriffs Transformationsgruppe ist. Es ist mir aber, wie gesagt, unmöglich gewesen, dies allgemein zu beweisen.

Wir beschränken uns also auf Gruppen

$$x' = f(x a_1 \cdots a_r),$$

die die Eigenschaft besitzen, dass jedem Werthsystem $a_1 \cdots a_r$ ein solches Werthsystem $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ entspricht, dass die Gleichung

$$f(f(x a_1 \cdots a_r)\, \alpha_1 \cdots \alpha_r) = x$$

identisch besteht.

Hieraus folgt nun zunächst, dass diejenigen Gruppen, die wir betrachten, immer eine identische Transformation enthalten. Wir werden zeigen, dass sie zugleich infinitesimale Transformationen enthalten. Seien in der That $a_1 \cdots a_r$ und $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ die Parameter zweier inversen Transformationen einer Gruppe, und seien $\omega_1 \cdots \omega_r$ unabhängige infinitesimale Grössen. Alsdann kann der Ausdruck

$$f\big(f(x a_1 \cdots a_r)\, \alpha_1 + \omega_1 \cdots \alpha_r + \omega_r\big),$$

indem inf. Grössen zweiter Ordnung weggeworfen werden, die Form

$$f\big(f(x a_1 \cdots a_r)\, \alpha_1 \cdots \alpha_r\big) + \sum_k \omega_k \left[\frac{\partial f(f(x a_1 \cdots a_r)\, \beta_1 \cdots \beta_r)}{\partial \beta_k}\right]_{(\beta_k = \alpha_k)}$$

erhalten. Und also enthält unsere Gruppe die Transformation

$$x' = x + \sum_k \omega_k \left[\frac{\partial f(f(x a_1 \cdots a_r)\, \beta_1 \cdots \beta_r)}{\partial \beta_k}\right]_{(\beta_k = \alpha_k)},$$

die eo ipso eine infinitesimale Transformation ist. Giebt man den unabhängigen inf. Grössen ω_i successiv verschiedene Werthe, so erhält man ∞^{r-1} verschiedene infinitesimale Transformationen, die aus den r infinitesimalen Transformationen

$$\delta x = \omega_k \left[\frac{\partial f(f(x a_1 \cdots a_r)\, \beta_1 \cdots \beta_r)}{\partial \beta_k}\right]_{(\beta_k = \alpha_k)}$$

$$(k = 1;\ 2,\ \cdots r)$$

linear zusammengesetzt sind. Wir werden zeigen, dass diese r inf. Transformationen in dem Sinne unabhängig sind, dass keine lineare Relation der Form

$$\sum_k \varphi_k(a_1 \cdots a_r)\left[\frac{\partial f(f(xa_1 \cdots a_r)\beta_1 \cdots \beta_r)}{\partial \beta_k}\right]_{(\beta_k=a_k)} = 0$$

stattfindet. Fasst man nämlich die Grössen $f, \alpha_1 \cdots \alpha_r$ als unabhängige Variabeln auf, so nähme eine solche Relation die Form an:

$$\sum_k \frac{\partial f(f\alpha_1 \cdots \alpha_r)}{\partial \alpha_k} \psi_k(\alpha_1 \cdots \alpha_r) = 0,$$

woraus folgen würde, dass die Zahl der Parameter unserer Gruppe erniedrigt werden könnte.

Hiermit erhalten wir den folgenden wichtigen Satz

Satz 1. *Können die Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe paarweise als inverse Transformationen zusammengeordnet werden, so enthält die Gruppe eine identische Transformation und r unabhängige infinitesimale Transformationen.*

Da die Ausdrücke unserer inf. Transformationen nicht allein x sondern auch $a_1 \cdots a_r$ enthalten, so scheint es zunächst denkbar, dass eine r-gliedrige Gruppe mehr als r unabhängige inf. Transformationen enthielte. Dann aber hätte die Gruppe jedenfalls ∞^r verschiedene infinitesimale Transformationen, und das ist unmöglich, da die Gruppe nur ∞^r Transformationen, die im Allgemeinen endlich sein sollen, enthalten soll.

Im Allgemeinen ist es vortheilhaft den r inf. Transformationen eine solche Form

$$\delta x = X(x)\delta t$$

zu geben, dass $X(x)$ nicht von $a_1 \cdots a_r$ sondern nur von x abhängt.

§ 2.

Beziehungen zwischen den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe.

Seien

$$\delta x = X_1(x)\delta t, \qquad \delta x = X_2(x)\delta t \cdots\cdots \qquad \delta x = X_r(x)\delta t$$

r unabhängige inf. Transformationen einer Gruppe

$$x' = f(xa_1 \cdots\cdot a_r);$$

wir werden zeigen, dass die r Grössen $X_1 \cdots X_r$, die gewisse Functionen von x sind, paarweise durch einfache Differentialrelationen verbunden sind.

3. Wir führen zuerst die endliche Transformation

$$x' = f(xa_1 \cdots a_r),$$

sodann eine infinitesimale Transformation

$$\delta x' = (\lambda_1 X_1(x') + \cdots + \lambda_r X_r(x'))\,\delta t$$

aus. Diese Aufeinanderfolge

$$x'' = f(x a_1 \cdots a_r) + \delta t \sum_k \lambda_k X_k(x')$$

soll nach der Definition einer Transformationsgruppe einer Transformation der Form

$$x'' = f(x\, a_1 + d a_1 \cdots a_r + d a_r)$$

äquivalent sein. Dies giebt die Gleichung

$$f(x\, a_1 + d a_1 \cdots) = f(x a_1 \cdots a_r) + \delta t \sum_k \lambda_k X_k(f)$$

oder durch Ausführung und Wegwerfung von infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial a_k} \, d a_k = \delta t \sum_k \lambda_k X_k(f)\,.$$

Eine solche Gleichung besteht, welche Werthe auch die Parameter λ_k haben mögen, vorausgesetzt dass die Differentiale $d a_k$ passende entsprechende Werthe erhalten. Und da die Verhältnisse $\frac{d a_k}{\delta t}$ nur von den Grössen λ_i und a_i, dagegen nicht von x abhängen, so bestehen insbesondere r Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned}
X_1(f) &= A_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + \cdots + A_r \frac{\partial f}{\partial a_r},\\
X_2(f) &= B_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + \cdots + B_r \frac{\partial f}{\partial a_r},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_r(f) &= L_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + L_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + \cdots + L_r \frac{\partial f}{\partial a_r},
\end{aligned}$$

wo die Grössen $A_i, B_i, \cdots L_i$ nur von $a_1, a_2 \cdots a_r$ abhängen. Hier darf die Determinante

$$(A_1 B_2 \cdots L_r)$$

nicht verschwinden; denn dann bestände eine Relation der Form

$$\varphi_1(a_1 \cdots a_r)\, X_1(f) + \cdots + \varphi_r(a_1 \cdots a_r)\, X_r(f) = 0,$$

und das ist unmöglich, indem die r inf. Transformationen unabhängig sind. Also erhält man durch Auflösung r Gleichungen der Form

$$(2) \qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial a_1} = M_1 X_1(f) + \cdots + M_r X_r(f),\\
\dfrac{\partial f}{\partial a_2} = N_1 X_1(f) + \cdots + N_r X_r(f),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{\partial f}{\partial a_r} = R_1 X_1(f) + \cdots + R_r X_r(f),
\end{cases}$$

wo die Grössen $M_i\,N_i \cdots R_i$ nur von $a_1\,a_2 \cdots a_r$ abhängen. Die rechten Seiten dieser Gleichungen müssen paarweise den bekannten Integrabilitätsbedingungen genügen. In dieser Weise erhalten wir $\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}$ Relationen, unter denen wir die erste

$$\frac{\partial}{\partial a_2}\sum_k M_k X_k(f) = \frac{\partial}{\partial a_1}\sum_i N_i X_i(f)$$

entwickeln werden. Dabei erinnern wir, dass die X_k nur von dem einzigen Argumente f abhängen. Also kommt

$$0 = \left(\sum_k M_k \frac{dX_k}{df}\right)\left(\sum_i N_i X_i\right) - \left(\sum_i N_i \frac{dX_i}{df}\right)\left(\sum_k M_k X_k\right) + \sum_k \left(\frac{\partial M_k}{\partial a_2} - \frac{\partial N_k}{\partial a_1}\right) X_k,$$

woraus

$$\sum_k\sum_i M_k N_i \left(X_i \frac{dX_k}{df} - X_k \frac{dX_i}{df}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial N_k}{\partial a_1} - \frac{\partial M_k}{\partial a_2}\right) X_k,$$

wo die Indices k und i alle Werthe $1, 2 \cdots r$ durchlaufen sollen. In der Doppelsumme links kommt das Glied

$$X_i \frac{dX_k}{df} - X_k \frac{dX_i}{df}$$

zweimal vor, einmal mit dem Coefficient $M_k N_i$, ein ander mal mit dem Coefficient $-M_i N_k$. Daher kann die gefundene Bedingungsgleichung auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\sum_k\sum_i (M_k N_i - M_i N_k)\left(X_i \frac{dX_k}{df} - X_k \frac{dX_i}{df}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial N_k}{\partial a_1} - \frac{\partial M_k}{\partial a_2}\right) X_k.$$

In Allem erhält man $\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}$ solche Gleichungen, deren linke Seiten hinsichtlich der $\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}$ Grössen $X_i \frac{dX_k}{df} - X_k \frac{\partial X_i}{\partial f}$ linear sind. Wir werden zeigen, dass diese Gleichungen sich hinsichtlich der besprochenen $\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}$ Grössen auflösen lassen. Dies folgt aus dem bekannten Satze:

Ist die Determinante $(a_1{}^1\,a_2{}^2 \cdots a_r{}^r) = \Delta$ von Null verschieden, so ist dasselbe der Fall mit derjenigen Determinante, deren Elemente die $\left[\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}\right]^2$ Grössen $(a_i{}^j a_k{}^q - a_k{}^j a_i{}^q)$ sind. Die neue Determinante ist gleich einer Potenz von Δ.

Da nämlich die Determinante $(M_1\,N_2 \cdots R_r)$ nach dem Vorangehenden von Null verschieden ist, so muss dasselbe der Fall sein mit derjenigen Determinante, deren Elemente die Grössen $(M_i N_k - M_k N_i)$

u. s. w. sind. Und also findet man durch Auflösung der früher gefundenen $\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}$ linearen Gleichungen $\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}$ neue Relationen von der Form:

$$X_i \frac{dX_k}{df} - X_k \frac{dX_i}{df} = c_{ik1} X_1 + c_{ik2} X_2 + \cdots + c_{ikr} X_r.$$

Hier sind die c_{iks} Functionen von $a_1 \cdots a_r$. Und da die X_k wie auch die Ausdrücke links nur von f abhängen, und dabei die Grössen $f\, a_1 \cdots a_r$ als unabhängig betrachtet werden können, so müssen die c_{iks} absolute Constanten sein. Hiermit ist der folgende fundamentale Satz gewonnen:

Satz 2. *Sind* $\delta x = X_1(x)\delta t \cdots \delta x = X_r(x)\delta t$ r *unabhängige infinitesimale Transformationen einer* r*-gliedrigen Gruppe, so befriedigen die* X *paarweise Relationen der Form*

$$X_i \frac{dX_k}{dx} - X_k \frac{dX_i}{dx} = c_{ik1} X_1 + \cdots + c_{ikr} X_r,$$

wo die c_{iks} *Constanten sind.*

Dieser Satz zusammen mit den Formeln (2) genügt zur Bestimmung aller Transformationsgruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

§ 3.

Infinitesimale Transformationen verschiedener Ordnung.

Wir werden zeigen, dass die Zahl r der Parameter nicht grösser als drei sein kann.

4. Seien wiederum

$$\delta x = X_1(x)\delta t \cdots \delta x = X_r(x)\delta t \tag{3}$$

r unabhängige inf. Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe. Wir denken uns die $X_i(x)$ nach den Potenzen von $(x - x_0)$ entwickelt

$$X_i(x) = X_i(x_0) + \left(\frac{dX_i}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2X_i}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \cdots$$

und bilden die allgemeine infinitesimale Transformation

$$\delta x = \delta t\, \Sigma\, \lambda_i X_i$$

der Gruppe. Dabei wird eo ipso der Ausdruck $\Sigma\,\lambda_i X_i$ nach den Potenzen von $x - x_0$ entwickelt. Und zwar ist es möglich, die Parameter λ_i derart zu wählen, dass $\Sigma\,\lambda_i X_i$ die Form

$$\Sigma\,\lambda_i X_i = A_{r-1}(x - x_0)^{r-1} + A_r (x - x_0)^r + \cdots$$

erhält. Dabei muss A_{r-1} von Null verschieden sein, indem die Determinante

$$\begin{vmatrix} X_1^0 & \left(\frac{dX_1}{dx}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^{r-1}X_1}{dx^{r-1}}\right)_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_r^0 & \left(\frac{dX_r}{dx}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^{r-1}X_r}{dx^{r-1}}\right)_0 \end{vmatrix}$$

wegen der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen (3) nur für specielle Werthe von x_0 verschwinden darf.

Hieraus folgt nun sogleich, dass man immer r unabhängige infinitesimale Transformationen in der Gruppe wählen kann, die die Form

$$\begin{aligned}
\delta x &= (a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_{r-1}(x-x_0)^{r-1} + \cdots)\,\delta t,\\
\delta x &= \quad (b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_{r-1}(x-x_0)^{r-1} + \cdots)\,\delta t,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta x &= \qquad (h_{r-2}(x-x_0)^{r-2} + h_{r-1}(x-x_0)^{r-1} + \cdots)\,\delta t,\\
\delta x &= \qquad\qquad (k_{r-1}(x-x_0)^{r-1} + \cdots)\,\delta t
\end{aligned}$$

besitzen. Wir sagen zuweilen, dass die letzte inf. Transformation von der $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung in der Umgebung des Punkts $x = x_0$ ist; dass die nächstletzte von der $(r-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist u. s. w., und endlich dass die erste Transformation von nullter Ordnung ist.

Sind nun die infinitesimalen Transformationen

$$\delta x = Y_i(x)\,\delta t$$

und

$$\delta x = Y_k(x)\,\delta t$$

bezüglich von der Ordnung i und k, so ist der Ausdruck

$$Y_i \frac{dY_k}{dx} - Y_k \frac{dY_i}{dx}$$

von der Ordnung $(i+k-1)$; und da dieser Ausdruck (Satz 2) die Form

$$c_0 Y_0 + c_1 Y_1 + \cdots + c_{r-1} Y_{r-1}$$

besitzen soll, so können wir, wenn

$$i + k - 1 > r - 1$$

ist, schliessen, dass alle c gleich Null sind. Nun aber darf

$$Y_i \frac{dY_k}{dx} - Y_k \frac{dY_i}{dx}$$

nicht verschwinden, denn dann käme $Y_i = \text{Const.}\, Y_k$, und das ist unmöglich, da die beiden inf. Transformationen unabhängig sein sollen. Also erkennen wir, dass die Zahl $(i+k-1)$ nicht grösser als $r-1$ sein kann. Setzen wir daher, wie wir können

$$i = r - 1, \quad k = r - 2,$$

so kommt

$$2r - 4 \overline{\lt} r - 1,$$

woraus folgt, dass r höchstens gleich 3 sein kann.

5. Das Problem, alle Gruppen zu bestimmen, zerlegt sich also in die drei folgenden Probleme, 1. alle eingliedrigen Gruppen zu bestimmen, 2. alle zweigliedrigen Gruppen zu bestimmen, 3. alle dreigliedrigen Gruppen zu bestimmen.

Ist $\delta x = X(x)\,\delta t$ die infinitesimale Transformation einer beliebigen eingliedrigen Gruppe $x' = f(xa)$, so besteht, wie wir in § 2. sahen, eine Relation von der Form:

$$\frac{df}{da} = A(a) \cdot X(f),$$

woraus durch Integration

$$\int \frac{df}{X(f)} = \int A(a)\,da,$$

oder

$$\varphi(f) = \psi(a) + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstante erinnern wir daran, dass die Grösse a einen solchen Werth a_0 erhalten kann, dass $f(xa_0) = x$ wird. Dies giebt

$$\varphi(x) = \psi(a_0) + \text{Const.},$$

woraus

$$\varphi(f) - \varphi(x) = \psi(a) - \psi(a_0) = \chi(a),$$

und durch Auflösung, wenn wir die inverse Function von φ mit Φ bezeichnen,

$$f(xa) = \Phi(\varphi(x) + \chi(a)).$$

Jede eingliedrige Gruppe besitzt somit die Form

$$x' = \Phi(\varphi(x) + \chi(a)),$$

und andererseits ist klar, dass diese Gleichung immer eine eingliedrige Gruppe bestimmt, was auch die Functionen φ und χ sein mögen. Dies giebt (siehe die Einleitung p. 443) den Satz

Satz 3. *Jede eingliedrige Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist der linearen Gruppe $x' = x + a$ ähnlich.*

§ 4.

Erledigung des aufgestellten Problems.

6. Sind $\delta x = X_1(x)\,\delta t$ und $\delta x = X_2(x)\,\delta t$ die infinitesimalen Transformationen einer zweigliedrigen Gruppe $x' = f(xa_1a_2)$, so bestehen nach dem Vorangehenden Relationen der Form

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a_1} = A(a_1a_2)\,X_1(f) + B(a_1a_2)\,X_2(f), \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial a_2} = C(a_1a_2)\,X_1(f) + D(a_1a_2)\,X_2(f), \\[2mm] X_1\,\dfrac{dX_2}{dx} - X_2\,\dfrac{dX_1}{dx} = c_1X_1 + c_2X_2. \end{cases}$$

Dabei können die Constanten c_1 und c_2 nicht gleichzeitig gleich Null sein, indem sonst eine Relation der Form Const. $X_1 +$ Const. $X_2 = 0$ stattfände. Wir können daher annehmen, dass z. B. die Grösse c_1 von Null verschieden ist. Wir setzen

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = X_1',$$
$$\frac{1}{c_1} X_2 = X_2';$$

alsdann kommt

$$X_1' \frac{dX_2'}{dx} - X_2' \frac{dX_1'}{dx} = c_1 X_1 + c_2 X_2 = X_1'.$$

Wir können daher ohne Beschränkung $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ und also

$$X_1 \frac{dX_2}{dx} - X_2 \frac{dX_1}{dx} = X_1$$

setzen. Betrachten wir hier X_1 als bekannt, X_2 als unbekannt, so finden wir durch Integration

$$X_2 = X_1 \int \frac{dx}{X_1},$$

und durch Einsetzung in die beiden ersten Gleichungen (4)

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = A \cdot X_1(f) + B \cdot X_1(f) \int \frac{df}{X_1(f)};$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = C \cdot X_1(f) + D \cdot X_1(f) \int \frac{df}{X_1(f)}.$$

Führen wir hier die Grösse

$$\int \frac{df}{X_1(f)} = \varphi(f)$$

als unbekannte Function ein, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = A + B\varphi,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = C + D\varphi,$$

deren allgemeines Integral die Form

$$\varphi(f) = \psi_1(a_1 a_2) + K\psi_2(a_1 a_2)$$

besitzt. Um die Integrationsconstante K, die von $a_1\ a_2$ unabhängig, dagegen von x abhängig ist, zu bestimmen, erinnern wir daran, dass die Grössen a_1 und a_2 solche Werthe a_1^0 und a_2^0 erhalten können, dass $f(x\, a_1^0\, a_2^0)$ gleich x wird. Also kommt

$$\varphi(x) = \psi_1(a_1^0\, a_2^0) + K\psi_2(a_1^0\, a_2^0),$$

und durch Elimination von K

$$\varphi(f) = b_1 \varphi(x) + b_2,$$

wo b_1 und b_2 gewisse Functionen von a_1 und a_2 sind. Bezeichnen wir die inverse Function von φ wie früher mit Φ, so kommt

$$f(x\, a_1\, a_2) = \Phi(b_1\, \varphi(x) + b_2),$$

so dass jede zweigliedrige Gruppe die Form

$$x' = \Phi(b_1 \varphi(x) + b_2)$$

besitzt. Auf der anderen Seite ist klar, dass diese Gleichung immer eine zweigliedrige Gruppe bestimmt, die mit der linearen Gruppe $x' = a_1 x + a_2$ ähnlich ist. Dies giebt

Satz 4. *Jede zweigliedrige Gruppe ist der linearen Gruppe* $x' = a_1 x + a_2$ *ähnlich.*

7. Um die allgemeinste dreigliedrige Gruppe $x' = f(x\, a_1\, a_2\, a_3)$ zu bestimmen, wählen wir drei unabhängige inf. Transformationen der Gruppe

$$\delta x = X_1 \delta t, \quad \delta x = X_2 \delta t, \quad \delta x = X_3 \delta t,$$

die die Form

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots, \\ X_2 &= (x-x_0) + b_3(x-x_0)^3 + \cdots, \\ X_3 &= (x-x_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

besitzen. Bilden wir nun die drei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} X_2 X_3' - X_3 X_2' &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3, \\ X_3 X_1' - X_1 X_3' &= \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3, \\ X_2 X_1' - X_1 X_2' &= \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3, \end{aligned}$$

so ergeben sich bereits folgende Werthe für unsere Constanten

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -2, \quad \gamma_1 = -1, \quad \gamma_2 = 0.$$

Um die Constanten näher zu bestimmen, setzen wir

$$X_i X_k' - X_k X_i' = [X_i X_k]$$

und bemerken, dass die Gleichung*)

$$[[X_1 X_2]\, X_3] + [[X_2 X_3]\, X_1] + [[X_3 X_1]\, X_2] = 0$$

identisch besteht. Setzen wir hier die obenstehenden Werthe der Grössen $[X_i\, X_k]$ zweimal ein, so kommt eine Relation der Form

$$L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3 = 0,$$

---

*) Diese Gleichung folgt als Corollar aus der bekannten Jacobi'schen Identität

$$((AB)\, C) + ((BC)\, A) + ((CA)\, B) = 0,$$

wenn man

$$X_k \frac{df}{dx} = H_k$$

setzt, und darnach die Gleichung

$$((H_1 H_2)\, H_3) + ((H_2 H_3)\, H_1) + ((H_3 H_1)\, H_2) = 0$$

bildet.

welche zeigt, dass β_3 gleich Null ist. Also wird

$$[X_2 X_3] = X_3, \quad [X_3 X_1] = -2X_2, \quad [X_2 X_1] = -X_1 + \gamma_3 X_3.$$

Führen wir endlich $X_1 - \frac{\gamma_3}{2} X_3$ als neue X_1 ein, so kommt

$$[X_2 X_3] = X_3, \quad [X_3 X_1] = -2X_2, \quad [X_2 X_1] = -X_1.$$

Hier betrachten wir nun X_3 als gegeben und suchen die Grössen X_2 und X_1 zu bestimmen. Die Gleichung

$$[X_2 X_3] = X_3 = X_2 X_3' - X_3 X_2'$$

zeigt, dass

$$X_2 = -X_3 \int \frac{dx}{X_3}$$

ist. Die Gleichung

$$X_3 X_1' - X_1 X_3' = -2X_2 = 2X_3 \int \frac{dx}{X_3}$$

lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{X_1}{X_3}\right) = 2\frac{1}{X_3}\int \frac{dx}{X_3},$$

und giebt daher

$$\frac{X_1}{X_3} = \left(\int \frac{dx}{X_3}\right)^2 + \text{Const.},$$

wo die Integrationsconstante wegen der Gleichung $[X_2 X_1] = -X_1$ gleich Null sein muss. Die gefundenen Werthe

$$X_2 = -X_3 \int \frac{dx}{X_3}, \quad X_1 = X_3 \left(\int \frac{dx}{X_3}\right)^2$$

substituiren wir in die drei Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = A_i X_1(f) + B_i X_2(f) + C_i X_3(f),$$

und finden dadurch drei Gleichungen der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = A_i X_3 \left(\int \frac{df}{X_3}\right)^2 - B_i X_3 \int \frac{df}{X_3} + C_i X_3(f),$$

wo die Grössen A_i, B_i und C_i Functionen von $a_1\, a_2\, a_3$ sind. Um die Formeln zu vereinfachen, führen wir die Grösse

$$\varphi(f) = \int \frac{df}{X_3(f)}$$

als Unbekannte statt f ein, und erhalten hierdurch die drei Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = A_i \varphi^2 + B_i \varphi + C_i,$$

deren allgemeines Integral die Form

$$\varphi(f) = \frac{\psi_1(a_1 a_2 a_3) + K\psi_2(a_1 a_2 a_3)}{1 + K\psi_3(a_1 a_2 a_3)}$$

besitzt. Zur Bestimmung der Integrationsconstante K, die von $a_1\, a_2\, a_3$

unabhängig, dagegen von x abhängig ist, erinnern wir daran, dass die Grössen $a_1\,a_2\,a_3$ solche Werthe $a_1^0\,a_2^0\,a_3^0$ erhalten können, dass $f(x\,a_1^0\,a_2^0\,a_3^0)$ gleich x wird. Also wird

$$\varphi(x)=\frac{\psi_1(a_1^0\,a_2^0\,a_3^0)+K\,\psi_2(a_1^0\,a_2^0\,a_3^0)}{1+K\,\psi_3(a_1^0\,a_2^0\,a_3^0)};$$

und durch Elimination von K kommt

$$\varphi(f)=\frac{b_1+b_2\,\varphi(x)}{1+b_3\,\varphi(x)},$$

wo b_1, b_2, b_3 gewisse Functionen von a_1, a_2, a_3 sind. Hiermit ist der folgende Satz gefunden:

Satz 5. *Jede dreigliedrige Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit besitzt die Form*

$$x'=\Phi\left(\frac{a_1\,\varphi(x)+a_2}{a_3\,\varphi(x)+1}\right)$$

wo φ und Φ beliebige inverse Functionen sind. Jede solche Gruppe ist daher der allgemeinen linearen Gruppe $x'=\dfrac{a_1x+a_2}{a_3x+1}$ ähnlich.

Hiermit ist das in diesem Abschnitte gestellte Problem erledigt, denn durch Zusammenfassung der früher gefundenen Resultate ergiebt sich der Satz

Satz 6. *Jede Transformationsgruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist einer linearen Gruppe ähnlich und enthält somit höchstens drei Parameter.*

Abschnitt II.

Bestimmung aller Transformationsgruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Indem wir uns jetzt zu den Transformationsgruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit wenden, schicken wir zunächst einige allgemeine Betrachtungen über Transformationsgruppen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit voraus.

Fasst man in den n Gleichungen

$$x_i'=f_i(x_1\cdots x_n,\ a_1\cdots a_r),\quad (i=1,2\cdots n)$$

die Grössen $x_1'\cdots x_n'$ als ursprüngliche Variable, $x_1\cdots x_n$ als neue Variable, und $a_1\cdots a_r$ als Parameter auf, so definiren diese Gleichungen r-fach unendlich viele Transformationen. Ich sage, dass eine solche Schaar von Transformationen eine Gruppe bilden, wenn die Succession zweier Transformationen der Schaar mit einer einzigen

Transformation derselben Schaar äquivalent ist; wenn also aus den Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r) = f_i(a),$$

$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n'\, b_1 \cdots b_r)$$

folgt

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n\, c_1 \cdots c_r),$$

wo die Grössen $c_1 \cdots c_r$ nur von den a und b, dagegen weder von den x noch von der Zahl i abhängen. Anders ausgesprochen: wir verlangen das Stattfinden der Gleichungen

$$f_i(f_1(a) \cdots f_n(a) b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n\, c_1 \cdots c_r).$$

Wie in dem vorangehenden Abschnitte beschränken wir uns ausdrücklich auf Gruppen, deren Transformationen sich paarweise als *inverse* Transformationen zusammenordnen lassen, wobei wir jedoch die *Vermuthung* aussprechen, dass diese Eigenschaft einer jeden Gruppe zukommt.

Wir denken uns die unbekannten Functionen $f_1 \cdots f_n$ als nach den ganzen Potenzen der Grössen x und a fortschreitende Reihenentwicklungen, die binnen gewisser Bereiche dieser Grössen convergent sind. In Folge dessen sind die f_i eindeutige und differentiirbare Functionen ihrer Argumente. Wegen der Form der Bedingungsgleichungen tritt eo ipso die weitere Forderung hinzu, dass die Grössen $x_1 \cdots x_n$, $a_1 \cdots a_r$ derart gewählt werden können, dass der Werth einer jeden Grösse $f_i(x\, a)$ innerhalb des Bereiches der Grösse x_i fällt.

Führt man in die Gleichungen einer Transformationsgruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r)$$

statt $a_1 \cdots a_r$ gewisse Functionen dieser Grössen etwa $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ als neue Parameter ein, so bestimmen die hierdurch erhaltenen Gleichungen

$$x_i' = \varphi_i(x_1 \cdots x_n\, \alpha_1 \cdots \alpha_r)$$

eo ipso wiederum eine Transformationsgruppe, die als mit der ursprünglichen äquivalent aufzufassen ist. Hierbei kann es gelegentlich eintreffen, dass die neuen Gleichungen eine geringere Anzahl Parameter als die alten enthalten. Eine solche Erniedrigung in der Zahl der Parameter kann eintreten, wenn $f_1 \cdots f_n$, aufgefasst als Functionen von $a_1 \cdots a_r$ gemeinsame Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung der Form

$$\sum_k \psi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

sind. Befriedigen in der That alle f diese Gleichung, so ist es, wenn wir mit $\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}$ ein System Lösungen bezeichnen, die nur von $a_1 \cdots a_r$ abhängen, immer möglich die f_i auf die Form

$$\varphi_i(x_1 \cdots x_n\, \alpha_1 \cdots \alpha_{r-1})$$

zu bringen. Für jede Gruppe existirt eine gewisse Minimumszahl der Parameter. Ist diese Zahl gleich r, sagen wir, dass die Gruppe *r-gliedrig* ist. Diese Definition lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

Definition. *Eine Gruppe heisst r-gliedrig, wenn sie ∞^r verschiedene Transformationen enthält.*

Bestimmen die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r)$$

eine Transformationsgruppe, und führt man statt $x_1 \cdots x_n$ neue Variable $y_1 \cdots y_n$ vermöge der Gleichungen

$$x_k = \Theta_k(y_1 \cdots y_n) = \Theta_k$$

ein, so ist leicht zu erkennen, dass auch die Gleichungen

$$\Theta_i(y_1' \cdots y_n') = f_i(\Theta_1 \cdots \Theta_n\, a_1 \cdots a_r)$$

eine Transformationsgruppe bestimmen. Dies beruht darauf, dass die neuen und die alten Gleichungen identisch dieselben Transformationen zwischen den x bestimmen. Zwei solche Gruppen mögen *ähnlich* heissen.

Definition. *Zwei r-gliedrige Gruppen zwischen n Variabeln heissen ähnlich, wenn die eine Gruppe in die andere durch Einführung neuer Variabeln übergeführt werden kann.*

Meine Untersuchungen über Transformationsgruppen beabsichtigen zunächst die allgemeine Erledigung des folgenden Problems:

Problem. *Man soll alle r-gliedrigen Transformationsgruppen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmen.*

Bei der Behandlung dieses Problems ist es erlaubt, und zugleich zweckmässig, ähnliche Gruppen als identisch zu betrachten.

§ 5.

Die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe.

Im Folgenden werden wir nachweisen, dass jede r-gliedrige Gruppe, deren Transformationen sich paarweise als inverse Transformationen zusammenordnen lassen, ∞^{r-1} infinitesimale Transformationen enthält, die für die Gruppe charakteristisch sind. Die einzige oder jedenfalls die einfachste Methode zur Bestimmung aller Transformationsgruppen beruht darauf, dass man die infinitesimalen Transformationen derselben zum Untersuchungsgegenstand auswählt.

8. Eine Transformation heisst *infinitesimal*, wenn sie die Form

$$x_i' = x_i + X_i(x_1 \cdots x_n)\, \delta t$$

erhalten kann, und dabei δt eine infinitesimale Grösse bezeichnet. Wir schreiben im Allgemeinen solche Gleichungen folgendermassen:

$$\delta x_i = X_i(x_1 \cdots x_n)\, \delta t.$$

Führt man statt $x_1 \cdots x_n$ neue Variablen etwa $y_1 \cdots y_n$ ein, so erhält unsere infinitesimale Transformation die Form

$$\delta y_i = \delta t \sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k} X_k.$$

Führen wir andererseits dieselbe Variabelnänderung in dem Ausdrucke

$$A(F) = X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

aus, so kommt

$$A(F) = \frac{\partial F}{\partial y_1} \sum_k \frac{\partial y_1}{\partial x_k} X_k + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \sum_k \frac{\partial y_n}{\partial x_k} X_k.$$

Wir sehen also, dass die Gleichungen der infinitesimalen Transformation und der Ausdruck $A(F)$ sich in ganz entsprechender Weise transformiren. In Folge dessen ist es analytisch erlaubt, *den Ausdruck $A(F)$ als Symbol unserer infinitesimalen Transformation aufzufassen.*

Nehmen wir an, dass eine Transformationsgruppe die beiden infinitesimalen Transformationen

$$\delta x_i = X_i \,\delta t \quad \text{und} \quad \delta x_i = Y_i \,\delta \tau$$

enthält. Alsdann soll sie zugleich die mit der Aufeinanderfolge dieser beiden Transformationen äquivalente Transformation

$$\delta x_i = X_i \delta t + Y_i \,\delta \tau$$

enthalten. Giebt man hier dem Verhältnisse $\frac{\delta t}{\delta \tau}$ successiv alle mögliche Werthe, so erhält man einfach unendlich viele verschiedene Transformationen, die somit der Gruppe angehören. Dies giebt den Satz:

Satz 7. *Enthält eine Gruppe die beiden inf. Transformationen, deren Symbole bez. sind*

$$A(F) = X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n},$$

$$B(F) = Y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + Y_n \frac{\partial F}{\partial x_n},$$

so enthält sie zugleich die einfach unendlich vielen Transformationen, die durch das Symbol $\lambda A(F) + \mu B(F)$ mit der arbiträren Constante $\frac{\lambda}{\mu}$ dargestellt werden.

Wir sagen, dass r inf. Transformationen

$$A_1(F),\ A_2(F) \cdots A_r(f)$$

unabhängig sind, wenn sie durch keine lineare Relation mit constanten Coefficienten

$$\lambda_1 A_1(F) + \cdots + \lambda_r A_r(F) = 0$$

verbunden sind. Enthält eine Gruppe die r inf. Transformationen $A_1(F), \cdots, A_r(F)$, so enthält sie nach dem Vorangehenden zugleich die ∞^{r-1} inf. Transformationen, die durch das Symbol

$$\lambda_1 A_1(F) + \cdots + \lambda_r A_r(F)$$

mit den arbiträren Parametern $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ dargestellt werden.

9. Jeder Transformation $a_1 \cdots a_r$ der r-gliedrigen Gruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n \; a_1 \cdots a_r)$$

entspricht nach unserer Voraussetzung die inverse Transformation, die ebenso der Gruppe angehört. Seien $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ die Parameter der letzten Transformation, wobei die Grössen α gewisse Functionen der a sind. Es bestehen also die n Gleichungen

$$f_i(f_1(xa) \cdots f_n(xa) \; \alpha_1 \cdots \alpha_r) = x_i.$$

Dieses vorausgesetzt werden wir die Transformation

$$x_i' = f_i(f_1(a) \cdots f_n(a) \quad \alpha_1 + \omega_1 \cdots \alpha_r + \omega_r),$$

die der Gruppe angehört, betrachten. Wir lassen die ω infinitesimale Grössen bezeichnen und können daher unsere Transformationsgleichungen folgendermassen schreiben:

$$x_i' = f_i(f_1(a) \cdots f_n(a) \; \alpha_1 \cdots \alpha_r) + \sum_k \omega_k \left[\frac{\partial f_i(f_1(a) \cdots f_n(a) \; \beta_1 \cdots \beta_r)}{\partial \beta_k}\right]_{(\beta_k = \alpha_k)}.$$

Die hierdurch bestimmte Transformation

$$\delta x_i = \sum_k \omega_k \left[\frac{\partial f_i(f_1(a) \cdots f_n(a) \; \beta_1 \cdots \beta_r)}{\partial \beta_k}\right]_{(\beta_k = \alpha_k)}$$

ist infinitesimal, und hängt dabei von den r arbiträren inf. Grössen $\omega_1 \cdots \omega_r$ ab. Ich behaupte, dass die hierdurch bestimmten ∞^{r-1} inf. Transformationen sämmtlich verschieden sind. Gesetzt nämlich es bestände für jedes i eine lineare Relation der Form

$$\sum_k \varphi_k(a_1 \cdots a_r) \left[\frac{\partial f_i(f_1(a) \cdots f_n(a) \; \beta_1 \cdots \beta_r)}{\partial \beta_k}\right]_{(\beta_k = \alpha_k)} = 0,$$

wobei die φ_k von der Zahl i unabhängig wären. Alsdann erhielte man, indem man die Grössen $f_1(a) \cdots f_n(a) \; \alpha_1 \cdots \alpha_r$ als unabhängige Variabeln anstatt $x_1 \cdots x_n \; a_1 \cdots a_n$ einführte, n Relationen der Form

$$\sum_k \psi_k(\alpha_1 \cdots \alpha_r) \frac{\partial f_i(f_1 \cdots f_n \, \alpha_1 \cdots \alpha_r)}{\partial \alpha_k} = 0,$$

sodass die Zahl der Parameter der vorgelegten Gruppe sich erniedrigen liesse.

Hiermit erhalten wir den Satz:

Satz 8. *Jede r-gliedrige Gruppe enthält eine identische Transformation und r unabhängige inf. Transformationen.*

Dass eine r-gliedrige Gruppe nicht mehr als r unabhängige inf. Transformationen enthalten kann, liegt darin, dass sie sonst jedenfalls ∞^r verschiedene *infinitesimale* Transformationen enthielte, und das ist unmöglich, da die Gruppe nur ∞^r, im Allgemeinen *endliche* Transformationen enthalten soll.

§ 6.

Beziehungen zwischen den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe.

Seien $A_1(F)$, $A_2(F) \cdots A_r(F)$ r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r);$$

wir werden zeigen, dass jeder Ausdruck $A_i(A_k(F)) - A_k(A_i(F))$ sich als Summe der $A_j(F)$ multiplicirt mit gewissen Constanten ausdrückt.

10. Ich führe zuerst die endliche Transformation

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r),$$

sodann eine inf. Transformation derselben Gruppe

$$\delta x_i' = X_i(x_1' \cdots x_n')\, \delta t$$

aus. Diese Aufeinanderfolge

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r) + \delta t\, X_i(x_1' \cdots x_n')$$

soll mit einer Transformation der Gruppe, etwa mit

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 + \partial a_1 \cdots a_r + \partial a_r),$$

äquivalent sein. Dies giebt für jedes i eine Relation der Form

$$\delta t \cdot X_i(f_1 \cdots f_n) = \sum_k \frac{\partial f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r)}{\partial a_k}\, \partial a_k,$$

wo die infinitesimalen Grössen ∂a_k von der Zahl i unabhängig sind. Daher ergeben sich durch Division mit δt Relationen von der Form

$$X_i(f_1 \cdots f_n) = \sum_k B_k(a_1 \cdots a_r)\, \frac{\partial f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r)}{\partial a_k},$$

wo wiederum die B_k von der Zahl i und ebenso von den Grössen $x_1 \cdots x_n$ unabhängig sind.

Sind nun $A_1(F) \cdots A_r(F)$ wo

$$A_q(F) = X_{q1} \frac{\partial F}{\partial\ _1} + \cdots + X_{qn} \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

r unabhängige inf. Transformationen unserer Gruppe, so bestehen also für jedes q n Relationen der Form

$$X_{qi}(f_1 \cdots f_n) = \sum_k B_{qk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r)}{\partial a_k},$$

wo die B_{qk} von der Zahl i unabhängig, dagegen von der Zahl q abhängig sind. Ich behaupte, dass die Determinante der B_{qk} von Null verschieden sein muss; sonst nämlich bestände für jedes i eine Relation

$$\Sigma \psi_q(a_1 \cdots a_r)\, X_{qi}(f_1 \cdots f_n) = 0,$$

wo die ψ_k von der Zahl i unabhängig wären, und das ist unmöglich, da unsere r inf. Transformationen nach Voraussetzung unabhängig sind. Hiermit ist gezeigt, dass die Determinante der B_{qk} von Null verschieden ist, und also finden wir durch Auflösung Relationen von der Form

$$\frac{\partial f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r)}{\partial a_k} = \sum_q L_{kq}(a_1 \cdots a_r)\, X_{qi}(f_1 \cdots f_n),$$

wo wiederum die Grössen L_{kq} von der Zahl i unabhängig sind. Die Determinante der L_{kq} ist eo ipso von Null verschieden.

11. Die rechten Seiten dieser letzten Gleichungen befriedigen die bekannten Integrabilitätsbedingungen. Dies giebt $\frac{r(r-1)}{2}$ Relationen, unter denen wir die erste

$$\frac{\partial}{\partial a_2}\Big(\sum_q L_{1q} X_{qi}\Big) - \frac{\partial}{\partial a_1}\Big(\sum_j L_{2j} X_{ji}\Big) = 0$$

entwickeln. Dabei erinnern wir, dass die X nur von den Argumenten $f_1 \cdots f_r$ abhängen. Also kommt

$$\sum_q \sum_\alpha L_{1q} \frac{\partial X_{qi}}{\partial f_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial a_2} - \sum_j \sum_\alpha L_{2j} \frac{\partial X_{ji}}{\partial f_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial a_1}$$
$$+ \sum_q X_{qi}\left(\frac{\partial L_{1q}}{\partial a_2} - \frac{\partial L_{2q}}{\partial a_1}\right) = 0,$$

und durch Einsetzung der Werthe der Grössen $\frac{\partial f_\alpha}{\partial a_2}$ und $\frac{\partial f_\alpha}{\partial a_1}$:

$$\sum_q \sum_\alpha L_{1q} \frac{\partial X_{qi}}{\partial f_\alpha} \sum_j L_{2j} X_{j\alpha} - \sum_j \sum_\alpha L_{2j} \frac{\partial X_{ji}}{\partial f_\alpha} \sum_q L_{1q} X_{q\alpha}$$
$$+ \sum_q X_{qi}\left(\frac{\partial L_{1q}}{\partial a_2} - \frac{\partial L_{2q}}{\partial a_1}\right) = 0,$$

oder

$$\sum_q \sum_j L_{1q} L_{2j} \sum_\alpha \left(X_{j\alpha} \frac{\partial X_{qi}}{\partial f_\alpha} - X_{q\alpha} \frac{\partial X_{ji}}{\partial f_\alpha}\right)$$
$$+ \sum_q X_{qi}\left(\frac{\partial L_{1q}}{\partial a_2} - \frac{\partial L_{2q}}{\partial a_1}\right) = 0,$$

oder endlich

$$\sum_q \sum_j L_{1q} L_{2j} \left(A_j(X_{qi}) - A_q(X_{ji})\right) + \sum_q X_{qi} \left(\frac{\partial L_{1q}}{\partial a_2} - \frac{\partial L_{2q}}{\partial a_1}\right) = 0.$$

In dieser Gleichung kommt das Glied $A_j(X_{qi}) - A_q(X_{ji})$ zweimal vor, einmal multiplicirt mit $L_{1q} L_{2j}$, ein andermal multiplicirt mit $- L_{1j} L_{2q}$. Daher kann unsere Gleichung die Form

$$\sum_q \sum_j (L_{1q} L_{2j} - L_{1j} L_{2q}) \left((A_j(X_{qi}) - A_q(X_{ji})\right) = \sum_q X_{qi} \left(\frac{\partial L_{2q}}{\partial a_1} - \frac{\partial L_{1q}}{\partial a_2}\right)$$

erhalten, wobei die linke Seite $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Grössen $A_j(X_{qi}) - A_q(X_{ji})$ enthält.

In entsprechender Weise erhält man in Allem $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Gleichungen, die sämmtlich hinsichtlich der $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Grössen $A_j(X_{qi}) - A_q(X_{ji})$ linear sind. Und da die Determinante der $L_{\alpha\beta}$ von Null verschieden ist, und in Folge dessen auch die Determinante, deren Elemente die zweigliedrigen Unterdeterminanten der soeben besprochenen Determinante sind, von Null verschieden ist, so findet man durch Auflösung der gefundenen linearen Gleichungen $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Relationen der Form

$$A_j(X_{qi}) - A_q(X_{ji}) = \sum_s \varphi_{jqs}(a_1 \cdots a_r) X_{si},$$

wobei die φ_{jqs} von der Zahl i unabhängig sind. Nun aber sind die linken Seiten wie auch die X_{si} Functionen allein von $f_1 \cdots f_n$, während sie von $a_1 \cdots a_r$ unabhängig sind; also schliessen wir, dass die φ_{jqs} Constanten sind. Dies giebt den folgenden fundamentalen Satz:

Satz 9. *Sind $A_1(F) \cdots A_r(F)$, wo*

$$A_q(F) = X_{q1} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + X_{qn} \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

ist, r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, so bestehen für jedes i $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Relationen von der Form

$$A_j(X_{qi}) - A_q(X_{ji}) = \sum_s c_{jqs} X_{si}.$$

Dabei sind die c_{jqs} absolute Constanten, die von der Zahl i unabhängig *sind. Diese Bedingungsgleichungen lassen sich in die* $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ *Relationen*

$$A_j(A_q(F)) - A_q(A_j(F)) = \sum_s c_{jqs} A_s(F)$$

zusammenfassen.

Bei einer späteren Gelegenheit werden wir umgekehrt zeigen, dass r Ausdrücke $A_1(F) \cdots A_r(F)$, die in solcher gegenseitigen Beziehung stehen, dass jedes $A_j(A_q(F)) - A_q(A_j(F))$ sich als Summe der $A_s(F)$ multiplicirt mit Constanten ausdrückt, die inf. Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe sind*). Dass diese Behauptung jedenfalls für den Fall $n = 2$ richtig ist, wird *a posteriori* aus den Entwickelungen dieser Abhandlung hervorgehen.

Vermöge des Satzes 9. bestimmen wir in dieser Abhandlung die infinitesimalen Transformationen einer jeden Gruppe einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Wie man sodann die zugehörigen endlichen Transformationen bestimmt, zeigen die Entwickelungen des nächsten Paragraphen.

§ 7.

Eine Gruppe ist bestimmt durch ihre infinitesimalen Transformationen.

Wenn die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$A_1(F) \cdots A_r(F)$$

einer r-gliedrigen Gruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r)$$

angehören, so können sie nicht zugleich einer anderen r-gliedrigen Gruppe angehören. Dies soll im gegenwärtigen Paragraphen gezeigt werden.

12. Ich zeige zunächst, dass man, wenn eine infinitesimale Transformation

$$\delta x_i = X_i(x_1 \cdots x_n)\, \delta t$$

einer beliebigen Gruppe bekannt ist, immer einfach unendlich viele Transformationen dieser Gruppe angeben kann.

Früher fanden wir die n Relationen

$$X_i(f_1 \cdots f_n)\, \delta t = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial a_k}\, d a_k = d f_i,$$

in denen die da_k von der Zahl i unabhängig waren, und dabei ein gewisses simultanes System

$$d a_k = \psi_k(a_1 \cdots a_r)\, dt$$

*) Einen Beweis dieses Satzes gab ich im dritten Bande, pag. 94 des Archiv for Math. og Naturv., Christiania.

befriedigten. Seien

$$W_k(f_1 \cdots f_n t) = W_k(f_1^{(0)} \cdots f_r^{(0)} t^{(0)})$$

die Integralgleichungen des simultanen Systems $df_i = X_i(f_1 \cdots f_n)\,\delta t$; und seien andererseits

$$\Omega_k(a_1 \cdots a_r t) = \Omega_k(a_1^{(0)} \cdots a_r^{(0)} t^{(0)})$$

die Integralgleichungen des Systems $d a_k = \psi_k(a_1 \cdots a_r)\,dt$. Die Anfangswerthe $f_k^{(0)}$ und $a_k^{(0)}$ mögen durch die Gleichungen

$$f_k^{(0)} = f_k(x_1 \cdots x_n\, a_1^{(0)} \cdots a_r^{(0)})$$

verbunden sein und ich wähle die $a_k^{(0)}$ derart, dass die Gleichungen

$$f_k(x_1 \cdots x_n\, a_1^{(0)} \cdots a_r^{(0)}) = x_k$$

bestehen. Alsdann findet man die n Gleichungen

$$W_k(f_1 \cdots f_n t) = W_k(x_1 \cdots x_n t^{(0)}),$$

die durch Auflösung

$$f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r) = \Phi_i(x_1 \cdots x_n)\,(t - t_0)$$

geben. Hier ist t eine arbiträre Grösse, während die a_k bekannte Functionen der bestimmten Grössen $a_k^{(0)}$ und des Parameters t sind.

Hiermit ist nachgewiesen, dass die einfach unendlich vielen Transformationen

$$x_i' = \Phi_k(x_1 \cdots x_n\, t)$$

der Gruppe angehören.

13. Sind nun $A_1(F) \cdots A_r(F)$, wo

$$A_k(F) = X_{k1}\frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + X_{kn}\frac{\partial F}{\partial x_n}$$

ist, r unabhängige inf. Transformationen einer Gruppe, so findet man folgendermassen ∞^r endliche Transformationen dieser Gruppe. Man bildet die allgemeinste infinitesimale Transformation

$$\lambda_1 A_1(F) + \cdots + \lambda_r A_r(F),$$

die in der Gruppe enthalten ist, und integrirt sodann das simultane System

$$\frac{dx_1}{\Sigma \lambda_k X_{k1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\Sigma \lambda_k X_{kn}} = \delta t,$$

wobei man die λ_k als Constanten betrachtet. Sind die Grössen

$$W_1(x_1 \cdots x_n,\ \lambda_1 t,\ \cdots,\ \lambda_r t),\ W_2 \cdots W_n$$

unabhängige Lösungen dieses Systems, so löst man die Gleichungen

$$W_i(x_1' \cdots x_n',\ \lambda_1 t,\ \cdots,\ \lambda_r t) = W_i(x_1 \cdots x_n,\ \lambda_1 t_0,\ \cdots,\ \lambda_r t_0)$$

hinsichtlich der x_i' auf; die durch die hervorgehenden Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n \quad \lambda_1(t - t_0) \cdots \lambda_r(t - t_0))$$

bestimmten Transformationen gehören nach den Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen der Gruppe an; sie hängen überdies von r Parametern $\lambda_1(t-t_0)\cdots\lambda_r(t-t_0)$ ab; können wir daher nachweisen, dass die Zahl dieser Parameter nicht erniedrigt werden kann, so ist eo ipso erwiesen, dass ihr Inbegriff *alle* Transformationen der Gruppe liefert.

Die x_i' lassen sich nach den Potenzen von $(t-t_0)$ entwickeln:

$$x_i' = x_i + (t-t_0)\,\Sigma\,\lambda_k X_{ki}(x_1\cdots x_n) + \cdots.$$

Bestände daher für jedes i eine Relation

$$\sum_q \psi_q(\lambda_1(t-t_0),\ldots,\lambda_r(t-t_0))\,\frac{\partial x_i'}{\partial(\lambda_q(t-t_0))} = 0,$$

so erhielte man, indem man die linke Seite nach den Potenzen von $(t-t_0)$ entwickelte und sodann den Coefficient der Grösse $(t-t_0)^0$ gleich Null setzte, eine Relation der Form

$$\sum_q \psi_q^{(0)}\cdot X_{qi}(x_1\cdots x_n) = 0,$$

wo die $\psi_q^{(0)}$ Constanten und dabei von der Zahl i unabhängig wären. Dann aber wären unsere inf. Transformationen nicht unabhängig, wie vorausgesetzt wurde.*)

Also bestimmen unsere Reihenentwickelungen ∞^r verschiedene endliche Transformationen, die mit dem Inbegriffe *aller* Transformationen der vorgelegten Gruppe identisch sein müssen. Hiermit erhalten wir den folgenden fundamentalen Satz:

Satz 10. *Die inf. Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe können nicht sämmtlich einer anderen r-gliedrigen Gruppe angehören.*

§ 8.

Transformation der Linienelemente.

14. Indem ich mich jetzt zu den Transformationsgruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $x\,y$ wende, interpretire ich x und y als die *Cartesischen* Coordinaten einer *Ebene*. Die infinitesimale Punkttransformation

$$\delta x = \xi(xy)\,\delta t, \qquad \delta y = \eta(xy)\,\delta t$$

bezeichne ich mit dem Symbole

$$A(f) = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

*) Im Texte ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die Grössen ψ_q nicht sämmtlich bei der Substitution $t = t_0$ verschwinden. Tritt dieser Ausnahmefall ein, so müssen die Entwickelungen des Textes ein wenig modificirt werden.

oder indem ich $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, $\frac{\partial f}{\partial y} = q$ setze, mit

$$A(f) = \xi p + \eta q.$$

Und ich betrachte diese Transformation als eine Operation, die jeden Punkt $x\,y$ in die benachbarte Lage $x + \xi\delta t$, $y + \eta\delta t$ überführt. Gleichzeitig erhalten die Linienelemente der Ebene, deren Bestimmungsstücke die Grössen x, y und $\frac{dy}{dx} = y'$ sind, gewisse benachbarte Lagen, zu deren Bestimmung es genügt die Grösse $\delta y'$ zu berechnen. Es ist

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\frac{dy}{dx} = \frac{dx\frac{\delta(dy)}{\delta t} - dy\frac{\delta(dx)}{\delta t}}{dx^2} = \frac{dx\cdot d\frac{\delta y}{\delta t} - dy\cdot d\frac{\delta x}{\delta t}}{dx^2}$$

$$= \frac{dx\,\partial\eta - dy\,\partial\xi}{dx^2} = \frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial\xi}{\partial y}.$$

Wünschen wir ausdrücklich hervorzuheben, dass die Transformation $A(f) = \xi p + \eta q$ nicht allein die Punkte $x\,y$, sondern auch die Linienelemente $x\,y\,y'$ der Ebene in neue Lagen überführt, so bezeichnen wir unsere Transformation mit dem Symbole

$$B(f) = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right]\frac{\partial f}{\partial y'}.$$

15. Seien $A_1(f)$, $A_2(f)\cdots A_r(f)$, wo

$$A_i(f) = \xi_i p + \eta_i q \qquad (i = 1, 2\cdots r)$$

ist, r unabhängige infinitesimale Transformationen (einer Gruppe), die (somit) paarweise Relationen von der Form

$$(5)\qquad A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = \sum_s c_{iks} A_s(f)$$

erfüllen. Setze ich sodann

$$B_i(f) = \xi_i\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i\frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial\eta_i}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial y} - \frac{\partial\xi_i}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial\xi_i}{\partial y}\right]\frac{\partial f}{\partial y'},$$

oder

$$B_i(f) = \xi_i p + \eta_i q + \zeta_i\frac{\partial f}{\partial y'},$$

so behaupte ich, dass die $B_i(f)$ durch die analogen Relationen

$$B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f)) = \sum_s c_{iks} B_s(f)$$

verbunden sind; oder was auf dasselbe hinauskommt, dass die Gleichungen

$$B_i(\zeta_k) - B_k(\zeta_i) = \sum_s c_{iks}\zeta_s$$

stattfinden.

Durch directe Berechnung findet man

$$B_i(\xi_k) - B_k(\xi_i) = L + My' + Ny'^2,$$

wo

$$L = A_i\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x}\right) - A_k\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial \eta_i}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial y} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x}\right) - \frac{\partial \eta_k}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right),$$

$$M = A_i\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial y} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x}\right) - A_k\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial \eta_i}{\partial x}\frac{\partial \xi_k}{\partial y} + 2\frac{\partial \xi_i}{\partial y}\frac{\partial \eta_k}{\partial x},$$

$$N = -A_i\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial y}\right) + A_k\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi_k}{\partial y} + \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial y} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi_i}{\partial y}$$

ist. Nun aber ist (5):

$$\xi_i\frac{\partial \eta_k}{\partial x} + \eta_i\frac{\partial \eta_k}{\partial y} - \xi_k\frac{\partial \eta_i}{\partial x} - \eta_k\frac{\partial \eta_i}{\partial y} = \sum_s c_{iks}\eta_s \tag{6}$$

und also kommt durch Differentiation hinsichtlich x

$$A_i\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x}\right) - A_k\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\frac{\partial \eta_k}{\partial x} + \frac{\partial \eta_i}{\partial x}\frac{\partial \eta_k}{\partial y} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x}\frac{\partial \eta_i}{\partial x} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x}\frac{\partial \eta_i}{\partial y} = \sum_s c_{iks}\frac{\partial \eta_s}{\partial x},$$

oder

$$L = \sum_s c_{iks}\frac{\partial \eta_s}{\partial x}.$$

Dementsprechend findet man durch Differentiation der Relation

$$\xi_i\frac{\partial \xi_k}{\partial x} + \eta_i\frac{\partial \xi_k}{\partial y} - \xi_k\frac{\partial \xi_i}{\partial y} - \eta_k\frac{\partial \xi_i}{\partial y} = \sum_s c_{iks}\xi_s \tag{7}$$

hinsichtlich y, dass

$$N = -\sum_s c_{iks}\frac{\partial \xi_s}{\partial y}$$

ist. Differentiirt man endlich die Gleichungen (6) und (7) bezüglich hinsichtlich y und x, und subtrahirt die hervorgehenden Relationen, so erkennt man, dass

$$M = \sum_s c_{iks}\left(\frac{\partial \eta_s}{\partial y} - \frac{\partial \xi_s}{\partial x}\right)$$

ist. Folglich ist

$$L + My' + Ny'^2 = \sum_s c_{iks} \left[\frac{\partial \eta_s}{\partial x} + y' \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial y} - \frac{\partial \xi_s}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_s}{\partial y}\right]$$

oder

$$B_i \zeta_k - B_k \zeta_i = \sum_s c_{iks} \zeta_s,$$

wie behauptet wurde.

16. Nehmen wir nun an, dass die Grössen $\xi_i \eta_i$ bei der Substitution $x = x_0$, $y = y_0$ sämmtlich verschwinden; geometrisch ausgesprochen, dass sämmtliche infinitesimalen Transformationen (der vorgelegten Gruppe) den Punkt $x_0 y_0$ invariant lassen. Alsdann werden die durch diesen Punkt hindurchgehenden Linienelemente transformirt durch die infinitesimalen Transformationen

$$(8) \quad \delta y' = \left[\frac{\partial \eta_i (x_0 y_0)}{\partial x_0} + y' \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y_0} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_0}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial y_0}\right] \delta t = \zeta_i^{(0)} \delta t$$

die nach ihrer Form *lineare* Transformationen der Grösse y' sind (§ 1.). Und da die Gleichung

$$B_i \zeta_k - B_k \zeta_i = \sum_s c_{iks} \zeta_s$$

bei der Substitution $x = x_0$, $y = y_0$ die Form

$$\zeta_i^{(0)} \frac{d\zeta_k^{(0)}}{dy'} - \zeta_k^{(0)} \frac{d\zeta_i^{(0)}}{dy'} = \sum_s c_{iks} \zeta_s^{(0)}$$

annimmt, so bilden die linearen infinitesimalen Transformationen (8) immer einer Gruppe. Hiermit ist der folgende allgemeine Satz erwiesen:

Satz 11. *Wenn die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe einen Punkt der Ebene invariant lassen, so transformiren sie die hindurchgehenden ∞^1 Linienelemente durch eine lineare Gruppe.*

17. Dieser Satz kann folgendermassen auf beliebige Transformationsgruppen der Ebene ausgedehnt werden. Nehmen wir an, dass die infinitesimalen Transformationen $A_1(f) \cdots A_r(f)$ einer beliebigen r-gliedrigen Gruppe nicht sämmtlich den Punkt $x_0 y_0$ invariant lassen. Alsdann kann man in dem Ausdrucke

$$\lambda_1 A_1(f) + \cdots + \lambda_r A_r(f) = p \sum_k \lambda_k \xi_k + q \sum_k \lambda_k \eta_k$$

immer die Constanten λ_k derart wählen, dass die Grössen $\Sigma \lambda_k \xi_k$ und $\Sigma \lambda_k \eta_k$ bei der Substitution $x = x_0$, $y = y_0$ gleich Null werden. In dieser Weise findet man in der Gruppe jedenfalls $r - 2$ und unter Umständen $r - 1$ infinitesimale Transformationen

$$B_1(f), \; B_2(f), \cdots B_\varrho(f),$$

die den Punkt $x_0 y_0$ invariant lassen. Es ist dabei klar, dass die

$B_k(f)$, als infinitesimale Transformationen der Gruppe, paarweise Relationen der Form

$$B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f)) = \sum_s d_{iks} A_s f$$

erfüllen. Und da die linke und in Folge dessen auch die rechte Seite bei der Substitution $x = x_0$, $y = y_0$ identisch verschwindet, so kann die letzte Gleichung die Form

$$B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f)) = \sum_s \alpha_{iks} B_s(f)$$

erhalten. Dann aber können wir ganz wie in der vorangehenden Nummer schliessen, dass die inf. Transformationen $B_k(f)$ die durch den invarianten Punkt hindurchgehenden Linienelemente durch eine lineare Gruppe transformiren. Dies giebt den folgenden Satz:

Satz 12. *Diejenigen inf. Transformationen einer Gruppe, die einen Punkt der Ebene invariant lassen, transformiren die hindurchgehenden Linienelemente durch eine lineare Gruppe.*

Hierbei können vier wesentlich verschiedene Fälle eintreten, indem die soeben besprochene lineare Gruppe drei, zwei, einen oder keinen Parameter enthalten kann. Und dem entsprechend giebt es vier verschiedene Arten Transformationsgruppen einer Ebene. Wir kommen später auf dieses Classificationsprincip wieder zurück.

§ 9.

Infinitesimale Transformationen verschiedener Ordnung.

18. Ist $\delta x = \xi(xy)\,\delta t$, $\delta y = \eta(xy)\,\delta t$ oder $A(f) = \xi p + \eta q$ das Symbol einer infinitesimalen Transformation, so können die Grössen ξ und η immer nach den Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickelt werden:

$$\xi = a_0 + a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0) + a_2(x-x_0)^2 + b_2(x-x_0)(y-y_0) + c_2(y-y_0)^2 \cdots$$

$$\eta = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \beta_1(y-y_0) + \alpha_2(x-x_0)^2 + \beta_2(x-x_0)(y-y_0) + \gamma_2(y-y_0)^2 \cdots$$

Ist entweder a_0 oder α_0 oder auch sind beide Grössen von Null verschieden, so sagen wir, dass unsere inf. Transformation in der Umgebung des Punktes $x_0 y_0$ von der *nullten Ordnung* ist. Sind dagegen a_0 und α_0 gleich Null, während jedenfalls eine der Grössen $a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1$ von Null verschieden ist, so sagen wir, dass die Transformation von der *ersten Ordnung* ist. Dem entsprechend sagen wir überhaupt, dass *eine inf. Transformation $\xi p + \eta q$ in der Umgebung von $x_0 y_0$ von der*

s^{ten} Ordnung ist, wenn in den Reihenentwickelungen der Grössen ξ und η nach den Potenzen von $x-x_0$ und $y-y_0$ alle Glieder nullter, erster, $\cdots$ $(s-1)^{ter}$ Ordnung fehlen, während jedenfalls ein Glied s^{ter} Ordnung vorkommt.

Bei Untersuchungen über inf. Transformationen genügt es sehr häufig in den Reihenentwickelungen der Grössen ξ und η nur die Glieder der niedrigsten ~~höchsten~~ auftretenden Ordnung zu berücksichtigen. In den betreffenden Rechnungen können die übrigen Glieder ganz einfach weggelassen werden. Wenn ich im Folgenden z. B. von einer infinitesimalen Transformation

$$(x-x_0)\,q+\cdots$$

spreche, so verstehe ich darunter eine inf. Transformation $\xi p+\eta q$, deren ξ von zweiter oder höherer Ordnung hinsichtlich $(x-x_0)$ und $(y-y_0)$ ist, während η ein Glied erster Ordnung, nämlich $(x-x_0)$, enthält.

19. Bei der Transformation $\xi p+\eta q$ erhalten die Coordinaten $x_0 y_0$ eines beliebigen Punktes die Incremente $\xi(x_0 y_0)\,\delta t$ und $\eta(x_0 y_0)\,\delta t$, wobei $\xi(x_0 y_0)$ $\eta(x_0 y_0)$ die Glieder nullter Ordnung in den Reihenentwickelungen von ξ und η nach $(x-x_0)$ und $y-y_0$ sind.

Ist daher eine vorgelegte inf. Transformation in der Umgebung des Punktes $x_0 y_0$ von erster oder höherer Ordnung, so ändert sie nicht die Lage dieses Punktes.

Wünschen wir zu untersuchen, wie eine solche Transformation die durch $x_0 y_0$ hindurchgehenden Linienelemente transformirt, so benutzen wir die Formel (8)

$$\delta y'=\left[\frac{\partial\eta(x_0 y_0)}{\partial x_0}+y'\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y_0}-\frac{\partial\xi_0}{\partial x_0}\right)-y'^2\,\frac{\partial\xi_0}{\partial y_0}\right]\delta t,$$

die jetzt die Form

$$\delta y'=\left[\alpha_1+(\beta_1-a_1)\,y'-b_1 y'^2\right]\delta t$$

annimmt. *Ist die Transformation von zweiter oder höherer Ordnung, so behalten offenbar alle durch $x_0 y_0$ gehenden Linienelemente ihre Lage. Dasselbe tritt ein, wenn die Transformation von der ersten Ordnung ist, vorausgesetzt dass sie die Form*

$$(x-x_0)\,p+(y-y_0)\,q+\cdots$$

besitzt. Ist dagegen $\beta_1 \gtrless a_1$, so werden die durch $x_0 y_0$ gehenden Linienelemente linear transformirt. Dabei giebt es jedenfalls ein Element und im Allgemeinen zwei Elemente, welche die Gleichung

$$0=\alpha_1+(\beta_1-a_1)\,y'-b_1 y'^2$$

erfüllen, und welche in Folge dessen ihre Lage ungeändert behalten.

20. Sind $A_1(f)$ $A_2(f)$ $\cdots$ $A_r(f)$ r unabhängige inf. Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, deren allgemeinste inf. Transformation somit die Form

$$\lambda_1 A_1(f) + \lambda_2 A_2(f) + \cdots + \lambda_r A_r(f)$$

besitzt, so ist es, wenn r grösser als 2 ist, immer möglich den Constanten λ_k solche Werthe zu geben, dass $\Sigma \lambda_k A_k(f)$ in der Umgebung des Punktes $x_0 y_0$ von der ersten Ordnung wird. *Man findet so jedenfalls* $r - 2$ *Transformationen erster Ordnung.* Ist r grösser als 6, so können die λ_k solche Werthe erhalten, dass $\Sigma \lambda_k A_k(f)$ in der Umgebung des Punktes $x_0 y_0$ von der zweiten Ordnung wird. *Es giebt also jedenfalls* $r - 6$ *Transformationen zweiter Ordnung.* In entsprechender Weise findet man jedenfalls $r - 12$ inf. Transformationen dritter Ordnung u. s. w.

Wir sagen zuweilen, dass ϱ Transformationen erster Ordnung $B_1(f)\ B_2(f) \cdots B_\varrho(f)$ *unabhängige Transformationen erster Ordnung* sind, wenn keine Transformation der Form $\nu_1 B_1(f) + \cdots + \nu_\varrho B_\varrho(f)$ von zweiter oder noch höherer Ordnung ist.

Eine Gruppe enthält daher höchstens vier unabhängige Transformationen erster Ordnung.

21. Es ist leicht nachzuweisen, dass die unabhängigen inf. Transformationen erster Ordnung einer Gruppe gewisse bestimmte Formen haben müssen, je nachdem ihre Anzahl gleich 4, 3, 2, 1 oder Null ist. Es ist zunächst denkbar, dass die Gruppe *vier* unabhängige Transformationen erster Ordnung enthält. Dann können dieselben offenbar die Form

$$\begin{gathered}(x - x_0)\,p + \cdots \\ (y - y_0)\,p + \cdots \\ (x - x_0)\,q + \cdots \\ (y - y_0)\,q + \cdots\end{gathered}$$

erhalten. Hat die Gruppe nur *drei* unabhängige Transformationen erster Ordnung, so sind zwei wesentlich verschiedene Fälle möglich, je nachdem es eine Transformation der Form

$$(x - x_0)\,p + (y - y_0)\,q + \cdots = U + \cdots$$

giebt oder nicht giebt. Im letzten Falle haben die 3 inf. Transformationen die Form

$$\begin{aligned}(x - x_0)\,q + \alpha U + \cdots &= B_1(f) + \cdots \\ (x - x_0)\,p - (y - y_0)\,q + \beta U + \cdots &= B_2(f) + \cdots \\ (y - y_0)\,p + \gamma U + \cdots &= B_3(f) + \cdots\end{aligned}$$

Nun aber ist

$$B_1(B_3(f)) - B_3(B_1(f)) = (x - x_0)\,p - (y - y_0)\,q,$$

und da $B_1(B_3(f)) - B_3(B_1(f)) + \cdots$ das Symbol einer inf. Transformation der Gruppe sein soll (Satz 9.); so erkennen wir, dass $\beta = 0$

sein muss. In entsprechender Weise ergiebt sich durch Bildung der Ausdrücke $B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f))$, $B_3(B_2(f)) - B_2(B_3(f))$, dass auch α und γ gleich Null sein müssen. So folgt

Satz 13. *Hat eine Gruppe drei unabhängige Transformationen erster Ordnung, und findet sich unter ihnen keine der Form* $(x-x_0)p + (y-y_0)q + \cdots$, *so haben dieselben die Form*

$$(x-x_0)q + \cdots, \quad (x-x_0)p - (y-y_0)q + \cdots, \quad (y-y_0)p + \cdots$$

Nehmen wir jetzt an, dass die Gruppe drei unabhängige Transformationen erster Ordnung enthält, unter denen eine die Form

$$U = (x-x_0)p + (y-y_0)q + \cdots$$

besitzt. Die beiden anderen können dann die Form

$$\alpha_1(x-x_0)q + \beta_1[(x-x_0)p - (y-y_0)q] + \gamma_1(y-y_0)p + \cdots = C_1(f) + \cdots$$

$$\alpha_2(x-x_0)q + \beta_2[(x-x_0)p - (y-y_0)q] + \gamma_2(y-y_0)p + \cdots = C_2(f) + \cdots$$

erhalten. Und dabei sind die Ausdrücke erster Ordnung $C_1(f)$ und $C_2(f)$ durch eine Relation der Form

$$C_1(C_2(f)) - C_2(C_1(f)) = A_1 \cdot C_1(f) + A_2 \cdot C_2(f)$$

verbunden. Hier dürfen die Constanten A_1 und A_2 nicht gleichzeitig verschwinden, indem sonst die drei Ausdrücke

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \quad \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \quad \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1$$

gleich Null wären, was durch die Unabhängigkeit der Ausdrücke $C_1(f)$ und $C_2(f)$ ausgeschlossen ist. In Folge dessen können die inf. Transformationen $C_1(f) + \cdots$, $C_2(f) + \cdots$ ohne wesentliche Beschränkung derart gewählt werden, dass $A_1 = 1$, $A_2 = 0$ wird. Dies giebt eine Anzahl Relationen zwischen den sechs Constanten $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, vermöge deren sie leicht in allgemeinster Weise bestimmt werden können. Hierauf werde ich indess nicht näher eingehen.

§ 10.

Gruppen, die eine Curvenschaar $\varphi(xy) =$ Const. invariant lassen.

22. Die infinitesimale Transformation

$$A(f) = \xi p + \eta q$$

führt im Allgemeinen eine vorgelegte Curvenschaar $\varphi(xy) = a =$ Const. in eine neue Schaar

$$\varphi(xy) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta\right)\delta t = a$$

über. Soll die neue Schaar mit der vorgelegten identisch sein, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass der Ausdruck

$$A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\eta$$

selbst eine Function von φ ist. Man denke sich jetzt, dass $\varphi = a$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$B(f) = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ist. Setzt man sodann in der identischen Gleichung

$$A(B(f)) - B(A(f)) = (AX - B\xi)\frac{\partial f}{\partial x} + (AY - B\eta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

insbesondere f gleich φ, so kommt, da sowohl $B(\varphi)$ wie $B(A(\varphi))$ unter den gemachten Voraussetzungen gleich Null sind,

$$0 = (AX - B\xi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (AY - B\eta)\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Also ist φ gleichzeitig das allgemeine Integral der beiden Gleichungen

$$(AX - B\xi)\frac{\partial f}{\partial x} + (AY - B\eta)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

die somit identisch sein müssen. *Soll daher die durch die Gleichung* $X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *bestimmte Curvenschaar* $\varphi(xy) = a$ *die inf. Transformation* $Af = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$ *gestatten, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung*

$$\frac{AX - B\xi}{X} = \frac{AY - B\eta}{Y} \tag{9}$$

identisch stattfindet.

Setzen wir endlich voraus, dass die Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ durch eine Differentialgleichung der impliciten Form

$$\psi(xyy') = 0$$

bestimmt wird. Wünschen wir zu entscheiden, ob die Schaar $\varphi = a$ die inf. Transformation $\xi p + \eta q = A(f)$ gestattet, so setzen wir (Nr. 14.)

$$B(f) = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial \xi}{\partial y}\right]\frac{\partial f}{\partial y'}$$

und verlangen, dass die Gleichung

$$B(\psi) = 0 = \xi\frac{\partial \psi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \psi}{\partial y} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial \xi}{\partial y}\right]\frac{\partial \psi}{\partial y'}$$

mit $\psi = 0$ identisch sein soll. Ist diese Forderung erfüllt, was darauf hinauskommt, dass die durch Elimination von y' zwischen $\psi = 0$ und $B(\psi) = 0$ hervorgehende Gleichung identisch stattfindet, dann und nur dann gestattet die Differentialgleichung $\psi = 0$ die inf. Transformation $A(f)$. Die hierdurch gefundene Bedingungsgleichung reducirt sich selbstverständlicherweise, wenn ψ die Form $Xy' - Y$ besitzt, auf die Gleichung (9).

23. Zu einer vorgelegten inf. Transformation $A(f)$ gehören unbeschränkt viele Curvenschaaren $\varphi = a$, die die Transformation gestatten. Man findet dieselben, wenn man in der Gleichung

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Omega(\varphi)$$

die Function Ω beliebig wählt, und sodann eine beliebige Lösung φ dieser Gleichung gleich der Constante a setzt.

Auch zu einer jeden zweigliedrigen Gruppe $A_1(f)$, $A_2(f)$, wo

$$A_1(A_2(f)) - A_2(A_1(f)) = c_1 A_1(f) + c_2 A_2(f) \tag{10}$$

ist, gehören unbeschränkt viele invariante Curvenschaaren. Wir beschränken uns darauf *eine* solche anzugeben. Nehmen wir zunächst an, dass c_1 und c_2 beide gleich Null sind. Ist ψ eine beliebige Lösung von $A_1(f) = 0$, so kommt (10)

$$A_1(A_2(\psi)) = 0,$$

woraus folgt, dass auch $A_2(\psi)$ eine Lösung von $A_1(f) = 0$ ist, und dass folglich eine Relation der Form

$$A_2(\psi) = \Omega(\psi)$$

stattfindet. Hiermit ist gezeigt, dass die Curvenschaar $\psi = a =$ Const. sowohl die Transformation $A_2(f)$ wie die Transformation $A_1(f)$ gestattet. — Sind andererseits die Constanten c_1 und c_2 nicht beide gleich Null, so können wir immer ohne wesentliche Beschränkung $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ und also

$$A_1(A_2(f)) - A_2(A_1(f)) = A_1(f) .$$

setzen. Bezeichnet man sodann eine Lösung von $A_1(f) = 0$ mit ψ, so kommt wiederum

$$A_1(A_2(\psi)) = 0,$$

was wie früher heisst, dass die Curvenschaar $\psi = a$ die *beiden* infinitesimalen Transformationen gestattet.

24. *Zu einer dreigliedrigen Gruppe $A_1(f)$, $A_2(f)$, $A_3(f)$ gehört immer eine, und im Allgemeinen nur eine invariante Curvenschaar,* wie jetzt gezeigt werden soll.

Ich setze

$$A_i(f) = \xi_i p + \eta_i q, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

bilde sodann die Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \\ \xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial \eta_3}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_3}{\partial y} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \Delta$$

und behaupte, dass die Gleichung $\Delta = 0$ eine bei der Gruppe invariante Differentialgleichung darstellt, dabei vorausgesetzt, dass diese Gleichung nicht für jedes Werthsystem xyy' identisch stattfindet.

Setze ich

$$\xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\right] \frac{\partial f}{\partial y'} = B_i(f),$$

so kommt meine Behauptung nach den Entwickelungen am Schlusse der vorangehenden Nummer darauf hinaus, dass die drei Gleichungen $B_q(\Delta) = 0$ vermöge $\Delta = 0$ identisch bestehen. Setzen wir z. B. $q = 2$ und

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = \zeta_i,$$

so ist

$$B_2\Delta = \begin{vmatrix} B_2\xi_1 & B_2\eta_1 & B_2\zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ B_2\xi_2 & B_2\eta_2 & B_2\zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ B_2\xi_3 & B_2\eta_3 & B_2\zeta_3 \end{vmatrix}.$$

Nun aber bestehen (Satz 9.) Relationen der Form

$$\begin{aligned} B_2\xi_1 &= B_1\xi_2 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3, \\ B_2\eta_1 &= B_1\eta_2 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3, \\ B_2\zeta_1 &= B_1\zeta_2 + c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2 + c_3\zeta_3, \\[6pt] B_2\xi_3 &= B_3\xi_2 + d_1\xi_1 + d_2\xi_2 + d_3\xi_3, \\ B_2\eta_3 &= B_3\eta_2 + d_1\eta_1 + d_2\eta_2 + d_3\eta_3, \\ B_2\zeta_3 &= B_3\zeta_2 + d_1\zeta_1 + d_2\zeta_2 + d_3\zeta_3, \end{aligned}$$

wo die Grössen c und d Constanten sind. Durch Einführung dieser Werthe kommt

$$B_2(\Delta) = (c_1 + d_3)\,\Delta + \begin{vmatrix} B_1\xi_2 & B_1\eta_2 & B_1\zeta_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ B_2\xi_2 & B_2\eta_2 & B_2\zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ B_3\xi_2 & B_3\eta_2 & B_3\zeta_2 \end{vmatrix}.$$

Jetzt ist

$$B_i\xi_2 = A_i\xi_2,\ B_i\eta_2 = A_i\eta_2,$$
$$B_i\zeta_2 = A_i\zeta_2 + \left(\frac{\partial\eta_2}{\partial y} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x} - 2y'\frac{\partial\xi_2}{\partial y}\right)'\zeta_i,$$

und also wird

$$B_2(\Delta) = (c_1 + d_3)\Delta + \left(\frac{\partial\eta_2}{\partial y} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x} - 2y'\frac{\partial\xi_2}{\partial y}\right)\Delta$$
$$+\begin{vmatrix} A_1\xi_2 & A_1\eta_2 & A_1\zeta_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ A_2\xi_2 & A_2\eta_2 & A_2\zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ A_3\xi_2 & A_3\eta_2 & A_3\zeta_2 \end{vmatrix}$$

Um die Summe der drei letzten Determinanten zu bestimmen, entwickeln wir jede Determinante nach den Grössen $A_i\xi_2$, $A_i\eta_2$, $A_i\zeta_2$, und fassen sodann diejenigen Glieder, die bezüglich den Factor $\frac{\partial\xi_2}{\partial x}$, $\frac{\partial\xi_2}{\partial y}$, $\frac{\partial\eta_2}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta_2}{\partial y}$, $\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}$ oder $\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}$ enthalten, zusammen. Hierdurch erhalten die beiden Grössen $\frac{\partial\xi_2}{\partial x}$ und $\frac{\partial\eta_2}{\partial y}$ den gemeinsamen Coefficient Δ; während die Coefficienten der Grössen $\frac{\partial\xi_2}{\partial y}$, $\frac{\partial\eta_2}{\partial x}$, $\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}$, $\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}$ sämmtlich verschwinden. Schliesslich kommt somit

$$B_2(\Delta) = \left(c_1 + d_3 + 2\frac{\partial\eta_2}{\partial y} - 2y'\frac{\partial\xi_2}{\partial y}\right)\Delta,$$

sodass $B_2(\Delta)$ wirklich gleichzeitig mit Δ verschwindet. Hiermit ist nachgewiesen, dass die Differentialgleichung $\Delta = 0$ die inf. Transformation $B_2(f)$ gestattet, und in entsprechender Weise erkennt man, dass sie zugleich die Transformationen $B_1(f)$ und $B_3(f)$ gestattet.

Nehmen wir jetzt an, dass die Determinante Δ für jedes Werthsystem xyy' identisch verschwindet. Alsdann besteht entweder eine oder vielleicht auch zwei Gleichungen von der Form

$$\sum_k \varphi_k(xyy')\left[\xi_k\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k\frac{\partial f}{\partial y'}\right] = 0 = \sum \varphi_k B_k(f).$$

Es ist aber leicht zu erkennen, dass *zwei* solche Gleichungen nicht stattfinden können. Denn durch Elimination von $B_3(f)$ erhielte man dann eine Gleichung

$$\varphi_1 B_1(f) + \varphi_2 B_2(f) = 0,$$

die sich in die drei folgenden zerlegte

$$\varphi_1\xi_1 + \varphi_2\xi_2 = 0,$$
$$\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 = 0,$$
$$\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 = 0;$$

und da die Grössen $\xi_1\eta_1$ wie auch die Grössen $\xi_2\eta_2$ nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, und dabei nur von x und y abhängen, können wir immer annehmen, dass φ_1 und φ_2 nur von x und y abhängen.

Wir können sogar ohne wesentliche Beschränkung z. B. φ_2 gleich -1 setzen. Dann aber kommt

$$\xi_2 = \varphi(xy)\xi_1, \qquad \eta_2 = \varphi \cdot \eta_1,$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = \varphi\left\{\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right\},$$

woraus folgt

$$\eta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \eta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \xi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \xi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0;$$

und da ξ_1 und η_1 nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, erkennen wir, dass φ jedenfalls eine Constante sein müsste, was indess durch die Unabhängigkeit der Transformationen $B_1(f)$ und $B_2(f)$ ausgeschlossen ist. Hiermit ist nachgewiesen, dass nie mehr als eine Relation der Form $\Sigma \varphi_k B_k(f) = 0$ stattfinden kann. — Besteht *eine* solche Gleichung, so bilden die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen

$$B_1(f) = 0 \qquad B_2(f) = 0$$

ein vollständiges System, dem auch die Gleichung $B_3(f) = 0$ angehört. Ist $\psi(xyy')$ eine Lösung desselben, was darauf hinauskommt, dass $B_1(\psi) = B_2(\psi) = B_3(\psi) = 0$ ist, so gestattet jede Differentialgleichung der Form $\psi(xyy') = a =$ Const. die drei inf. Transformationen $B_1(f)$, $B_2(f)$ und $B_3(f)$. In diesem Falle giebt es somit einfach unendlich viele bei der Gruppe invariante Curvenschaaren. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass der Fall eintreten kann, dass die Grösse ψ von y' unabhängig ist. In diesem Ausnahmfalle ist $\psi = a$ nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche keine Differentialgleichung, und daher finden wir jetzt nur die einzige invariante Curvenschaar $\psi(xy) = a$.

Es lässt sich zeigen, dass wenn Δ nicht identisch verschwindet, dass dann $\Delta = 0$ die einzige bei unserer dreigliedrigen Gruppe invariante Differentialgleichung erster Ordnung darstellt. Ist nämlich $\varphi(xy) = a$ eine beliebige invariante Curvenschaar, so bestehen drei Gleichungen der Form

$$\xi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Omega_k(\varphi),$$

woraus durch Differentiation

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \eta_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d\Omega_k}{d\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \xi_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \eta_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \eta_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d\Omega_k}{d\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \xi_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \eta_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

und durch Elimination der Grösse $\frac{d\Omega_k}{d\varphi}$:

$$- \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x} - \frac{\partial \eta_k}{\partial y}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \eta_k}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2$$
$$= \xi_k \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \eta_k \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

In Folge dessen besteht immer die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial y}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \\ \xi_2 & \eta_2 & - \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_2}{\partial y}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \\ \xi_3 & \eta_3 & - \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x} - \frac{\partial \eta_3}{\partial y}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \eta_3}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

was wieder heisst, dass $\varphi = a$ ein Integral der Gleichung $\Delta = 0$ ist.

Hiermit ist der folgende Satz erwiesen:

Satz 14. *Jede dreigliedrige Gruppe lässt eine und im Allgemeinen nur eine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant.*

25. Sei jetzt vorgelegt eine beliebige Gruppe

$$A_1(f)\ A_2(f) \cdots A_r(f).$$

Soll eine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ drei Transformationen der Gruppe etwa $A_i(f)$, $A_j(f)$ und $A_q(f)$ gestatten, so erkennt man, indem man genau wie im Schlusse der vorangehenden Nummer verfährt, dass φ ein Integral der Gleichung

$$\left(\xi_i\ \eta_j\ \frac{\partial \eta_q}{\partial x} + y' \left(\frac{\partial \eta_q}{\partial y} - \frac{\partial \xi_q}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_q}{\partial y}\right) = 0 = \Delta_{ijq}$$

sein muss. Soll die Schaar $\varphi = a$ insbesondere alle Transformationen der Gruppe gestatten, so muss φ ein gemeinsames Integral aller Gleichungen $\Delta_{ijq} = 0$ sein.

Es lässt sich umgekehrt zeigen, dass, wenn alle Gleichungen $\Delta_{ijq} = 0$ ein gemeinsames Integral φ besitzen, alsdann $\varphi = a$ eine bei der Gruppe invariante Curvenschaar darstellt.

Verfährt man in der That genau wie im Anfange der vorangehenden Nummer, so bringt man den Ausdruck $B_\varrho \Delta_{ijk}$ auf die Form

$$\sum \sum \sum c_{uvw} \Delta_{uvw} + 2 \left(\frac{\partial \eta_\varrho}{\partial y} - y' \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial y}\right) \Delta_{ijq},$$

wo die Grössen c_{uvw} gewisse Constanten sind. Hiermit erhalten wir den Satz:

Satz 15. *Soll die Gruppe $A_1(f) \cdots A_r(f)$ eine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant lassen, so ist hierzu erforderlich und hinreichend, dass φ ein gemeinsames Integral aller Gleichungen $\Delta_{ijq} = 0$ ist.*

Verschwinden alle Δ_{ijq} identisch, so müssen die Betrachtungen dieser Nummer modificirt werden. Indem man wie in der vorangehenden Nummer verfährt, erkennt man, dass zwei unter den linearen partiellen Gleichungen

$$\xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 = B_k(f)$$

ein vollständiges System bilden, dem alle übrigen Gleichungen $B_k(f) = 0$ angehören. Ist $\psi(xyy')$ eine Lösung desselben, so ist jede Differentialgleichung der Form $\psi =$ Const. invariant bei der Gruppe. Ist insbesondere ψ unabhängig von y', so ist $\psi = a$ eine invariante Curvenschaar.

§ 11.

Die inf. Transformationen 1. O. entscheiden, ob eine invariante Curvenschaar existirt.

Wenn man zu entscheiden wünscht, ob eine vorgelegte Gruppe eine Curvenschaar invariant lässt, so genügt es, wie jetzt gezeigt werden soll, ihre unabhängigen inf. Transformationen nullter und erster Ordnung in der Umgebung eines Punkts $x_0 y_0$ allgemeiner Lage zu betrachten.

26. Nach den Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen soll man nämlich in allen möglichen Weisen die *drei* inf. Transformationen der Gruppe entsprechende Gleichung $\Delta_{ijq} = 0$ bilden, und sodann untersuchen, ob alle diese Gleichungen für beliebig gewählte Werthe $x = x_0$ und $y = y_0$ durch denselben Werth von y' befriedigt werden. Denken wir uns alle Grössen ξ und η nach den Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickelt, so verschwindet Δ_{ijq} bei der Substitution $x = x_0$, $y = y_0$ jedesmal, wenn *eine* der Transformationen $A_i(f)$, $A_j(f)$, $A_q(f)$ von zweiter oder höherer Ordnung ist; ebenso wenn *zwei* unter diesen Transformationen von erster Ordnung sind. Enthält daher die Gruppe weniger als *zwei* unabhängige inf. Transformationen nullter Ordnung, so verschwinden alle Δ_{ijq} identisch.*) Wir können daher annehmen, dass unsere Gruppe in der Umgebung des Punktes $x_0 y_0$ zwei unabhängige inf. Transformationen nullter Ordnung der Form

$$A_1(f) = p + \cdots, \qquad A_2(f) = q + \cdots$$

enthält; und wollen annehmen, dass es ϱ unabhängige inf. Transformationen erster Ordnung

$$[a_k(x-x_0) + b_k(y-y_0)]p + [\alpha_k(x-x_0) + \beta_k(y-y_0)]q + \cdots (k = 1, 2 \cdots \varrho)$$

---

*) Geometrisch ausgedrückt kommt dieser Fall, wie man leicht einsieht, darauf hinaus, dass es ∞^1 Curven giebt, deren *jede* bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleibt.

giebt; wobei ϱ nicht grösser als 4 sein kann. Wir bilden die ϱ Ausdrücke Δ_{12k}, die durch successive Verbindung der Transformationen $A_1(f)$ und $A_2(f)$ mit einer Transformation erster Ordnung hervorgehen. Setzen wir sodann $x = x_0$, $y = y_0$, so kommt

$$\Delta_{12k}^{(0)} = \alpha_k + y'(\beta_k - a_k) - y'^2 b_k.$$

Soll die Gruppe eine Curvenschaar invariant lassen, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass die ϱ Gleichungen

$$\alpha_k + y'(\beta_k - a_k) - y'^2 b_k = 0 \tag{10}$$

durch einen gemeinsamen Werth von y' befriedigt werden.

27. Enthält die Gruppe vier inf. Transformationen erster Ordnung, die somit die Form

$$(x-x_0)p + \cdots, \quad (y-y_0)p + \cdots, \quad (x-x_0)q + \cdots, \quad (y-y_0)q + \cdots$$

erhalten können, so müssten die vier Gleichungen (10)

$$-y' = 0, \quad -y'^2 = 0, \quad 1 = 0, \quad y' = 0$$

gleichzeitig bestehen, was an sich unmöglich ist. *Eine Gruppe mit vier unabhängigen inf. Transformationen lässt daher keine Curvenschaar invariant.*

Enthält die Gruppe drei unabhängige Transformationen erster Ordnung, unter denen sich keine der Form

$$(x-x_0)p + (y-y_0)q + \cdots$$

findet, so können diese Transformationen bekanntlich (Satz 13.) die Form

$$(x-x_0)q + \cdots, \quad (x-x_0)p - (y-y_0)q + \cdots, \quad (y-y_0)p + \cdots$$

erhalten. Und also erhält man die drei Gleichungen (10)

$$1 = 0, \quad 2y' = 0, \quad -y'^2 = 0,$$

die wiederum contradictorisch sind. *Eine Gruppe mit drei inf. Transformationen erster Ordnung, unter denen keine die Form*

$$(x-x_0)p + (y-y_0)q + \cdots$$

besitzt, lässt daher keine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant.

Nehmen wir jetzt an, dass eine Transformation erster Ordnung die Form $(x-x_0)p + (y-y_0)q + \cdots$ besitzt. Dann können wir nach den Entwickelungen am Schlusse der Nummer 21. immer annehmen, dass die beiden übrigen Transformationen erster Ordnung die Form

$$C_1(f) + \cdots = a_1[(x-x_0)p - (y-y_0)q] + b_1(y-y_0)p + \alpha_1(x-x_0)q + \cdots$$
$$C_2(f) + \cdots = a_2[(x-x_0)p - (y-y_0)q] + b_2(y-y_0)p + \alpha_2(x-x_0)q + \cdots$$

besitzen, und dass dabei die Relation

$$(11) \qquad C_1(C_2(f)) - C_2(C_1(f)) = C_1(f)$$

stattfindet. Jetzt reduciren sich die drei Gleichungen der Form (10) auf die beiden

$$\alpha_1 - 2a_1 y' - b_1 y'^2 = 0,$$
$$\alpha_2 - 2a_2 y' - b_2 y'^2 = 0;$$

und es fragt sich, ob diese Gleichungen durch einen gemeinsamen Werth von y' befriedigt werden, das heisst, ob die Relation

$$(12) \qquad 4(a_1\alpha_2 - \alpha_1 a_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) - (\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1)^2 = 0$$

stattfindet. Dies ist nun in der That immer der Fall. Denn die Gleichung (11) zerlegt sich in die drei

$$(13) \qquad \begin{cases} \alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1 = a_1 \\ 2(b_1 a_2 - b_2 a_1) = b_1 \\ 2(a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1) = \alpha_1, \end{cases}$$

und wenn man dieselben bez. mit $2a_1$, α_1 und b_1 multiplicirt, und sie dann addirt, so folgt

$$\alpha_1 b_1 + a_1^2 = 0,$$

welche Gleichung durch neue Benutzung der Relationen (13) in (12) übergeht. *Eine Gruppe mit drei unabhängigen inf. Transformationen erster Ordnung, unter denen eine die Form $(x-x_0)p + (y-y_0)q + \cdots$ besitzt, lässt daher immer eine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant.*

Enthält eine Gruppe nur zwei unabhängige inf. Transformationen erster Ordnung, so sind zwei Fälle denkbar. Besitzt keine dieser Transformationen die Form $(x-x_0)p + (y-y_0)q + \cdots$, so haben dieselben die Form

$$C_1(f) + \cdots = [a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0)]p + [\alpha_1(x-x_0) + \beta_1(y-y_0)]q + \cdots$$
$$C_2(f) + \cdots = [a_2(x-x_0) + b_2(y-y_0)]p + [\alpha_2(x-x_0) + \beta_2(y-y_0)]q + \cdots$$

und sind dabei, wie wir ohne Beschränkung annehmen können, durch die Gleichung

$$(14) \qquad C_1(C_2(f)) - C_2(C_1(f)) = C_1(f)$$

verbunden. Jetzt erhalten wir zwei Gleichungen der Form (10)

$$\alpha_1 + (\beta_1 - a_1)y' - b_1 y'^2 = 0,$$
$$\alpha_2 + (\beta_2 - a_2)y' - b_2 y'^2 = 0;$$

und es fragt sich, ob dieselben durch einen gemeinsamen Werth von y' befriedigt werden, das heisst, ob die Gleichung

$$(15) \qquad (a_1 - \beta_1, \alpha_2)(a_1 - \beta_1, b_2) - (\alpha_1, b_2)^2 = 0$$

besteht. Dies ist immer der Fall. Denn die Gleichung (14) zerlegt sich in die drei

$$(16)\qquad \begin{cases} (\alpha_1, b_2) = a_1 = -\beta_1 = \dfrac{a_1 - \beta_1}{2}, \\ (b_1, a_2 - \beta_2) = b_1, \\ (a_1 - \beta_1, \alpha_2) = \alpha_1, \end{cases}$$

und wenn man dieselben bez. mit $a_1 - \beta_1$, α_1 und b_1 multiplicirt und dann addirt, folgt

$$\alpha_1 b_1 + \frac{(a_1 - \beta_1)^2}{4} = 0,$$

welche Gleichung durch Benutzung der Relationen (16) in die Gleichung (15) übergeht. *Eine Gruppe mit zwei unabhängigen inf. Transformationen erster Ordnung, unter denen keine die Form*

$$(x - x_0)p + (y - y_0)q + \cdots$$

besitzt, lässt daher immer eine Curvenschaar invariant. — Enthält andererseits die vorgelegte Gruppe eine Transformation der Form $(x - x_0)p + (y - y_0)q + \cdots$, und ausserdem nur noch eine Transformation, so erhält man nur *eine* Gleichung der Form (10). Eine solche Gruppe lässt daher eine Curvenschaar invariant. Dasselbe ist offenbar auch der Fall mit jeder Gruppe, die entweder keine oder auch nur eine Transformation erster Ordnung enthält.

Die Entwicklungen dieses Paragraphen geben den folgenden fundamentalen Satz:

Satz 15. *Lässt eine Gruppe von Punkttransformationen der Ebene keine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder enthält die Gruppe vier unabhängige Transformationen erster Ordnung von der Form*

$$(x - x_0)p + \cdots, \quad (y - y_0)p + \cdots, \quad (x - x_0)q + \cdots, \quad (y - y_0)q + \cdots$$

Oder auch sie enthält drei solche Transformationen von der Form

$$(x - x_0)p - (y - y_0)q + \cdots, \quad (x - x_0)q + \cdots, \quad (y - y_0)p + \cdots.$$

§ 12.

Gruppen, die sämmtliche Curven einer Schaar $\varphi(xy) = a$ invariant lassen.

In diesem Paragraphen bestimmen wir alle Gruppen, die *sämmtliche* Curven einer Schaar $\varphi(xy) = a$ invariant lassen. Zunächst jedoch einige allgemeine Betrachtungen über Gruppen, die eine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ im Allgemeinen nur in dem Sinne invariant lassen, dass sie die Curven der Schaar unter einander vertauschen.

28. Sind $A_1(f)\ A_2(f) \cdots A_r(f)$ die inf. Transformationen einer solchen Gruppe, so drückt jedes $A_k(\varphi)$ sich als Function von φ aus

$$A_k(\varphi) = \xi_k(\varphi).$$

Führen wir daher φ als neues x ein, so erhalten die $A_k(f)$ die Form

$$A_k(f) = \xi_k(x)\,p + \eta_k(xy)\,q\,.$$

Die Relationen

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f) = \sum_s c_{iks} A_s(f)$$

geben insbesondere $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Relationen der Form

$$\xi_i \frac{d\xi_k}{dx} - \xi_k \frac{d\xi_i}{dx} = \sum_s c_{iks}\xi_s\,.$$

Setzen wir daher

$$\xi_k(x)\,p = B_k(f)$$

und fassen dabei die $B_k(f)$ als inf. Transformationen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit x auf, so kommt

$$B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f)) = \sum_s c_{iks} B_s f,$$

was darauf hinauskommt, dass die $B_k(f)$ eine Gruppe bilden. In Folge dessen ist es nach den Entwickelungen des ersten Abschnittes immer möglich eine solche Function von x als neues x einzuführen, dass die $B_k(f)$ die Form

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,p$$

annehmen, und dabei eine lineare Gruppe bilden.

Es können nun vier verschiedene Fälle eintreten, indem die $B_k(f)$ eine nullgliedrige, eingliedrige, zweigliedrige oder dreigliedrige Gruppe bilden können. Und das Problem alle Gruppen in der Ebene, die eine Curvenschaar invariant lassen, zu bestimmen, zerlegt sich in vier Probleme, die darauf hinauskommen, alle Gruppen, die den vier verschiedenen Möglichkeiten entsprechen, zu bestimmen. Es ist dabei möglich diese Probleme in einer solchen Reihenfolge zu behandeln, dass die Erledigung eines jeden Problems durch die Erledigung der vorangehenden Probleme wesentlich gefördert wird. Die inf. Transformationen einer jeden hierher gehörigen Gruppe können nämlich die Form

$$A(f) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,p + \eta q$$

annehmen. Hat nun die Gruppe mehr als eine, etwa r Transformationen, so enthält sie jedenfalls $r - 1$ Transformationen der Form

$$B(f) = (b_0 + b_1 x)\,p + \eta q\,,$$

und dabei sind die $B_k(f)$ offenbar paarweise durch Relationen von der Form

$$B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f)) = \Sigma\, b_{iks} B_s(f)$$

verbunden. Es giebt ferner jedenfalls $r-2$ inf. Transformationen von der Form

$$C(f) = c_0 p + \eta q\,,$$

die paarweise Relationen von der Form

$$C_i(C_k(f)) - C_k(C_i(f)) = \Sigma\, c_{iks} C_0(f)$$

erfüllen. Und endlich giebt es jedenfalls $r-3$ inf. Transformationen von der Form

$$D(f) = \eta(xy)\, q\,,$$

die wiederum paarweise Relationen von der Form

$$D_i(D_k(f) - D_k(D_i(f)) = \Sigma\, d_{iks} D_s(f)$$

erfüllen.

Hiermit ergiebt sich die folgende Methode zur Erledigung unseres allgemeinen Problems. Zunächst suchen wir die allgemeinste ϱ-gliedrige Schaar von Transformationen der Form $D_k(f) = \eta_k q$, die paarweise Relationen von der Form

$$D_i(D_k(f)) - D_k(D_i(f)) = \Sigma\, d_{iks} D_s(f)$$

erfüllen. Darnach suchen wir in allgemeinster Weise *eine* hinzutretende inf. Transformation der Form $C(f) = p + \eta_0 q$, die ϱ Relationen der Form

$$C(D_k(f)) - D_k(C(f)) = \sum_s c_{ks} D_s(f)$$

befriedigt, wobei wir hervorheben, dass die Grösse $C(f)$ auf der rechten Seite dieser Gleichungen nicht auftreten kann. Sodann suchen wir in allgemeinster Weise eine inf. Transformation der Form $B(f) = xp + \eta_1 q$, die $\varrho + 1$ Relationen der Form

$$B(D_k(f)) - D_k(B(f)) = \sum_s b_{ks} D_s(f)$$

$$B(C(f)) - C(B(f)) = -Cf + \sum_s \gamma_s D_s(f)$$

erfüllt. Und endlich suchen wir in allgemeinster Weise eine inf. Transformation der Form $A(f) = x^2 p + \eta_2 q$, die $\varrho + 2$ Relationen der Form

$$\begin{aligned} A(D_k(f)) - D_k(A(f)) &= \Sigma\, \alpha_{ks} D_s(f) \\ A(C(f)) - C(A(f)) &= -2B(f) + \Sigma\, \beta_s D_s(f) \\ A(B(f)) - B(A(f)) &= -A(f) + \Sigma\, \delta_s D_s(f) \end{aligned}$$

erfüllt.

Nachdem alle diese Bestimmungen ausgeführt sind, verificiren wir, dass alle Schaaren von inf. Transformationen, die wir in dieser Weise erhalten haben, wirklich jedesmal eine Gruppe endlicher Transformationen bestimmen.

29. Sei jetzt vorgelegt eine beliebige Schaar Transformationen der Form $D_k(f) = \eta_k q$, die paarweise Relationen der Form

$$D_i(D_k(f)) - D_k(D_i(f)) = \Sigma c_{iks} D_s(f)$$

erfüllen. Unter denselben wählen wir die $r-1$ unabhängigen inf. Transformationen $D'_1(f) \cdots D'_{r-1}(f)$, die in der Umgebung eines Punkts $x_0 y_0$ allgemeiner Lage von erster oder höherer Ordnung sind. Und da jeder Ausdruck $D'_i(D'_k(f)) - D'_k(D'_i(f))$ jedenfalls von erster Ordnung ist, so erkennen wir, dass ein solcher Ausdruck sich immer als Summe der $D'_i(f)$, multiplicirt mit passenden Constanten, darstellen lässt. So folgt

Satz 16. *Wenn r inf. Transformationen von der Form $D_k(f) = \eta_k q$ paarweise Relationen von der Form $D_i(D_k(f)) - D_k(D_i(f)) = \Sigma c_{iks} D_s(f)$ erfüllen, so giebt es unter ihnen immer $r-1$ unabhängige Transformationen $D'_k(f)$, die paarweise Relationen der entsprechenden Form $D'_i(D'_k(f)) - D'_k(D'_i(f)) = \Sigma d_{iks} D'_s(f)$ erfüllen.*

Vermöge dieses Satzes können wir die allgemeinste Gruppe der Form $\eta_k q$ in der folgenden Weise bestimmen. Wir nehmen zuerst die allgemeinste inf. Transformation der Form $D_1(f) = \eta_1(xy)q$; bestimmen sodann in allgemeinster Weise eine inf. Transformation $D_2 f = \eta_2(xy)q$, die eine Relation der Form

$$D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = a_1 D_1(f) + a_2 D_2(f)$$

erfüllt. Sodann bestimmen wir die allgemeinste Transformation $D_3(f) = \eta_3 q$, die zwei Relationen der Form

$$D_1(D_3(f)) - D_3(D_1(f)) = b_1 D_1 + b_2 D_2 + b_3 D_3,$$
$$D_2(D_3(f)) - D_3(D_2(f)) = c_1 D_1 + c_2 D_2 + c_3 D_3,$$

erfüllt; u. s. w.

30. Eine inf. Transformation von der Form $\eta_1 q$ kann durch Einführung einer zweckmässigen Function von x und y als neues y immer etwa die Form $X_1(x)q$ erhalten, wobei X_1 eine ganz beliebige Function von x bezeichnet. Um jetzt die allgemeinste zweigliedrige Schaar

$$D_1(f) = \eta_1 q, \qquad D_2(f) = \eta_2 q$$

zu bestimmen, bemerken wir, dass die zwischen D_1 und D_2 bestehende Relation durch passende Wahl von D_1 und D_2 die Form

$$D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = \varepsilon D_1(f)$$

annehmen kann; und dabei kann die Grösse ε, wenn sie nicht verschwindet, gleich 1 gesetzt werden. Wir können ferner durch Einführung einer zweckmässigen Function von x und y als neues y, wie soeben, erreichen, dass D_1 die Form $X_1(x)q$ erhält. Und also erhalten wir zur Bestimmung von $D_2(f) = \eta q$ die Gleichung

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \varepsilon,$$

woraus

$$\eta = \varepsilon y + f(x).$$

Ist hier ε verschieden von Null, in welchem Falle ε gleich 1 gesetzt werden kann, so führen wir $y + f(x)$ als neues y ein. Hierdurch erhalten unsere beiden Transformationen die Form $X_1 q$, yq. *Es giebt somit nur zwei Typen von zweigliedrigen Schaaren der Form* $\eta_k q$ *nämlich*

$$\begin{vmatrix} X_1 q \\ X_2 q \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_1 q \\ yq \end{vmatrix}.$$

Ist $D_1 = X_1 q$, $D_2 = X_2 q$, $D_3 = \eta q$ eine Schaar von Transformationen, die Relationen der Form

$$(D_1 D_3) = a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3\,,$$
$$(D_2 D_3) = b_1 D_1 + b_2 D_2 + b_3 D_3$$

befriedigen, so giebt es jedenfalls eine Transformation $D = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2$, die zu D_3 in solcher Beziehung steht, dass $(D D_3)$ sich durch D_1 und D_2 ausdrückt; und offenbar können wir ohne Beschränkung annehmen, dass dies eben mit $(D_1 D_3)$ der Fall ist. So kommt

$$X_1 \frac{\partial \eta}{\partial y} = a_1 X_1 + a_2 X_2,$$
$$X_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 \eta,$$

welche Gleichungen zunächst befriedigt werden, wenn wir η gleich einer beliebigen Function von x setzen. Soll η zugleich von y abhängen, so muss wegen der ersten Gleichung die Grösse $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ eine Function von x sein, und somit muss in der letzten Gleichung b_3 gleich Null sein. Hieraus lässt sich nun schliessen, dass $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ eine Constante sein muss. Denn unsere Gleichungen zeigen, dass jeder Ausdruck

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2) \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

sich als lineare Function von X_1 und X_2 ausdrücken lässt:

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2) \frac{\partial \eta}{\partial y} = B_1 X_1 + B_2 X_2\,.$$

Ebenso ist

$$(B_1 X_1 + B_2 X_2) \frac{\partial \eta}{\partial y} = C_1 X_1 + C_2 X_2\,,$$

woraus

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = C_1 X_1 + C_2 X_2\,,$$

und im Allgemeinen

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^k = L_1 X_1 + L_2 X_2,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Setzt man z. B. $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, so erhält man drei Gleichungen der Form

$$X_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^0 = X_1 ,$$
$$X_1 \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 ,$$
$$X_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 ,$$

wo die rechten Seiten eo ipso durch eine lineare Relation mit constanten Coefficienten, die nicht sämmtlich verschwinden

$$\gamma_0 X_1 + \gamma_1 (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) + \gamma_2 (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2) = 0$$

verbunden sein müssen. Also kommt

$$X_1 \left(\gamma_0 + \gamma_1 \frac{\partial \eta}{\partial y} + \gamma_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right) = 0,$$

woraus folgt, dass $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ eine Constante ist. Und da diese Constante nach unserer früheren Voraussetzung von Null verschieden ist, so können wir

$$\eta = y + f(x)$$

oder ohne wesentliche Beschränkung $\eta = y$ setzen. *Die gefundene dreigliedrige Schaar von Transformationen hat die Form*

$$X_1 q, \qquad X_2 q, \qquad yq.$$

Seien jetzt q, yq, ηq drei Transformationen, die paarweise in der bekannten Beziehung stehen. Alsdann wird η bestimmt durch zwei Gleichungen der Form

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = a_0 + 2a_1 y + a_2 \eta,$$
$$y \frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta = b_0 + 2b_1 y + b_2 \eta.$$

Dabei ist leicht zu erkennen, dass a_2 gleich Null sein muss. Sonst nämlich fände man einerseits durch Elimination von $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, dass η eine rationale Function von y wäre, andererseits durch Integration der ersten Gleichung, dass η eine transcendente Function von y wäre. Wir setzen daher $a_2 = 0$ und finden sodann durch Integration der ersten Gleichung, dass η die Form

$$\eta = a_0 y + a_1 y^2 + f(x)$$

besitzt. Und da wir a_0 ohne Beschränkung gleich Null setzen können, kommt

$$\eta = a_1 y^2 + f(x).$$

Setzen wir diesen Werth in die zweite Bedingungsgleichung ein, so ergiebt sich, dass entweder a_1 oder $f(x)$ gleich Null sein muss, so dass

$$\eta = y^2 \qquad \text{oder} \qquad \eta = f(x)$$

wird. Indem wir dies mit dem Vorangehenden verbinden, erkennen wir, *dass die gesuchten dreigliedrigen Schaaren Transformationen eine der folgenden Formen besitzen:*

$$\left|\begin{array}{c} X_1 q \\ X_2 q \\ X_3 q \end{array}\right|, \qquad \left|\begin{array}{c} X_1 q \\ X_2 q \\ yq \end{array}\right|, \qquad \left|\begin{array}{c} q \\ yq \\ y^2 q \end{array}\right|.$$

31. Stehen vier inf. Transformationen der Form $q, yq, y^2q, \eta q$ paarweise in der bekannten Beziehung, so wird η bestimmt durch drei Relationen der Form

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = a_0 + 2a_1 y + 3a_2 y^2 + a_3 \eta,$$

$$y \frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta = b_0 + 2b_1 y + 3b_2 y^2 + b_3 \eta,$$

$$y^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} - 2y\eta = c_0 + 2c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 \eta,$$

und dabei erkennen wir, wie soeben, dass a_3 gleich Null sein muss, indem die entgegengesetzte Annahme zu Widerspruch führen würde. Also erhält η durch Integration der ersten Gleichung die Form

$$\eta = a_0 y + a_1 y^2 + a_3 y^3 + f(x),$$

wobei a_0 und a_1 ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden können:

$$\eta = a_3 y^3 + f(x).$$

Die zweite Bedingungsgleichung zeigt, dass η entweder gleich y^3 oder gleich $f(x)$ sein muss. Da indess wegen der dritten Bedingungsgleichung diese beiden Formen unmöglich sind, so schliessen wir, *dass keine viergliedrige Schaar die Form $q, yq, y^2q, \eta q$ besitzen kann.*

Wir suchen jetzt in allgemeinster Weise $r + 1$ inf. Transformationen von der Form

$$X_1 q, \quad X_2 q \cdots X_r q, \quad \eta q,$$

die paarweise in der bekannten Beziehung stehen. Indem wir ganz wie früher in dem Falle $r = 2$ verfahren, erhalten wir zur Bestimmung von η r Gleichungen der Form

$$X_1 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Sigma \alpha_i X_i,$$

$$X_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Sigma \beta_i X_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{r-1} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Sigma \lambda_i X_i,$$

$$X_r \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Sigma \mu_i X_i + \mu \eta,$$

wo μ überdies gleich Null sein muss, indem die entgegengesetzte Annahme wiederum zu Widerspruch führen würde. Folglich besteht, was auch die Constanten $A_1 \cdots A_r$ sein mögen, immer eine Relation der Form

$$(A_1 X_1 + \cdots + A_r X_r) \frac{\partial \eta}{\partial y} = B_1 X_1 + \cdots + B_r X_r.$$

Insbesondere ist

$$(B_1 X_1 + \cdots + B_r X_r) \frac{\partial \eta}{\partial y} = C_1 X_1 + \cdots + C_r X_r,$$

woraus

$$(A_1 X_1 + \cdots + A_r X_r) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = C_1 X_1 + \cdots + C_r X_r,$$

und im Allgemeinen

$$(A_1 X_1 + \cdots + A_r X_r) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^k = L_1 X_1 + \cdots + L_r X_r.$$

In dieser Gleichung gebe ich k successiv die Werthe $0, 1, 2 \ldots r$, und lasse dabei $A_1 A_2 \ldots A_r$ feste Grössen bezeichnen. Hierdurch erhalte ich $r+1$ Gleichungen, aus denen durch Elimination eine Gleichung der Form

$$(\Sigma A_i X_i) \left(k_0 + k_1 \frac{\partial \eta}{\partial y} + \cdots + k_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^r\right) = 0$$

hervorgeht. Also folgt

$$k_0 + k_1 \frac{\partial \eta}{\partial y} + \cdots + k_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^r = 0,$$

wo die Constanten k nur, wenn $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ gleich Null ist, sämmtlich verschwinden dürfen. Daher ist $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ jedenfalls eine Constante und

$$\eta = \alpha y + f(x),$$

sodass wir η entweder gleich y oder gleich $f(x)$ setzen können. *Wir finden daher nur die beiden Schaaren*

$$X_1 q \;\; X_2 q \cdots X_r q \;\; y q,$$
$$X_1 q \;\; X_2 q \cdots X_r q \;\; X_{r+1} q,$$

Endlich suchen wir in allgemeinster Weise $r+2$ inf. Transformationen der Form

$$X_1 q \;\; X_2 q \cdots X_r q \;\; y q \;\; \eta q, \quad (r > 1)$$

die paarweise Relationen von der bekannten Form befriedigen. Wir erhalten, da r grösser als 1 ist, jedenfalls zwei Relationen von der Form

$$X_1 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Sigma \alpha_i X_i + \alpha_0 y + \alpha \eta,$$

$$X_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Sigma \beta_i X_i + \beta_0 y + \beta \eta,$$

wo α ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Durch Integration der ersten Gleichung kommt daher

$$X_1 \eta = y \, \Sigma \, \alpha_i X_i + \frac{\alpha_0}{2} y^2 + f(x),$$

welchen Werth von η wir in die zweite Bedingungsgleichung substituiren. Setzen wir nun zunächst voraus, dass β von Null verschieden ist, so ergiebt sich, dass η die Form

$$\eta = \alpha_1 y + \varphi(x)$$

besitzt, und dabei kann α_1 ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden. *Die Hypothese $\beta \gtrless 0$ giebt somit eine $(r+2)$gliedrige Schaar, die dieselbe Form wie die vorgelegte $(r+1)$ gliedrige Schaar besitzt.* Wir können daher annehmen, dass β gleich Null ist. Durch Elimination von y zwischen den beiden Bedingungsgleichungen ergiebt sich, dass $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ nur von x abhängt. Und also erhalten wir r Bedingungsgleichungen der gemeinsamen Form

$$X_k \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Sigma \, c_{ks} X_s,$$

aus denen wie im vorangehenden Falle hervorgeht, dass η die Form $\alpha y + f(x)$ besitzt, wobei überdies α ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. *Unsere Schaar besitzt daher wieder dieselbe Form wie die vorgelegte $(r+1)$ gliedrige Schaar.*

Die vorangehenden Entwicklungen geben den allgemeinen Satz:

Satz 17. *Wenn eine Schaar inf. Transformationen der Form $\eta_k q$ paarweise die bekannten Relationen erfüllen, so hat sie eine der folgenden Formen*

$$\begin{vmatrix} X_1 q \\ X_2 q \\ \vdots \\ X_r q \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} X_1 q \\ X_2 q \\ \vdots \\ X_r q \\ yq \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} q \\ yq \\ y^2 q \end{vmatrix}.$$

32. Es fragt sich nun, ob die hiermit gefundenen Schaaren infinitesimaler Transformationen jedesmal eine Gruppe bestimmen. Diese Frage ist mit ja zu beantworten, wie jetzt gezeigt werden soll. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} y' &= y + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_r X_r \\ x' &= x \end{aligned}$$

bestimmen eine r-gliedrige Gruppe endlicher Transformationen, und die inf. Transformationen dieser Gruppe sind eben die r Grössen $X_k q$. Es ist ferner klar, dass die Gleichungen

$$y' = ay + a_1 X_1 + \cdots + a_r X_r,$$
$$x' = x$$

eine $(r+1)$-gliedrige Gruppe endlicher Transformationen bestimmen; die inf. Transformationen dieser Gruppe sind die $r+1$ Grössen $X_k q, yq$. Es ist endlich bekannt, dass die Gleichungen

$$x' = x, \quad y' = \frac{a_1 y + a_2}{a_3 y + 1}$$

eine dreigliedrige Gruppe mit den inf. Transformationen q, yq, $y^2 q$ bestimmen.

Hiermit ist also die allgemeine Bestimmung aller Gruppen in der Ebene, die sämmtliche Curven einer Schaar $\varphi(xy) = a$ invariant lassen, geleistet.

§ 13.

Einige Hülfstheorien.

In diesem Paragraphen entwickeln wir einen allgemeinen Satz über beliebige Transformationsgruppen. Zunächst einige Bemerkungen über *lineare* Gruppen.

33. Eine infinitesimale Transformation der Form

$$\sum_i \sum_k c_{ik} x_i p_k, \qquad (x_1 \cdots x_n \, p_1 \cdots p_n)$$

soll eine *lineare* Transformation heissen. Vermöge derselben erhalten die x_k die folgenden Incremente

$$\delta x_k = \left(\sum_i c_{ik} x_i\right) \delta t. \tag{13}$$

Führt man statt $x_1 \cdots x_n$ zweckmässige lineare homogene Functionen dieser Grössen als neue x ein, so kann man nach Cauchy's Untersuchungen über simultane Systeme der Form (13) immer erreichen, dass alle Grössen c_{ik}, deren i grösser als k ist, gleich Null werden. *Eine jede lineare inf. Transformation kann daher die Form*

$$c_{11} x_1 p_1 + (c_{12} x_1 + c_{22} x_2) p_2 + (c_{13} x_1 + c_{23} x_2 + c_{33} x_3) p_3 + \cdots$$
$$+ (c_{1q} x_1 + c_{2q} x_2 + \cdots + c_{qq} x_q) p_q + \cdots$$

erhalten.

34. Nehmen wir jetzt an, dass zwei lineare inf. Transformationen $A(f) = \Sigma \eta_i p_i$ und $B(f) = \Sigma \xi_i p_i$ in der Beziehung

$$A(B(f)) - B(A(f)) = A(f) \tag{14}$$

stehen. Wir werden zeigen, dass es dann immer möglich ist, statt $x_1 \cdots x_n$ solche neue unabhängige Variable einzuführen, dass $A(f)$ und $B(f)$ *gleichzeitig* eine bemerkenswerthe Form erhalten.

Wir bringen zuerst $A(f)$ auf die in der vorangehenden Nummer besprochene Form, sodass der Coefficient von p_1 die Form εx_1 erhält; dabei kann es gelegentlich kommen, dass noch mehrere Grössen η_k z. B. $\eta_2 \eta_3 \cdots \eta_q$ die entsprechende einfache Form εx_k erhalten, also

$$A(f) = \varepsilon(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_q p_q) + \eta_{q+1} p_{q+1} + \cdots + \eta_n p_n$$

wird. Wir können ohne Beschränkung annehmen, dass die Grösse $c_1 x_1 + \cdots + c_q x_q$ die allgemeinste lineare Function der x ist, die eine Relation der Form

$$A(\Sigma c_i x_i) = \varepsilon \, \Sigma c_i x_i$$

erfüllt.

Ich behaupte nun zunächst, dass ε gleich Null sein muss. Ist nämlich ε von Null verschieden, in welchem Falle ε ohne Beschränkung gleich 1 gesetzt werden kann, so lässt sich zeigen, dass die ganze Zahl n keinen endlichen Werth haben kann. Die Gleichung (14) zerlegt sich in die n Relationen

$$(15) \qquad A(\xi_i) - B(\eta_i) = \eta_i$$

und also befriedigen die q Grössen $\xi_1 \cdots \xi_q$ Relationen der Form

$$A(\xi_i) - \xi_i = x_i. \qquad (i = 1, 2 \cdots q).$$

Hieraus lässt sich nun schliessen, dass die Grössen $\xi_1 \cdots \xi_q$, $x_1 \cdots x_q$ unabhängig sein müssen. Bestände nämlich eine Relation der Form

$$\nu_1 \xi_1 + \cdots + \nu_q \xi_q + \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_q x_q = 0,$$

so käme durch Ausführung der Operation $A(\Sigma \nu_i \xi_i) + A(\Sigma \mu_i x_i) = 0$:

$$\nu_1(\xi_1 + x_1) + \cdots + \nu_q(\xi_q + x_q) + \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_q x_q = 0,$$

woraus die unmögliche Gleichung

$$\nu_1 x_1 + \cdots + \nu_q x_q = 0$$

folgen würde. Also ist *n jedenfalls so gross als $2q$*, und es ist daher erlaubt die Grössen $x_{q+1} \cdots x_{2q}$ bez. gleich $\xi_1 \cdots \xi_q$ zu setzen:

$$x_{q+1} = \xi_1 \cdots x_{2q} = \xi_q.$$

Durch Ausführung der Operation A kommt

$$A(x_{q+i}) = A(\xi_i) = \xi_i + x_i, \qquad (i = 1 \cdots q),$$

oder da $A(x_{q+i}) = \eta_{q+i}$ ist,

$$\eta_{q+i} = x_{q+i} + x_i, \qquad (i = 1 \cdots q).$$

Hiermit sind die n Grössen $\eta_{q+1} \cdots \eta_{2q}$ bestimmt. Nun aber ist

$$A(\xi_j) - B(\eta_j) = \eta_j,$$

und also befriedigen die n Grössen $\xi_{q+1} \cdots \xi_{2q}$ Relationen der Form

$$A(\xi_{q+i}) - \xi_{q+i} - \xi_i = \eta_{q+i} = x_{q+i} + x_i, \qquad (i = 1 \cdots q),$$

oder

$$A(\xi_{q+i}) = \xi_{q+i} + 2x_{q+i} + x_i, \qquad (i = 1 \cdots q),$$

woraus leicht hervorgeht, dass die Grössen $\xi_{q+1} \cdots \xi_{2q}\, x_1 \cdots x_q \cdots x_{2q}$ durch keine lineare Relation verbunden sein können. Also *ist n jedenfalls so gross wie* $3q$, und wir können ohne Beschränkung

$$x_{2q+1} = \xi_{q+1} \cdots \quad x_{3q} = \xi_{2q}$$

setzen. Durch Ausführung der Operation A kommt

$$A(x_{2q+i}) = A(\xi_{q+i}) = \xi_{q+i} + 2x_{q+i} + x_i, \quad (i = 1 \cdots q),$$

oder da $A(x_{2q+i}) = \eta_{2q+i}$ ist:

$$\eta_{2q+i} = x_{2q+i} + 2x_{q+i} + x_i, \quad (i = 1 \cdots q).$$

Indem man in ganz entsprechender Weise fortfährt, erkennt man, dass die Grössen $\xi_{2q+1} \cdots \xi_{3q}\, x_1 \cdots x_q \cdots x_{2q} \cdots x_{3q}$ unabhängig sind, und dass daher n jedenfalls so gross wie $4q$ ist u. s. w. Da nun n eine endliche Zahl sein soll, so erkennen wir, dass die früher besprochene Grösse ε gleich Null sein muss.

35. Wir können daher setzen

$$A(f) = 0 \cdot p_1 + \cdots + 0 \cdot p_q + \eta_{q+1}\, p_{q+1} + \cdots,$$
$$B(f) = \xi_1 p_1 + \cdots + \xi_q p_q + \xi_{q+1} p_{q+1} + \cdots,$$

und wegen (14) folgt:

$$A(\xi_1) = 0, \; A(\xi_2) = 0, \; \cdots, \; A(\xi_q) = 0,$$

woraus nach unseren früheren Voraussetzungen hervorgeht, dass $\xi_1 \cdots \xi_q$ nur von $x_1 \cdots x_q$ abhängen. Ich kann nun die Grösse x_{q+1} derart wählen, dass eine Relation der Form

$$A(x_{q+1}) = c_1 x_1 + \cdots + c_q x_q + c x_{q+1}$$

stattfindet; also ist zugleich

$$\eta_{q+1} = c_1 x_1 + \cdots + c_q x_q + c x_{q+1}.$$

Dabei ist leicht zu erkennen, dass die Grösse c gleich Null ist. Man beweist dies, indem man in $A(f)$ und $B(f)$ die Substitutionen

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; \cdots, \; x_q = 0$$

ausführt, und darnach auf die hervorgehenden Ausdrücke $A^{(0)}f$, $B^{(0)}f$ die, wenn c von Null verschieden ist, nicht gleich Null sein können, die Betrachtungen der vorangehenden Nummer anwendet.

Wir können daher setzen

$$A(x_{q+1}) = c_1 x_1 + \cdots + c_q x_q = \eta_{q+1},$$

und es ist denkbar, dass noch z. B. $\eta_{q+2} \cdots \eta_{q'}$ lineare Functionen von $x_1 \cdots x_q$ sind. Dabei können wir ohne Beschränkung annehmen, dass die Grösse

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_q x_q + \cdots + \alpha_{q'} x_{q'}$$

die allgemeinste ist, die eine Relation der Form

$$A(\Sigma \alpha_i x_i) = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_q x_q$$

befriedigt.

Wegen (14) bestehen dann $q' - q$ Relationen der Form

$$A(\xi_{b+i}) = \delta_1 x_1 + \cdots + \delta_q x_q; \quad (i = 1 \cdots q' - q),$$

also sind die Grössen $\xi_{q+1} \cdots \xi_{q'}$ Functionen von $x_1 \cdots x_q \cdots x_{q'}$.

In dieser Weise können wir nun weiter gehen. Wir wählen die Grösse $x_{q'+1}$ derart, dass eine Relation der Form

$$A(x_{q'+1}) = c_1 x_1 + \cdots + c_q x_q + \cdots + c_{q'} x_{q'} + c x_{q'+1}$$

stattfindet, und erkennen dabei wie früher, dass c gleich Null sein muss. Also wird

$$\eta_{q'+1} = c_1 x_1 + \cdots + c_{q'} x_{q'},$$

und es ist denkbar, dass noch weitere Grössen η, z. B. $\eta_{q'+2} \cdots \eta_{q''}$ diese Form besitzen. Dabei können wir ohne Beschränkung annehmen, dass die Gleichung

$$A(\varphi) = c_1 x_1 + \cdots + c_{q'} x_{q'}$$

in allgemeinster Weise durch die Annahme

$$\varphi = \delta_1 x_1 + \cdots + \delta_{q''} x_{q''}$$

erfüllt wird. Nun aber bestehen wegen (14) Relationen der Form

$$A(\xi_{q'+i}) = c_1 x_1 + \cdots + c_{q'} x_{q'},$$

und also sind $\xi_{q'+1} \cdots \xi_{q''}$ Functionen von $x_1 \cdots x_{q''}$ u. s. w.

Man kann daher immer eine solche Reihe wachsender Zahlen $q, q', q'', q''' \cdots n$ wählen, dass $\eta_1 \cdots \eta_q$ gleich Null sind, dass $\eta_{q+1} \cdots \eta_{q'}$ nur von $x_1 \cdots x_q$ abhängen, dass $\eta_{q'+1} \cdots \eta_{q''}$ nur von $x_1 \cdots x_{q'}$ abhängen u. s. w.; dass ferner gleichzeitig $\xi_1 \cdots \xi_q$ nur von $x_1 \cdots x_q$ abhängen, dass $\xi_{q+1} \cdots \xi_{q'}$ nur von $x_1 \cdots x_{q'}$ abhängen, dass $\xi_{q'+1} \cdots \xi_{q''}$ nur von $x_1 \cdots x_{q''}$ abhängen u. s. w.

36. Es bleibt jetzt nur noch übrig, einige einfache Transformationen auszuführen. Führen wir statt $x_1 \cdots x_q$ lineare Functionen dieser Grössen ein, so behalten die Transformationen $A(f)$ und $B(f)$ offenbar die soeben gefundene Form. Dabei können wir insbesondere erreichen, dass der Ausdruck $\xi_1 p_1 + \cdots + \xi_q p_q$, der nur von $x_1 \cdots x_q$, $p_1 \cdots p_q$ abhängt, die in Nummer 33. besprochene Form erhält. Sodann führen wir statt $x_{q+1} \cdots x_{q'}$ zweckmässige lineare Functionen von $x_{q+1} \cdots x_{q'}$ ein, und bringen dadurch den Ausdruck

$$\xi_1 p_1 + \cdots + \xi_q p_q + \cdots + \xi_{q'} p_{q'}$$

auf die kanonische Form der Nummer 33. u. s. w.

Indem wir in dieser Weise fortfahren, erhalten wir den Satz:

Satz 18. *Stehen zwei lineare Transformationen*

$$A(f) = \Sigma \eta_i p_i, \quad B(f) = \Sigma \xi_i p_i$$

in der Beziehung

$$A(B(f)) - B(A(f)) = A(f),$$

so ist es immer möglich, die unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_n$ in *solcher Weise zu wählen, dass jede Grösse* η_i *nur von* $x_1 \cdots x_{i-1}$ *abhängt, während jede Grösse* ξ_i *eine Function von* $x_1 \cdots x_{i-1}, x_i$ *wird.**)

37. Wir wenden uns jetzt zu ganz beliebigen Gruppen von Punkttransformationen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $x_1 \cdots x_n$.

Sind r inf. Transformationen $A_1(f), \cdots, A_r(f)$ paarweise durch Relationen der Form

$$(A_i A_k) = \sum_s c_{iks} A_s$$

verbunden, so sind die Constanten c_{iks}, wie jetzt gezeigt werden soll, durch eine Reihe Relationen verknüpft. Führt man in der That in die bekannte Jacobi'sche Identität

$$((A_i A_k) A_s) + ((A_k A_s) A_i) + ((A_s A_i) A_k) = 0$$

zuerst einmal die obenstehenden Werthe der Grössen $(A_\mu A_\nu)$ ein, und wendet sodann noch einmal dieselben Relationen an, so kommt schliesslich eine Gleichung der Form

$$C_1 A_1 + C_2 A_2 + \cdots + C_r A_r = 0,$$

in der die C_k Functionen der Grössen $c_{\mu\nu\varrho}$ sind. Und da die $A_k(f)$ unabhängige inf. Transformationen sind, folgt

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \cdots, C_r = 0,$$

oder entwickelt

$$\sum_\varrho (c_{ik\varrho} c_{\varrho s\sigma} + c_{ks\varrho} c_{\varrho i\sigma} + c_{si\varrho} c_{\varrho k\sigma}) = 0,$$

wo die i, k, s, σ vier beliebige unter den Zahlen $1, 2 \cdots r$ bezeichnen.

38. Seien wiederum $A_1(f) \cdots A_r(f)$ beliebige (das heisst nicht eben lineare) inf. Transformationen, die paarweise durch die Relationen

$$(A_i A_k) = \sum_s c_{iks} A_s$$

verbunden sind. Ich bilde die Ausdrücke

$$B_i(f) = \sum_s \frac{\partial f}{\partial x_s} \sum_k c_{isk} x_k$$

und behaupte, dass diese *linearen* inf. Transformationen durch die entsprechenden Relationen

$$(B_i B_j) = \sum_s c_{ijs} B_s$$

verbunden sind. Durch Ausführung kommt nämlich

*) Dieser Satz ist ohne Zweifel, wenn auch vielleicht in anderer Form, längst bekannt. Derselbe ist übrigens ein specieller Fall eines viel allgemeineren Theorems, das ich bei einer anderen Gelegenheit aufgestellt habe.

$$(B_i B_j) = \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial x_\sigma} \sum_s \sum_k (c_{j\sigma s} c_{isk} - c_{i\sigma s} c_{jsk}) x_k,$$

und unsere Behauptung ist, dass dieser Ausdruck auf die Form

$$\sum_s c_{ijs} \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial x_\sigma} \sum_k c_{s\sigma k} x_k$$

gebracht werden kann; oder was auf dasselbe hinauskommt, dass die Summe

$$\sum_s (c_{j\sigma s} c_{isk} - c_{i\sigma s} c_{jsk} - c_{ijs} c_{s\sigma k})$$
$$= - \sum_s (c_{j\sigma s} c_{sik} + c_{\sigma is} c_{sjk} + c_{ijs} c_{s\sigma k})$$

identisch verschwindet. In der vorangehenden Nummer sahen wir in der That, dass dies der Fall ist. So folgt:

Satz 19. *Sind r inf. Transformationen $A_1(f) \cdots A_r(f)$ verbunden durch die Relationen*

$$(A_i A_j) = \Sigma c_{ijs} A_s,$$

so befriedigen die linearen Ausdrücke

$$B_i = \sum_s \frac{\partial f}{\partial x_s} \sum_k c_{isk} x_k$$

die entsprechenden Relationen

$$(B_i B_j) = \Sigma c_{ijs} B_s.$$

Die Sätze 18. und 19., wie auch der in Nummer 33. aufgestellte bekannte Satz finden eine wichtige Anwendung in den beiden folgenden Paragraphen.

§ 14.

Bestimmung aller Gruppen, welche die Curven einer Schaar $\varphi(xy) = a$ eingliedrig transformiren.

Nunmehr bestimmen wir alle Schaaren von Transformationen der Form

$$\eta_1 q \quad \eta_2 q \cdots \eta_r q, \quad p + \eta q,$$

die paarweise in der bekannten Beziehung stehen. Dabei erinnern wir uns, dass die η_k eine von den in § 12. bestimmten Formen besitzen. Wir bemerken ferner, dass jede Grösse $(\eta_k q, p + \eta q)$ sich linear allein durch die $\eta_k q$ ausdrücken muss.

39. *Zunächst bestimmen wir alle Schaaren der Form q, yq, $y^2 q$, $p + \eta q$.* Die Grösse η ist bestimmt durch Gleichungen der Form

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = a_0 + 2a_1 y + 3a_2 y^2,$$
$$y \frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta = b_0 + 2b_1 y + 3b_2 y^2,$$
$$y^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} - 2y\eta = c_0 + 2c_1 y + 3c_2 y^2.$$

Die erste zeigt, dass

$$\eta = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + f(x)$$

ist, oder da a_0 und a_1 ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden können, dass

$$\eta = a_2 y^3 + f(x)$$

ist. Die beiden letzten Bedingungsgleichungen zeigen, dass $a_2 = f(x) = 0$ ist, so dass η gleich Null wird. Die gesuchte Schaar besitzt daher die Form:

$$q,\ yq,\ y^2 q,\ p.$$

40. *Sodann suchen wir alle Schaaren der Form*

$$X_1 q\ X_2 q \cdots X_r q,\quad p + \eta q.$$

Dabei können wir annehmen, dass r grösser als Null ist, indem die Annahme $r = 0$ nur die einzige Transformation $p + \eta q$ liefert, und diese erhält durch Einführung einer zweckmässigen Function von x und y als neues y die einfache Form p. Es bestehen sonach Gleichungen der Form

$$(X_k q,\ p + \eta q) = c_{k1} X_1 q + \cdots + c_{kr} X_r q.$$

Dabei ist es immer möglich, statt $X_1 \cdots X_r$ solche lineare Functionen dieser Grössen

$$X_i' = \alpha_{i1} X_1 + \cdots + \alpha_{ir} X_r$$

einzuführen, dass in den transformirten Gleichungen

(17) $$(X_k' q,\ p + \eta q) = c_{k1}' X_{1q}' + \cdots + c_{kr}' X_{rq}'$$

die transformirten Coefficienten c_{ki}' sehr einfache Werthe erhalten. Bezeichnen wir die Determinante $(\alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{rr})$ mit Δ und ihre Unterdeterminanten hinsichtlich α_{ik} mit β_{ik}, so ist bekanntlich

$$\Delta \cdot X_k = \beta_{1k} X_1' + \cdots + \beta_{rk} X_r',$$

und also kommt durch Berechnung

(18) $$c_{k\sigma}' = \frac{1}{\Delta} \sum_j \sum_\varrho \alpha_{kj}\, c_{j\varrho}\, \beta_{\sigma\varrho}.$$

Um uns bei der Discussion dieser complicirten Ausdrücke leicht zu orientiren, machen wir die folgenden Ueberlegungen. In der linearen inf. Transformation

$$B(f) = \sum_j \sum_\varrho \frac{\partial f}{\partial x_j} c_{j\varrho}\, x_\varrho$$

machen wir die Substitution

$$x_\varrho = \frac{1}{\Delta} \sum_\sigma \beta_{\sigma\varrho}\, x_\sigma'.$$

Hierdurch werden die x' folgendermassen als Functionen der x bestimmt:

$$x_i' = \sum_j \alpha_{ij} x_j,$$

und die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}$ werden transformirt durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_k \alpha_{kj} \frac{\partial f}{\partial x_k'}.$$

Also kommt

$$B(f) = \frac{1}{\Delta} \sum_j \sum_\varrho \sum_k \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial x_k'} \alpha_{kj} c_{j\varrho} \beta_{\sigma\varrho} x_\sigma',$$

und wenn wir

$$B(f) = \sum_k \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial x_k'} c_{k\sigma}' x_\sigma'$$

setzen, wird

$$c_{k\sigma}' = \frac{1}{\Delta} \sum_j \sum_\varrho \alpha_{kj} c_{j\varrho} \beta_{\sigma\varrho},$$

welche Formel genau mit (18) stimmt. Nun aber sahen wir in Nummer 33., dass eine jede lineare inf. Transformation $B(f)$ durch eine zweckmässige Einführung neuer Variabeln die Form

$$c_{11}' x_1' p_1' + (c_{21}' x_1' + c_{22}' x_2') p_2' + (c_{31}' x_1' + c_{32}' x_2' + c_{33}' x_3') p_3' \\ + (c_{q1}' x_1' \cdots + c_{qq}' x_q') p_q' + \cdots$$

erhalten kann. Und daher ist es möglich die Constanten α_{ik} derart zu wählen, dass die Grösse c_{ks}' immer verschwindet, wenn s grösser als k ist.

Hiermit erhalten wir den folgenden wichtigen Satz:

Satz 20. *Sind $r+1$ inf. Transformationen $X_1 q \cdots X_r q$, $p + \eta q$ durch die bekannten Relationen verbunden, so kann man ohne wesentliche Beschränkung annehmen, dass diese Relationen die folgende Form besitzen.*

$$\begin{aligned}
(X_1 q,\ p + \eta q) &= c_{11} X_1 q, \\
(X_2 q,\ p + \eta q) &= c_{21} X_1 q + c_{22} X_2 q, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
(X_k q,\ p + \eta q) &= c_{k1} X_1 q + \cdots + c_{kk} X_k q. \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung giebt

$$X_1 \frac{d\eta}{dy} - \frac{dX_1}{dx} = c_{11} X_1,$$

oder da wir X_1 ohne Beschränkung gleich 1 setzen können:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = c_{11}, \quad \eta = cy + f(x).$$

Um den gefundenen Werth von η noch einfacher zu machen, führen wir ein neues y ein, indem wir

$$y' = y + \varphi(x)$$

setzen. Dann kommt durch Differentiation

$$\delta y' = \delta y + \frac{d\varphi}{dx}\,\delta x,$$

woraus

$$p + \eta q = p + \left[c(y' - \varphi) + f + \frac{d\varphi}{dx}\right] q'.$$

Hier wählen wir $\varphi(x)$ derart, dass

$$\frac{d\varphi}{dx} + f - c\varphi = 0$$

wird, und also kommt

$$p + \eta q = p + c y' q'.$$

Bei dieser Variabelnänderung wird die Form der Transformationen $X_k q$ nicht geändert. *Die Schaar besitzt somit die Form*

$$q, \; X_2 q, \; X_3 q \cdots X_r q, \quad p + c y q;$$

dabei sind die X_k bestimmt als Functionen von x durch die integrirbaren Differentialgleichungen

$$\frac{dX_k}{dx} = a_{k1} X_1 + \cdots + a_{kk} X_k.$$

41. *Endlich suchen wir alle Schaaren der Form*

$$X_1 q, \; X_2 q, \; \cdots, \; X_r q, \; y q, \; p + \eta q.$$

Die Grösse $(X_k q,\, p + \eta q)$ drückt sich jedesmal als lineare Function der Grössen $X_k q$ und $y q$ aus. Also bestehen r Relationen von der Form

$$X_k \frac{d\eta}{dy} - \frac{dX_k}{dx} = \sum_i c_{ki} X_i + c_k y,$$

woraus

$$X_k \eta = y\left(\frac{dX_k}{dx} + \sum_i c_{ki} X_i\right) + \frac{c_k}{2} y^2 + f_k(x).$$

Andererseits finden wir durch Bildung des Ausdrucks $(y q,\, p + \eta q)$ eine Gleichung der Form

$$y \frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta = \sum_i \delta_i X_i + \delta y, \tag{20}$$

in welche wir den soeben gefundenen Werth von η einführen. Hierdurch ergiebt sich, dass alle c_k gleich Null sind, und dass daher r Gleichungen von der Form

$$(X_k q,\, p + \eta q) = c_{k1} X_1 q + \cdots + c_{kr} X_r q$$

stattfinden. Ersetzen wir hier die X_i durch zweckmässige lineare Functionen dieser Grössen, so erhalten wir wie in der vorangehenden Nummer die noch einfacheren Gleichungen

$$(X_k q,\, p + \eta q) = c_{k1} X_1 q + \cdots + c_{kk} X_k q.$$

Setzen wir daher wie dort $X_1 = 1$, so kommt

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = c_{11}, \quad \eta = c_{11} y + f(x),$$

wobei die Constante c_{11} ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Substituiren wir den Werth $\eta = f(x)$ in (20), so ergiebt sich, dass η als eine lineare Function der X_k gleich Null gesetzt werden kann. *Unsere inf. Transformationen besitzen daher die Form*

$$q, \; X_2 q, \; X_3 q \cdots X_r q, \; yq, \; p,$$

und dabei sind die X_k *bestimmt als Functionen von* x *durch die integrirbaren Differentialgleichungen*

$$\frac{dX_k}{dx} = c_{k1} X_1 + \cdots + c_{kk} X_k.$$

Die vorangehenden Entwickelungen dieses Paragraphen geben den folgenden Satz:

Satz 21. *Wenn eine Schaar inf. Transformationen der Form* $\eta_1 q, \cdots, \eta_r q, \; p + \eta q$ *paarweise in der bekannten Beziehung stehen, so haben dieselben eine der folgenden Formen:*

$$\begin{vmatrix} q \\ yq \\ y^2 q \\ p \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} q \\ X_2 q \\ \vdots \\ X_r q \\ p + \varepsilon yq \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} q \\ X_2 q \\ \vdots \\ X_r q \\ yq \\ p \end{vmatrix}$$

42. Es ist nun leicht zu verificiren, dass eine jede unter diesen Schaaren wirklich eine Gruppe endlicher Transformationen liefert:

1) *Die erste Schaar liefert die viergliedrige Gruppe*:

$$y' = \frac{a_1 y + a_2}{a_3 y + 1}, \quad x' = x + a_4.$$

2) *Die infinitesimale Transformation p liefert die eingliedrige Gruppe:*

$$y' = y, \quad x' = x + a.$$

3) *Die dritte Schaar liefert die* $(r+1)$*-gliedrige Gruppe:*

$$y' = ay + a_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_r X_r,$$
$$x' = x + \frac{1}{\varepsilon} \log a.$$

4) *Die vierte Schaar endlich liefert die* $(r+2)$*-gliedrige Gruppe:*

$$y' = ay + a_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_r X_r, \quad x' = x + a_0.$$

§ 15.

Gruppen, bei denen die Curven einer Schaar $\varphi(xy) = a$ zweigliedrig transformirt werden.

Wir bestimmen jetzt alle Schaaren inf. Transformationen der Form

$$\eta_1 q, \cdots, \eta_r q, \quad p + \eta_0 q, \quad xp + \eta q,$$

die paarweise in der bekannten Beziehung stehen.

43. *Es giebt zwei wesentlich verschiedene Schaaren der Form*

$$p, \ xp + \eta q.$$

Es ist nämlich jedenfalls

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \eta = f(y).$$

Ist dabei $f = 0$, so erhält man die Schaar p, xp. Ist f verschieden von Null, so kann man immer eine solche Function von y als neues y einführen, dass f gleich 1 wird. Man erhält also die beiden Formen

$$p, \ xp \quad \text{und} \quad p, \ xp + q.$$

44. *Zur Bestimmung aller Schaaren der Form*

$$q, \ yq, \ y^2 q, \ p, \ xp + \eta q$$

erhält man die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dy} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2,$$

$$y\frac{d\eta}{dy} - \eta = b_0 + b_1 y + b_2 y^2,$$

$$y^2 \frac{d\eta}{dy} - 2y\eta = c_0 + c_1 y + c_2 y^2,$$

welche zeigen, dass η gleich Null ist. Man erhält somit nur die Schaar

$$q, \ yq, \ y^2 q, \ -p, \ xp.$$

45. *Jetzt suchen wir alle Schaaren der Form*

$$X_1 q \cdots X_r q, \quad p + \eta_1 q, \quad xp + \eta_2 q.$$

Es bestehen Relationen der Form

$$(X_k q, \ p + \eta_1 q) = \sum_i c_{ks} X_s q,$$

$$(X_k q, \ xp + \eta_2 q) = \sum_i d_{ks} X_s q.$$

Dabei ist es wieder möglich statt $X_1 \cdots X_r$ solche lineare Functionen dieser Grössen

$$X_i' = \alpha_{i1} X_1 + \cdots + \alpha_{ir} X_r$$

einzuführen, dass in den transformirten Gleichungen

$$(X_k'q,\ p + \eta_1 q) = \sum_s c_{ks}' X_s' q,$$

$$(X_k'q,\ xp + \eta_2 q) = \sum_s d_{ks}' X_s' q$$

die neuen Coefficienten c_{ks}', d_{ks}' sehr einfache Werthe erhalten. Bezeichnen wir wie in Nummer 40. die Determinante $(\alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{rr})$ mit Δ und ihre Unterdeterminanten hinsichtlich der α_{ik} mit β_{ik}, so ist bekanntlich

$$\Delta \cdot X_k = \beta_{1k} X_1' + \cdots + \beta_{rk} X_k',$$

und also kommt durch Ausführung der Berechnung

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} c_{k\sigma}' &= \frac{1}{\Delta} \sum_j \sum_\varrho \alpha_{kj} c_{j\varrho} \beta_{\sigma\varrho}. \\ d_{k\sigma}' &= \frac{1}{\Delta} \sum_j \sum_\varrho \alpha_{kj} d_{j\varrho} \beta_{\sigma\varrho} \end{aligned} \right.$$

Nunmehr machen wir die folgenden Ueberlegungen. In den linearen inf. Transformationen

$$A(f) = \sum_j \sum_\varrho \frac{\partial f}{\partial x_j} c_{j\varrho} x_\varrho,$$

$$B(f) = \sum_j \sum_\varrho \frac{\partial f}{\partial x_j} d_{j\varrho} x_\varrho,$$

die (Satz 19.) durch die Gleichung

$$A(B(f)) - B(A(f)) = A(f)$$

verbunden sind, machen wir die Substitution

$$x_\varrho = \frac{1}{\Delta} \sum_\sigma \beta_{\sigma\varrho} x_\sigma'.$$

Hierdurch werden die x' folgendermassen als Functionen der x bestimmt:

$$x_i' = \sum_j \alpha_{ij} x_j,$$

und die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}$ werden transformirt durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_k \alpha_{kj} \frac{\partial f}{\partial x_k'},$$

also kommt

$$A(f) = \frac{1}{\Delta} \sum_j \sum_\varrho \sum_k \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial x_k'} \alpha_{kj} c_{j\varrho} \beta_{\sigma\varrho} x_\sigma',$$

$$B(f) = \frac{1}{\Delta} \sum_j \sum_\varrho \sum_k \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial x_k'} \alpha_{kj} d_{j\varrho} \beta_{\sigma\varrho} x_\sigma',$$

und wenn wir

$$A(f) = \sum_k \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial x_k'} c'_{k\sigma} x_\sigma',$$

$$B(f) = \sum_k \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial x_k'} d'_{k\sigma} x_\sigma'$$

setzen, kommt

$$c'_{k\sigma} = \frac{1}{\Delta} \sum_j \sum_\varrho \alpha_{kj} c_{j\varrho} \beta_{\sigma\varrho},$$

$$d'_{k\sigma} = \frac{1}{\Delta} \sum_j \sum_\varrho \alpha_{kj} . d_{j\varrho} \beta_{\sigma\varrho}.$$

welche Formeln genau mit (21) stimmen. Nun aber sahen wir (Satz 18), dass zwei linearen inf. Transformationen $A(f)$ und $B(f)$, die in der Beziehung $A(B(f)) - B(A(f)) = A(f)$ stehen, durch Einführung zweckmässiger Variabeln gleichzeitig auf kanonische Formen gebracht werden können. In dieser Weise erkennen wir, dass die Constanten α_{ik} derart gewählt werden können, dass die $c'_{k\sigma}$ immer verschwinden, wenn σ grösser als $k - 1$ ist, und dass die $d'_{k\sigma}$ immer verschwinden, wenn σ grösser als k ist.

Hiermit erhalten wir den Satz:

Satz 22. *Sind $r+2$ inf. Transformationen der Form $X_1 q, \cdots X_r q$, $p + \eta_1 q$, $xp + \eta_2 q$ durch die bekannten Relationen verbunden, so kann man ohne wesentliche Beschränkung annehmen, dass diese Relationen die folgende Form besitzen*

$$(22) \qquad \begin{cases} (X_k q,\ p + \eta_1 q) = c_{k1} X_1 q + \cdots + c_{k,k-1} X_{k-1} q, \\ (X_k q,\ xp + \eta_2 q) = d_{k1} X_1 q + \cdots + d_{k,k} X_k q. \end{cases}$$

Da X_1 gleich 1 gesetzt werden kann, so kommt zunächst

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial y} = 0, \quad \eta_1 = f(x).$$

Führen wir sodann eine Grösse der Form $y + \varphi(x)$ als neues y ein, so können wir $\eta_1 = 0$ setzen.

Setzen wir daher in der ersten Gleichung (22) $k = 2$, so kommt

$$-\frac{dX_2}{dx} = c_{21},$$

woraus hervorgeht, dass X_2 gleich x gesetzt werden kann. In entsprechender Weise erhält man die Werthe

$$X_3 = x^2 \cdots X_r = x^{r-1}.$$

Setzt man andererseits in der zweiten Gleichung (22) $k = 1$, so kommt

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial y} = K, \quad \eta_2 = Ky + f(x).$$

Die gesuchte Schaar von Transformationen besitzt daher die Form

$$q,\ xq,\ \cdots,\ x^r q,\ p,\ xp + [Ky + f(x)]\, q.$$

Nun aber ist

$$(p,\ xp + \eta_2 q) = p + \nu_0 + \nu_1 x + \cdots + \nu_r x^r,$$

also wird

$$\frac{d f(x)}{dx} = \nu_0 + \nu_1 x + \cdots + \nu_r x^r,$$

so dass $f(x) = Rx^{r+1}$ gesetzt werden kann. Wir werden zeigen, dass die Constante R im Allgemeinen ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Wir setzen

$$y' = y + Lx^{r+1},\quad x' = x,$$

woraus

$$\delta y' = \delta y + L(r+1)\, x^r\, \delta x,\quad \delta x' = \delta x;$$

also kommt

$$q = q',\quad xq = x'q'\quad \cdots\quad x^r q = x'^r q',$$
$$p = p' + L(r+1)\, x^r q,$$
$$xp + (Ky + Rx^{r+1})q = x'p' + \{Ky' + [R + L(r+1-K)]x^{r+1}\}\, q'.$$

Ist K verschieden von $r+1$, so kann die Constante L derart gewählt werden, dass die Grösse $R + L(r+1-K)$ gleich Null wird. Die gesuchte Schaar besitzt also die eine der beiden folgenden Formen:

$$\begin{vmatrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ p \\ xp + Kyq \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ p \\ xp + [(r+1)\, y + Rx^{r+1}]\, q \end{vmatrix}.$$

Ist im letzten Falle die Constante R von Null verschieden, so kann sie ohne Beschränkung gleich 1 gesetzt werden.

46. *Es bleibt übrig, alle Schaaren der Form*

$$X_1 q \cdots X_r q,\ yq,\ p + \eta_1 q,\ xp + \eta_2 q$$

zu bestimmen. Es bestehen $2r$ Relationen der Form

$$X_k \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{d X_k}{dx} = \sum_i c_{ki}\, X_i + c_k\, y,$$

$$X_k \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - x \frac{d X_k}{dx} = \sum_i d_{ki}\, X_i + d_k\, y,$$

woraus

$$X_k\eta_1 = y\left(\frac{dX_k}{dx} + \sum_i c_{ki}X_i\right) + \frac{c_k}{2}y^2 + f_1(x),$$
$$X_k\eta_2 = y\left(x\frac{dX_k}{dx} + \sum_i d_{ki}X_i\right) + \frac{d_k}{2}y^2 + f_2(x).$$

Nun aber finden wir durch Bildung der beiden Ausdrücke $(yq, p+\eta_1 q)$ $(yq, xp+\eta_2 q)$ zwei Gleichungen der Form

$$y\frac{\partial\eta_1}{\partial y} - \eta_1 = \sum_i \gamma_i X_i + \gamma y,$$
$$y\frac{\partial\eta_2}{\partial y} - \eta_2 = \sum_i \delta_i X_i + \delta y.$$

Setzen wir in ihnen die soeben gefundenen Werthe von η_1 und η_2 ein, so ergiebt sich, dass alle c_k und d_k gleich Null sind; und ebenso dass γ und δ gleich Null sind.

Es bestehen daher $2r$ Gleichungen von der Form

$$(X_k q,\ p+\eta_1 q) = \sum_i c_{ki}X_i q,$$
$$(X_k q,\ xp+\eta_2 q) = \sum_i d_{ki}X_i q,$$
$$(yq,\ p+\eta_1 q) = \sum_i \gamma_i X_i q,$$
$$(yq,\ xp+\eta_2 q) = \sum_i \delta_i X_i q,$$
$$(p+\eta_1 q,\ xp+\eta_2 q) = p+\eta_1 q + \lambda yq + \sum_i \mu_i X_i q.$$

In der letzten Gleichung kann man überdies immer durch Einführung von $\eta_1 + \lambda y$ als neues η_1 erreichen, *dass λ verschwindet.* Hiernach stehen die infinitesimalen Transformationen $X_k q$, $p+\eta_1 q$, $xp+\eta_2 q$ in derselben gegenseitigen Beziehung wie in der vorangehenden Nummer. Und wir erkennen daher wie damals, dass wir ohne Beschränkung setzen können

$$(X_k q,\ p+\eta_1 q) = c_{k1}X_1 q + \cdots + c_{k,k-1}X_{k-1}q,$$
$$(X_k q,\ xp+\eta_2 q) = d_{k1}X_1 q + \cdots + d_{k,k}X_k q.$$

Setzen wir überdies $X_1 = 1$, so kommt

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial y} = 0, \quad \eta_1 = f(x),$$

und durch Bildung des Ausdrucks $(yq, p+\eta_1 q)$ ergiebt sich, dass $f(x)$ ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. In entsprechender Weise ergiebt sich, dass

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial y} = K, \quad \eta = Ky + F(x)$$

ist. Dabei kann K und $F(x)$ ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden. Endlich erkennt man wie in der vorangehenden Nummer, dass

$$X_2 = x, \quad X_3 = x^2 \cdots X_r = x^{r-1}$$

gesetzt werden kann. Die gesuchte Schaar hat daher die Form

$$q,\ xq \cdots x^r q,\ yq,\ p,\ xp.$$

Die Entwickelungen dieses Paragraphen geben den Satz:

Satz 23. *Wenn die infinitesimalen Transformationen*

$$\eta_1 q \cdots \eta_r q,\ p + \eta_0 q,\ xp + \eta q$$

paarweise in der bekannten Beziehung stehen, so können dieselben eine der folgenden Formen erhalten:

$$\left|\begin{matrix} p \\ xp \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} p \\ xp + q \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ yq \\ y^2 q \\ p \\ xp \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ p \\ xp + Kyq \end{matrix}\right|,$$

$$\left|\begin{matrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ p \\ xp + [(r+1)y + x^{r+1}]\, q \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ yq \\ p \\ xp \end{matrix}\right|.$$

47. *Es ist nun hinterher leicht zu verificiren, dass eine jede unter diesen Schaaren eine Gruppe endlicher Transformationen liefert.* Die vierte Schaar giebt z. B. die Gruppe

$$y' = a^K y + a_1 + a_2 x + \cdots + a_{r+1} x^r, \quad x' = ax + a_{r+2}.$$

Die fünfte Schaar liefert die Gruppe

$$y' = e^{(r+1)a}\, y + e^{(r+1)a}\, L a x^{r+1} + a_1 + \cdots + a_{r+1} x^r,\ x' = e^a x + a_0$$

mit den Parametern $a_0,\ a,\ a_1 \cdots a_{r+1}$. Die letzte Schaar endlich liefert die Gruppe

$$y' = ay + a_1 + a_2 x + \cdots + a_r x^r, \quad x' = bx + b,$$

mit den Parametern $a,\ a_1,\ \cdots,\ a_r,\ b,\ b_1$.

§ 16.

Gruppen, bei denen die Curven einer Schaar $\varphi(xy) = a$ dreigliedrig transformirt werden.

Wir bestimmen jetzt alle Gruppen, welche die Curven einer Schaar $\varphi(xy) = a$ dreigliedrig transformiren. Nach den Entwicklungen des letzten Paragraphen sind hierbei sechs verschiedene Fälle zu berücksichtigen, die sich durch die nachstehenden Betrachtungen rasch erledigen.

48. Alle Gruppen der Form $p,\ xp,\ x^2p + \eta q$ sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad x\frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta,$$

so dass wir nur die Gruppe $p,\ xp,\ x^2p$ erhalten.

Alle Gruppen der Form

$$p,\ xp + yq,\ x^2p + \eta q$$

sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 2y,$$
$$x\frac{\partial \eta}{\partial x} + y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta = \eta,$$

woraus folgt, dass η die Form $2xy + By^2$ besitzt. Man findet daher die drei Transformationen

$$p,\ xp + yq,\ x^2p + (2xy + By^2)\,q\ ^{*)}.$$

Alle Gruppen der Form

$$q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p + \eta q$$

sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dy} = a_0 + a_1y + a_2y^2,$$
$$y\frac{d\eta}{dy} - \eta = b_0 + b_1y + b_2y^2,$$

welche zeigen, dass η gleich Null gesetzt werden kann.

Alle Gruppen der Form

$$q,\ xq,\ x^2q,\ \cdots,\ x^rq,\ p,\ xp + Kyq,\ x^2p + \eta q$$

befriedigen die Gleichungen

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \Sigma \nu_i x^i,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \Sigma \mu_i x^i + 2Ky,$$

*) Ist $B \gtrless 0$, so kann B ohne wesentliche Beschränkung gleich 1 gesetzt werden.

woraus folgt, dass

$$\eta = Ly + Mx^{r+1} + 2Kxy$$

gesetzt werden kann. Ferner ist

$$(xp + Kyq,\ x^2p + \eta q) = x^2p + \eta q + \Sigma\lambda_i x^i,$$

woraus

$$M(r - K) = 0, \quad L = 0.$$

Ferner ist

$$(x^r q,\ x^2p + \eta q) = \Sigma\varrho_i x^i q,$$

woraus folgt, dass

$$2K = r$$

ist. Wenn daher $r \gtrless 0$ ist, so erhält man die Schaar

$$q,\ xq, \cdots, x^r q,\ p,\ 2xp + ryq,\ x^2p + rxyq.$$

Ist dagegen $r = 0$, so erhält man die Schaar

$$q,\ p,\ xp,\ x^2p + Mxq,$$

und da die Hypothese $M = 0$ nichts Neues liefert, so können wir $M = 1$ setzen. Führen wir sodann e^y als neues y ein, so erhalten wir die infinitesimalen Transformationen

$$yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq,$$

die sämmtlich *lineare* Transformationen sind.

49. Zur Bestimmung aller Schaaren der Form

$$q,\ xq, \cdots, x^r q,\ p,\ xp + [(r + 1)\, y + x^{r+1}]\, q,\ x^2p + \eta q$$

haben wir zunächst die Gleichungen

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \nu_0 + \nu_1 x + \cdots + \nu_r x^r,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = 2(r + 1)\, y + 2x^{r+1} + \Sigma\mu_i x^i,$$

woraus

$$\eta = 2(r + 1)\, xy + \frac{2}{r + 2}\, x^{r+2} + Mx^{r+1} + Ny.$$

Substituiren wir diesen Werth in die Bedingungsgleichung

$$(xp + \eta_0 q,\ x^2p + \eta q) = x^2p + \eta q + \Sigma\lambda_i x^i q,$$

so ergiebt sich, dass r gleich -1 sein müsste, was indess absurd ist.

50. Endlich suchen wir die allgemeinste Schaar der Form

$$q,\ xq \cdots x^r q,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p + \eta q.$$

Die Grösse η befriedigt drei Gleichungen der Form

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \Sigma\alpha_i x^i + \alpha y,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \Sigma\beta_i x^i + \beta y,$$

$$y\, \frac{\partial\eta}{\partial y} - \eta = \Sigma\gamma_i x^i + \gamma y,$$

woraus sich ergiebt, dass $\eta = Byx$ ist. Und durch Anwendung der Operation $x^r q$ findet man, dass $B = r$ ist. Die gesuchte Schaar ist somit

$$q, xq, \cdots x^r q, yq, p, xp, x^2p + rxyq.$$

Die Entwickelungen dieses Paragraphen geben den Satz:

Satz 24. *Wenn die infinitesimalen Transformationen* $\eta_1 q, \cdots \eta_r q$, $p + \varphi_0 q$, $xp + \varphi_1 q$, $x^2p + \varphi_2 q$ *paarweise in der bekannten Beziehung stehen, so können sie immer eine der folgenden Formen erhalten:*

$$\left|\begin{matrix} p \\ xp \\ x^2p \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} p \\ xp + yq \\ x^2p + (2xy + y^2)q \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} yq \\ p \\ xp \\ x^2p + xyq \end{matrix}\right|,$$

$$\left|\begin{matrix} q \\ yq \\ y^2q \\ p \\ xp \\ x^2p \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ p \\ 2xp + ryq \\ x^2p + rxyq \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ p \\ xp \\ yq \\ x^2p + rxyq \end{matrix}\right|.$$

§ 17.

Einige Gruppen, die keine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant lassen.

Gruppen in der Ebene, die keine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant lassen, sind nach den Entwickelungen in § 11. dadurch charakterisirt, dass ihre infinitesimalen Transformationen erster Ordnung entweder die Form

$$(x - x_0)p + \cdots, (y - y_0)p + \cdots, (x - x_0)q + \cdots, (y - y_0)q + \cdots$$

oder die Form

$$(x - x_0)p - (y - y_0)q + \cdots, (x - x_0)q + \cdots, (y - y_0)p + \cdots$$

besitzen. In diesem Paragraphen bestimmen wir alle derartige Gruppen, die in der Umgebung des arbiträren Punktes $x_0 y_0$ nicht allein Transformationen erster Ordnung, sondern *zugleich Transformationen höherer Ordnung* besitzen.

51. Die gesuchten Gruppen haben jedenfalls drei Transformationen erster Ordnung der Form

$$(x - x_0)p - (y - y_0)q + \cdots, (x - x_0)q + \cdots, (y - y_0)p + \cdots;$$

ausserdem sollen sie Transformationen höherer Ordnung enthalten. Sei s die Maximalordnung einer solchen Transformation. Wir werden zeigen, dass s gleich 2 sein muss.

Ist $\xi p + \eta q$ eine infinitesimale Transformation s^{ter} Ordnung, so muss jedenfalls die eine der Grössen ξ und η, z. B. ξ von s^{ter} Ordnung sein. Wir können daher setzen

$$\xi p + \eta q = p \sum_i \alpha_i (x - x_0)^i (y - y_0)^{s-i} + \eta q + \cdots$$

und dabei sind die Coefficienten $\alpha_s \cdots \alpha_1, \alpha_0$ nicht sämmtlich gleich Null. Wir bilden den Ausdruck

$$((x - x_0) q + \cdots, \xi p + \eta q)$$
$$= p \Sigma \alpha_i (s - i)(x - x_0)^{i+1} (y - y_0)^{s-i-1} + \eta_1 q + \cdots,$$

der bekanntlich (Satz 9.) eine infinitesimale Transformation s^{ter} Ordnung der Gruppe darstellt. Aus der gefundenen Transformation $\xi_1 p + \eta_1 q$ kann man durch Bildung des Ausdrucks

$$((x - x_0) q + \cdots, \xi_1 p + \eta_1 q)$$

wiederum eine neue infinitesimale Transformation s^{ter} Ordnung herleiten u. s. w. Indem man in dieser Weise fortfährt, erhält man schliesslich eine Transformation s^{ter} Ordnung

$$((x - x_0)^s + \alpha_\varrho (x - x_0)^{(s-\varrho)} (y - y_0)^\varrho + \cdots) p + \eta q + \cdots = G,$$

deren ξ das Glied $(x - x_0)^s$ enthält.

Indem wir nun weiter gehen, setzen wir, um *die Formeln abzukürzen*

$$x_0 = 0, \ y_0 = 0,$$

was darauf hinauskommt, dass wir den Anfangspunkt in einen Punkt allgemeiner Lage verlegen. Sodann bilden wir die infinitesimale Transformation

$$(xp - yq + \cdots, (x^s + \alpha_\varrho x^{s-\varrho} y^\varrho + \cdots) p + \eta q + \cdots),$$

die die Form

$$((s-1) x^s + (s - 2\varrho - 1) \alpha_\varrho x^{s-\varrho} y^\varrho + \cdots) p + \eta q + \cdots = H$$

besitzt. Es giebt daher immer eine Transformation s^{ter} Ordnung, nämlich $H - (s - 2\varrho - 1) G$, welche die Form

$$(x^s + \alpha_{\varrho+1} x^{s-\varrho-1} y^{\varrho+1} + \cdots) p + \eta q$$

besitzt. In derselben Weise erkennen wir die Existenz einer Transformation der Form

$$(x^s + \alpha_{\varrho+2} x^{s-\varrho-2} y^{\varrho+2} + \cdots) p + \eta q$$

u. s. w.; und schliesslich finden wir eine in der Gruppe enthaltene infinitesimale Transformation s^{ter} Ordnung

$$x^s p + \eta q + \cdots,$$

deren ξ nur *ein* Glied s^{ter} Ordnung, nämlich x^s enthält.

In Nummer 26. sahen wir, dass die gesuchte Gruppe immer zwei unabhängige Transformationen nullter Ordnung

$$p + \cdots, \; q + \cdots$$

enthält. Also enthält sie zugleich die Transformation $(s-1)^{\text{ter}}$ Ordnung: $(p + \cdots, x^s p + \eta q + \cdots)$, welche die Form

$$x^{s-1} p + \eta_1 q + \cdots$$

besitzt. Sie enthält ferner die Transformation

$$(x^{s-1} p + \eta_1 q, x^s p + \eta q) + \cdots = x^{2s-2} p + \eta_2 q + \cdots,$$

deren Ordnung gleich $2s - 2$ ist. Also erkennen wir, dass die Zahl $2s - 2$ jedenfalls nicht grösser als s ist, das heisst, dass

$$s \overline{\gtrless} 2$$

ist; und wir erhalten somit den Satz:

Satz 25. *Eine Gruppe, die keine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant lässt, enthält in der Umgebung eines Punktes allgemeiner Lage keine infinitesimale Transformation, deren Ordnung grösser als 2 ist.*

52. Es ist nun nicht schwierig die Anzahl und Form aller infinitesimalen Transformationen zweiter Ordnung zu bestimmen, sofern solche Transformationen, wie wir annehmen, wirklich vorhanden sind. Es giebt, fanden wir, jedenfalls eine Transformation der Form

$$x^2 p + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) q + \cdots = G,$$

und also findet man durch Bildung des Ausdrucks $(xp - yq + \cdots, G)$ die Transformation

$$x^2 p + (3\alpha x^2 + \beta xy - \gamma y^2) q + \cdots = K$$

wie auch die Transformation

$$(\alpha x^2 - \gamma y^2) q + \cdots = \frac{K - G}{2} = L.$$

Es ist

$$(xq + \cdots, L) = -2\gamma xyq + \cdots$$

und

$$(xq + \cdots, -2\gamma xyq + \cdots) = -2\gamma x^2 q + \cdots$$

Ferner ist $(\gamma xyq + \cdots, \gamma x^2 q + \cdots) = -\gamma^2 x^3 q$, sodass γ gleich Null sein muss. Hiermit erhält L die Form $\alpha x^2 q + \cdots$ Nun ist

$$(\alpha x^2 q + \cdots, yp + \cdots) = \alpha(x^2 p - 2xyq) + \cdots$$

und

$$(\alpha x^2 q + \cdots, \alpha(x^2 p - 2xyq) + \cdots) = -4\alpha^2 x^3 q + \cdots,$$

sodass α gleich Null ist. Die infinitesimale Transformation G hat daher die Form

$$G = x^2 p + \beta xyq + \cdots$$

Zur Bestimmung von β bilden wir die Transformation

$$(yp + \cdots, G) = (2 - \beta) xyp + \beta y^2 q + \cdots = H$$

wie auch die Transformation

$$(G, H) = (\beta - 1)(2 - \beta)x^2yp + (\beta - 1)2\beta xy^2q + \cdots,$$

welche zeigt, dass

$$(\beta - 1)(2 - \beta) = 0, \quad (\beta - 1)2\beta = 0$$

ist, dass also β gleich 1 sein muss.

Hiermit ist gezeigt, dass die gesuchte Gruppe zwei infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung der Form

$$x^2p + xyq + \cdots, \quad xyp + y^2q + \cdots$$

enthalten muss. Giebt es weitere Transformationen zweiter Ordnung

$$(ax^2 + bxy + cy^2)p + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)q + \cdots = U + \cdots,$$

so muss

$$(x^2p + xyq, U) = 0, \quad (xyp + y^2q, U) = 0$$

sein. Nun aber ist

$$xyp + y^2q = \frac{y}{x}(x^2p + xyq);$$

also ist zugleich

$$(x^2p + xyq, U) = 0, \quad \left(\frac{y}{x}, U\right) = 0,$$

sodass U eine Function der beiden Grössen $x^2p + xyq$ und $\frac{y}{x}$ sein muss. Und da U eine ganze Function zweiter Ordnung von x und y ist, so besitzt U die Form

$$A(x^2p + xyq) + B(xyp + y^2q),$$

was wieder heisst, dass die Gruppe nur die beiden früher gefundenen Transformationen zweiter Ordnung enthält.

Die Gruppe enthält in Folge dessen nachstehende infinitesimale Transformation erster Ordnung

$$(p + \cdots, x^2p + xyq + \cdots) = 2xp + yq + \cdots$$

und ausserdem die Transformationen

$$xp - yq + \cdots, \quad xq + \cdots, \quad yp + \cdots,$$

was darauf hinauskommt, dass sie *vier* unabhängige Transformationen erster Ordnung enthält. So folgt:

Satz 26. *Wenn die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe, die keine Curvenschaar $q = a$ invariant lässt, nicht sämmtlich von nullter und erster Ordnung sind, so haben dieselben die Form*

$$p + \cdots, \quad q + \cdots, \quad xp + \cdots, \quad yp + \cdots,$$
$$xq + \cdots, \quad yq + \cdots, \quad x^2p + xyq + \cdots, \quad xyp + y^2q \cdots$$

53. Wir werden jetzt die zwischen den *acht* gefundenen infinitesimalen Transformationen stattfindenden Relationen bestimmen.

Es ist zunächst klar, dass die 9 folgenden Relationen bestehen:

$$
\begin{aligned}
&(x^2p + xyq + \cdots, xyp + y^2q \cdots) = 0,\\
&(xp + \cdots, x^2p + xyq + \cdots) = (x^2p + xyq + \cdots),\\
&(xp + \cdots, xyp + y^2q + \cdots) = 0,\\
&(yq + \cdots, x^2p + xyq + \cdots) = 0,\\
&(yq + \cdots, xyp + y^2q + \cdots) = (xyp + y^2q + \cdots),\\
&(xq + \cdots, x^2p + xyq + \cdots) = 0,\\
&(xq + \cdots, xyp + y^2q + \cdots) = (x^2p + xyq + \cdots),\\
&(yp + \cdots, x^2p + xyq + \cdots) = (xyp + y^2q + \cdots),\\
&(yp + \cdots, xyp + y^2q + \cdots) = 0.
\end{aligned}
$$

Es bestehen ferner Relationen der Form

$$
\begin{aligned}
&(xp+\cdots, yq+\cdots) = A_1(x^2p+xyq+\cdots)+B_1(xyp+y^2q+\cdots),\\
&(xp+\cdots, xq+\cdots) = (xq+\cdots)+A_2(\quad)+B_2(\quad),\\
&(yq+\cdots, xq+\cdots) = -(xq+\cdots)+A_3(\quad)+B_3(\quad),\\
&(xp+\cdots, yp+\cdots) = -(yp+\cdots)+A_4(\quad)+B_4(\quad),\\
&(yq+\cdots, yp+\cdots) = (yp+\cdots)+A_5(\quad)+B_5(\quad),\\
&(xq+\cdots, yp+\cdots) = (xp-yq+\cdots)+A_6(\quad)+B_6(\quad),
\end{aligned}
$$

wo die A_k und B_k unbekannte Constanten sind. Um diese Gleichungen zu vereinfachen, setzen wir

$$
\begin{aligned}
&x'p' + \cdots = (xp + \cdots) + \alpha_1(x^2p + xyq + \cdots) + \beta_1(xyp + y^2q + \cdots),\\
&y'q' + \cdots = (yq + \cdots) + \alpha_2(\quad) + \beta_2(\quad),\\
&x'q' + \cdots = (xq + \cdots) + \alpha_3(\quad) + \beta_3(\quad),\\
&y'p' + \cdots = (yp + \cdots) + \alpha_4(\quad) + \beta_4(\quad)
\end{aligned}
$$

und führen sodann diese Grössen als infinitesimale Transformationen erster Ordnung ein. Setzen wir der Kürze wegen

$$
x^2p + xyq + \cdots = S_1, \quad xyp + y^2q + \cdots = S_2,
$$

so kommt

$$
\begin{aligned}
&(x'p'+\cdots, y'q'+\cdots) = (A_1+\alpha_2)S_1+(B_1-\beta_1)S_2,\\
&(x'p'+\cdots, x'q'+\cdots) = (x'q'+\cdots)+(A_2-\beta_1)S_1+(B_2-\beta_3)S_2,\\
&(y'q'+\cdots, x'q'+\cdots) = -(x'q'+\cdots)+(A_3+\alpha_3-\beta_2)S_1+(B_3+2\beta_3)S_2,\\
&(x'p'+\cdots, y'p'+\cdots) = -(y'p'+\cdots)+(A_4+2\alpha_4)S_1+(B_4-\alpha_1+\beta_4)S_2,\\
&(y'q'+\cdots, y'p'+\cdots) = (y'p'+\cdots)+(A_5-\alpha_4)S_1+(B_5-\alpha_2)S_2,\\
&(x'q'+\cdots, y'p'+\cdots) = (x'p'-y'q+\cdots)+(A_6+\beta_4-\alpha_1+\alpha_2)S_1\\
&\qquad\qquad +(B_6-\alpha_4-\beta_1+\beta_2)S_2.
\end{aligned}
$$

Hier können wir immer annehmen, dass die α_k und β_k derart gewählt sind, dass

$$\begin{aligned}
&A_1 + \alpha_2 = 0\,, && B_1 - \beta_1 = 0\,,\\
& && B_2 - \beta_3 = 0\,,\\
&A_3 + \alpha_3 - \beta_2 = 0\,, && \\
& && B_4 - \alpha_1 + \beta_4 = 0\,,\\
&A_5 - \alpha_4 = 0 &&
\end{aligned}$$

ist. Und also können wir ohne Beschränkung annehmen, dass Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}
&(xp + \cdots, yq + \cdots) = 0\,,\\
&(xp + \cdots, xq + \cdots) = (xq + \cdots) + A_2 S_1\,,\\
&(yq + \cdots, xq + \cdots) = -(xq + \cdots) + B_3 S_2\,,\\
&(xp + \cdots, yp + \cdots) = -(yp + \cdots) + A_4 S_1\,,\\
&(yq + \cdots, yp + \cdots) = (yp + \cdots) + B_5 S_2\,,\\
&(xq + \cdots, yp + \cdots) = (xp - yq + \cdots) + A_6 S_1 + B_6 S_2
\end{aligned}$$

bestehen.

Wir werden zeigen, dass die noch übrig gebliebenen Grössen A_k, B_k sämmtlich gleich Null sein müssen. Hierzu bilden wir die Jacobi'sche Identität

$$\begin{aligned}
0 = ((xp + \cdots, yq + \cdots)\, xq + \cdots) + ((yq + \cdots, xq + \cdots)\, xp + \cdots)\\
+ ((xq + \cdots, xp + \cdots)\, yq + \cdots),
\end{aligned}$$

woraus durch Einsetzung der obenstehenden Werthe

$$-(xq + \cdots, xp + \cdots) - (xq + \cdots, yq + \cdots) = 0$$

und schliesslich

$$(xq + \cdots) + A_2 S_1 - (xq + \cdots) + B_3 S_2 = 0\,,$$

sodass A_2 und B_3 gleich Null sind. Dem entsprechend finden wir, wenn wir die Jacobi'sche Identität auf die drei Grössen $xp + \cdots$, $yq + \cdots$, $yp + \cdots$ anwenden, dass A_4 und B_5 gleich Null sein müssen. Wir bilden die Identität

$$\begin{aligned}
((xq + \cdots, yp + \cdots)\, xp + \cdots) + ((yp + \cdots, xp + \cdots)\, xq + \cdots)\\
+ ((xp + \cdots, xq + \cdots)\, yp + \cdots) = 0\,,
\end{aligned}$$

woraus

$$-A_6 S_1 + (yp + \cdots, xq + \cdots) + (xq + \cdots, yp + \cdots) = 0\,,$$

sodass A_6 gleich Null ist. Dem entsprechend erkennen wir, indem wir dieselbe Identität auf $xq + \cdots$, $yp + \cdots$ und $yq + \cdots$ anwenden, dass auch B_6 gleich Null ist. *Hiermit ist nachgewiesen, dass alle A_k, B_k gleich Null sind.*

Jetzt bleibt übrig, die zwischen $p + \cdots$ und $q + \cdots$ und den übrigen Transformationen bestehenden Relationen auf ihre einfachste Form zu bringen. Es bestehen zunächst Gleichungen der Form

$$(p+\cdots,\ x^2p+xyq+\cdots) = 2(xp+\cdots)+(yq+\cdots)+A_1S_1+A_2S_2;$$
$$(p+\cdots,\ xyp+y^2q+\cdots) = (yp+\cdots)+B_1S_1+B_2S_2;$$

wir führen eine Transformation der Form

$$p+\alpha(xp+\cdots)+\beta(xq+\cdots)+\gamma(yp+\cdots)+\delta(yq\cdots)$$

als neue $p+\cdots$ ein, und können dabei immer die Constanten α, β, γ, δ derart wählen, dass die beiden letzten Bedingungsgleichungen die einfache Form

$$(p+\cdots,\ x^2p+xyq+\cdots) = 2(xp+\cdots)+(yq+\cdots),$$
$$(p+\cdots,\ xyp+y^2q+\cdots) = (yp+\cdots)$$

erhalten. Dem entsprechend ist es möglich die Transformation $q+\cdots$ derart zu wählen, dass

$$(q+\cdots,\ x^2p+xyq+\cdots) = xq+\cdots$$
$$(q+\cdots,\ xyp+y^2q+\cdots) = (xp+\cdots)+2(yq+\cdots)$$

wird.

Es besteht ferner eine Relation der Form

$$(p+\cdots,\ xp+\cdots) = p+\cdots+\alpha(xp+\cdots)+\beta(yp+\cdots)+\gamma(xq+\cdots)$$
$$+\delta(yq+\cdots)+\mu S_1+\nu S_2;$$

wir bilden die Gleichung

$$((p+\cdots,\ xp+\cdots)S_1)+((xp+\cdots,\ S_1)p+\cdots)+((S_1,\ p+\cdots)xp+\cdots)=0,$$

woraus

$$((p+\cdots,\ xp+\cdots)\,S_1)+(S_1,\ p)=0$$

oder

$$\alpha S_1+\beta S_2=0,$$

sodass α und β gleich Null sind. Wenn man andererseits die Jacobi'sche Identität auf die Grössen $p+\cdots$, $xp+\cdots$ und S_2 anwendet, so erkennt man, dass γ und δ gleich Null sind. Also kommt

$$(p+\cdots,\ xp+\cdots) = p+\cdots+\mu_1S_1+\mu_2S_2.$$

Durch ganz analoge Rechnungen findet man Gleichungen der Form

$$(p+\cdots,\ yp\cdots) = \nu_1S_1+\nu_2S_2,$$
$$(p+\cdots,\ yq\cdots) = \alpha_1S_1+\alpha_2S_2,$$
$$(p+\cdots,\ xq\cdots) = q+\beta_1S_1+\beta_2S_2.$$

Indem wir hier eine zweckmässige Grösse der Form $(p+\cdots)+c_1S_1+c_2S_2$ als neue $p+\cdots$ einführen, erreichen wir, dass μ_1 und μ_2 verschwinden. Indem wir sodann die Jacobi'sche Identität auf $p+\cdots$, $xp+\cdots$, $yp+\cdots$, und auf $p+\cdots$, $yq+\cdots$, $xp+\cdots$ anwenden, erkennen wir, dass $\nu_1=\nu_2=\alpha_1=\alpha_2=0$ ist. Also ist

$$(p+\cdots,\ xp+\cdots)=p+\cdots,\quad (p+\cdots,\ yp+\cdots)=0,$$
$$(p+\cdots,\ yq+\cdots)=0.$$

Ganz analoge Ueberlegungen zeigen, dass die infinitesimale Transformation $q + \cdots$ derart gewählt werden kann, dass

$$(q + \cdots, yq + \cdots) = q + \cdots, \; (q + \cdots, xq + \cdots) = 0,$$
$$(q + \cdots, xp + \cdots) = 0, \; (q + \cdots, yp + \cdots) = p + \gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2$$

wird. Indem wir endlich die Jacobi'sche Identität auf $p + \cdots$, $xq + \cdots$, $yq + \cdots$ anwenden, erkennen wir, dass $\beta_1 = \beta_2 = 0$ und

$$(p + \cdots, xq + \cdots) = q + \cdots$$

ist; eine analoge Rechnung zeigt, dass

$$(q + \cdots, yp + \cdots) = p + \cdots$$

ist.

Jetzt müssen wir nur noch den Ausdruck $(p + \cdots, q + \cdots)$ berechnen. Es besteht eine Gleichung der Form

$$(p + \cdots, q + \cdots) = A(p + \cdots) + B(q + \cdots) + C(xp + \cdots)$$
$$D(xq + \cdots) + E(yp + \cdots) + F(yq + \cdots) + GS_1 + HS_2.$$

Wenn man die Jacobi'sche Identität zuerst auf $p + \cdots$, $q + \cdots$, S_1, sodann auf $p + \cdots$, $q + \cdots$, S_2 und endlich auf $p + \cdots$, $q + \cdots$, $xp + \cdots$ anwendet, so erkennt man, dass

$$(p + \cdots, q + \cdots) = 0$$

ist.

Die Ergebnisse dieser Nummer lassen sich zu dem folgenden Satze zusammenfassen:

Satz 27. *Die zwischen den acht inf. Transformationen* $p + \cdots$, $q + \cdots$, $xp + \cdots$, $yp \cdots$, $xq + \cdots$, $yq + \cdots$, $x^2p + xyq + \cdots$, $xyp + y^2q + \cdots$ *bestehenden Relationen stimmen hinsichtlich ihrer Form genau mit den zwischen den acht linearen inf. Transformationen* p, q, xp, yp, xq, yq, $x^2p + xyq$, $xyp + y^2q$ *bestehenden Relationen überein.*

54. Es ist nun äusserst leicht, die gefundenen acht inf. Transformationen durch Einführung von zweckmässigen unabhängigen Variablen $x'y'$ auf eine einfache kanonische Form zu bringen. Hierzu brauchen wir den folgenden Hülfssatz:

Satz 28. *Stehen die drei inf. Transformationen* $A_1(f)$, $A_2(f)$ *und* $A_3(f)$, *wo*

$$A_i(f) = \xi_i p + \eta_i q$$

ist, paarweise in der Beziehung $(A_i A_k) = 0$, *und sind dabei* $A_1(f) = 0$ und $A_2(f) = 0$ *unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen, so besteht eine Gleichung der Form* $A_3(f) = c_1 A_1(f) + c_2 A_2(f)$, *wobei* c_1 *und* c_2 *Constanten sind.*

Um diesen Satz zu beweisen, bringen wir die $A_k(f)$ durch Einführung zweckmässiger Variablen x' und y' auf die Form

$$A_1(f) = p', \; A_2 f = q',$$
$$A_3(f) = \xi' p' + \eta' q';$$

dabei ist

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x'} = \frac{\partial \xi'}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = \frac{\partial \eta'}{\partial y'} = 0,$$

so dass wirklich

$$A_3(f) = c_1 p' + c_2 q' = c_1 A_1(f) + c_2 A_2(f)$$

ist.

Die in den vorangehenden Nummern dieses Paragraphen betrachteten inf. Transformationen $p + \cdots$, $q + \cdots$, stehen in der Beziehung $(p + \cdots, q + \cdots) = 0$; und dabei sind die linearen partiellen Differentialgleichungen

$$p + \cdots = 0, \; q + \cdots = 0$$

offenbar unabhängig, indem sie bei der Substitution $x = 0$, $y = 0$ bez. in $p = 0$ und $q = 0$ übergehen. Daher können wir immer solche Variable x' und y' wählen, dass $p + \cdots$ und $q + \cdots$ die Form

$$p + \cdots = p', \; q + \cdots = q'$$

erhalten. Zur Bestimmung der Grösse

$$xq + \cdots = \xi p' + \eta q'$$

in den neuen Variabeln benutzen wir die Relationen

$$(q + \cdots, xq + \cdots) = 0, \; (p + \cdots, xq + \cdots) = q + \cdots$$

oder die äquivalenten

$$(q', \xi p' + \eta q') = 0, \; (p', \xi p' + \eta q') = q'.$$

Setzen wir hier

$$\xi p' + \eta q' = x' q' + \xi' p' + \eta' q',$$

so kommt

$$(q', \xi' p' + \eta' q') = 0, \; (p', \xi' p' + \eta' q') = 0,$$

woraus (Satz 28.) folgt, dass $\xi' p' + \eta' q'$ die Form $c_1 p' + c_2 q'$ besitzt. Also ist

$$xq + \cdots = x' q' + c_1 p' + c_2 q'.$$

Durch ganz analoge Rechnungen findet man, dass

$$xp + \cdots = x' p' + d_1 p' + d_2 q',$$
$$yp + \cdots = y' p' + e_1 p' + e_2 q',$$
$$yq + \cdots = y' q' + f_1 p' + f_2 q',$$
$$x^2 p + xyq + \cdots = x'^2 p' + x' y' q' + g_1 p' + g_2 q',$$
$$xyp + y^2 q + \cdots = x' y' p' + y'^2 q' + k_1 p' + k_2 q'$$

ist. Und dabei ist es nicht nothwendig die Constanten c, d, e, f, g, k näher zu bestimmen. Denn es ist bekannt, dass die inf. Transformationen $p, q, xq, xp, yp, yq, x^2 p + xyq, xyp + y^2 q$ eben die inf. Transformationen der allgemeinen linear-gebrochenen Gruppe sind

Hiermit erhalten wir den folgenden fundamentalen Satz:

Satz 29. *Wenn eine Gruppe keine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant lässt, und wenn sie dabei in der Umgebung eines Punktes allgemeiner Lage nicht allein inf. Transformationen nullter und erster Ordnung, sondern zugleich Transformationen höherer Ordnung enthält, so geht sie durch Einführung von zweckmässigen Variabeln in die allgemeine linear-gebrochene Gruppe der Ebene über.*

§ 18.

Bestimmung aller Gruppen, die keine Curvenschaar $\varphi = a$ invariant lassen.

Es bleibt jetzt nur noch übrig alle Gruppen, deren inf. Transformationen entweder die Form

$$p + \cdots, \; q + \cdots, \; xp + \cdots, \; yp + \cdots, \; xq + \cdots, \; yq + \cdots$$

oder die Form

$$p + \cdots, \; q + \cdots, \; xq + \cdots, \; yp + \cdots, \; xp - yq + \cdots$$

besitzen, zu bestimmen. *Diese Gruppen haben entweder sechs oder fünf Parameter.*

55. Zur Abkürzung der Formeln setzen wir

$$p + \cdots = P, \quad q + \cdots = Q, \quad xp + \cdots = XP, \quad yq + \cdots = YQ, \\ xq + \cdots = XQ, \quad yp + \cdots = YP$$

und fassen dabei z. B. das Symbol XP nicht etwa als das Product zweier Grössen X und P, sondern als ein *irreductibles Symbol* auf. Es handelt sich zunächst darum, die zwischen diesen sechs inf. Transformationen bestehenden Relationen auf ihre einfachste Form zu bringen.

Zwischen den vier inf. Transformationen erster Ordnung bestehen offenbar die folgenden Relationen

$$(XQ, YP) = XP - YQ, \; (XQ, XP - YQ) = -2XQ, \\ (YP, XP - YQ) = 2YP, \; (XQ, XP + YQ) = (YP, XP + YQ) \\ = (XP - YQ, XP + YQ) = 0.$$

Um die Formeln zu vereinfachen, bezeichnen wir die Grösse $XP + YQ$ mit U, und die drei Grössen XQ, YP und $XP - YQ$ mit dem gemeinsamen Symbole T. Es bestehen dann Relationen der Form

$$\begin{aligned}
(P, XQ) &= \quad Q + \Sigma\lambda_k T_k + \lambda U, \\
(P, XP - YQ) &= \quad P + \Sigma\mu_k T_k + \mu U, \\
(P, YP) &= \qquad\quad \Sigma\nu_k T_k + \nu U, \\
(Q, XQ) &= \qquad\quad \Sigma\alpha_k T_k + \alpha U, \\
(Q, XP - YQ) &= - Q + \Sigma\beta_k T_k + \beta U, \\
(Q, YP) &= \quad P + \Sigma\gamma_k T_k + \gamma U.
\end{aligned}$$

Wir führen nun Transformationen von der Form $Q + \varepsilon U$, $P + \delta U$ als neue $q + \cdots$ und $p + \cdots$ ein. In dieser Weise erkennen wir, dass λ und γ ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden können. Wir bilden ferner die Gleichung

$$((P, XQ)\, XP - YQ) - 2(XQ, P) - (P, XQ) + \Sigma T = 0\,,$$

woraus

$$(Q, XP - YQ) + (P, XQ) + \Sigma T = 0\,,$$

sodass β gleich Null ist. Dem entsprechend ist zugleich μ gleich Null. Bilden wir endlich die Gleichung

$$((P, XP - YQ)\, YP) - 2(YP, P) + \Sigma T = 0\,,$$

so kommt eine Gleichung der Form

$$3(P, YP) + \Sigma T = 0\,,$$

sodass ν gleich Null ist. Dem entsprechend ist auch α gleich Null.

In den beiden Gleichungen

$$(Q, XQ) = \alpha_1 XQ + \alpha_2(XP - YQ) + \alpha_3 YP,$$
$$(Q, XP - YQ) = -Q + \beta_1 XQ + \beta_2(XP - YQ) + \beta_3 YP$$

können nunmehr die α_i und β_i, wie jetzt gezeigt werden soll, ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden. Zu diesem Zwecke führen wir, indem wir mit A, B, C unbekannte Constanten bezeichnen, die Grösse

$$Q + AXQ + B(XP - YQ) + CYP$$

als neue $q + \cdots$ ein. Hierdurch können wir erreichen, dass

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 0$$

werden. Sodann bilden wir die Identität

$$((Q, XQ)\, XP - YQ) - 2(XQ, Q) + ((XP - YQ, Q)\, XQ) = 0$$

oder ausgeführt

$$5\alpha_3 YP - 2\beta_2 XQ + \beta_3(XP - YQ) = 0\,,$$

woraus hervorgeht, dass α_3, β_2 und β_3 gleich Null sind. Also kommt

$$(Q, XQ) = 0\,,\ (Q, XP - YQ) = -Q.$$

Fernere Constantenbestimmungen erhalten wir auf folgende Weise. Es besteht eine Relation der Form

$$(Q, YP) = P + a_1 XQ + a_2(XP - YQ) + a_3 YP,$$

und dabei ist es erlaubt die rechte Seite dieser Gleichung als neue P einzuführen. Also wird

$$(Q, YP) = P.$$

Wir bilden ferner die Identität

$$((Q, YP)\, XQ) + (YQ - XP, Q) = 0\,,$$

woraus folgt, dass

$$(P, XQ) = Q$$

ist. Ebenso bilden wir die Identität

$$((Q, YP) XP - YQ) + 2(YP, Q) + (Q, YP)$$

und erhalten so die Gleichung

$$(P, XP - YQ) = P.$$

Um in der Gleichung

$$(P, YP) = b_1 XQ + b_2(XP - YQ) + b_3 YP$$

die Constanten zu berechnen, bilden wir die Identität

$$((P, YP) XP - YQ) + 2(YP, P) - (P, YP)$$

und erkennen hierdurch, dass

$$(P, YP) = 0$$

ist.

Es besteht endlich eine Gleichung der Form

$$(P, XP + YQ) = P + c_1 XQ + c_2(XP - YQ) + c_3(YP) + c_4(XP + YQ)$$

und wenn wir die Identität

$$((P, XP + YQ) XP - YQ) - (P, XP + YQ) = 0$$

bilden, erkennen wir, dass

$$(P, XP + YQ) = P$$

ist. Dem entsprechend ist

$$(Q, XP + YQ) = Q.$$

Jetzt bleibt nur noch übrig, den Ausdruck

$$(P, Q) = \alpha P + \beta Q + \gamma XQ + \delta YP + \varepsilon(XP - YQ) + \varphi(XP + YQ)$$

zu berechnen. Die Identitäten

$$((P, Q) XP - YQ) = 0,$$
$$((P, Q) XP) - (P, Q) = 0$$

zeigen, dass

$$(P, Q) = 0$$

ist. Hiermit ist nachgewiesen, dass *die sechs inf. Transformationen P, Q, XQ, YP, XP, YQ paarweise in derselben Beziehung wie die linearen inf. Transformationen p, q, xq, yp, xp, yq stehen.*

56. Da P und Q in der Beziehung $(P, Q) = 0$ stehen, und dabei in der Umgebung des Anfangspunktes unabhängige inf. Transformationen erster Ordnung sind, so können wir immer (Satz 28.) die Variabeln x und y derart wählen, dass

$$P = p, \quad Q = q$$

wird. Hierdurch erhalten die übrigen Transformationen (siehe Nummer 54.) die Form

$$XP = xp + \alpha_1 p + \beta_1 q,$$
$$XQ = xq + \alpha_2 p + \beta_2 q,$$
$$YP = yp + \alpha_3 p + \beta_3 q,$$
$$YQ = yq + \alpha_4 p + \beta_4 q,$$

und es ist also der folgende Satz erwiesen:

Satz 30. *Enthält eine Gruppe, die keine Curvenschaar* $\varphi = a$ *invariant lässt, sechs Parameter, so kann sie durch Einführung zweckmässiger Variabeln die lineare Form*

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = \alpha x + \beta y + \gamma$$

erhalten.

57. Es ist jetzt leicht, alle Gruppen, deren inf. Transformationen die Form

$$p + \cdots = P,\ q + \cdots = Q,\ xq + \cdots = XQ,$$
$$xp - yq + \cdots = XP - YQ,\ yp + \cdots = YP$$

besitzen, zu bestimmen.

Die drei Transformationen erster Ordnung erfüllen die Gleichungen

$$(XQ,\ YP) = XP - YQ,\ (XQ,\ XP - YQ) = -2XQ,$$
$$(YP,\ XP - YQ) = 2YP.$$

Bezeichnen wir XQ, $XP - YQ$, YP mit dem gemeinsamen Symbole T, so bestehen sechs Relationen der Form

$$\begin{aligned}
(P,\ XQ) &= \quad Q + \Sigma \lambda_k T_k,\\
(P,\ XP - YQ) &= \quad P + \Sigma \mu_k T_k,\\
(P,\ YP) &= \qquad\quad \Sigma \nu_k T_k,\\
(Q,\ XQ) &= \qquad\quad \Sigma \alpha_k T\ ,\\
(Q,\ XP - YQ) &= - Q + \Sigma \beta_k T_k,\\
(Q,\ YP) &= \quad P + \Sigma \gamma_k T_k,
\end{aligned}$$

und zwar können wir (Nummer 53.) ohne Beschränkung annehmen, dass diese Gleichungen die noch einfachere Form

$$(P,\ XQ) = Q,\ (P,\ XP - YQ) = P,\ (P,\ YP) = 0,$$
$$(Q,\ XQ) = 0,\ (Q,\ XP - YQ) = -Q,\ (Q,\ YP) = P$$

besitzen. Es ist

$$(P,\ Q) = \alpha P + \beta Q + \gamma XQ + \delta (XP - YQ) + \varepsilon YP$$

und dabei zeigen die Identitäten

$$((P,\ Q)\ XP - YQ) = 0,$$
$$((P,\ Q)\ XQ) = 0,$$

dass die Constanten sämmtlich gleich Null sind, und dass daher

$$(P,\ Q) = 0$$

ist. So folgt:

Satz 31. *Eine Gruppe mit fünf Parametern, die keine Curvenschaar* $\varphi(xy) = a$ *invariant lässt, erhält durch Einführung zweckmässiger Variabeln* x *und* y *die Form*

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = \frac{1}{a}y + dx + e.$$

Indem wir die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen zusammenfassen, erhalten wir das folgende Theorem:

Satz 32. *Lässt eine Gruppe in der Ebene keine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant, so enthält sie entweder acht oder sechs oder fünf Parameter. Durch Einführung von zweckmässigen Variabeln geht sie in eine lineare Gruppe über, und zwar entweder in die allgemeine lineare oder in eine sechsgliedrige oder endlich in eine fünfgliedrige Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe.**)

§ 19.

Aufzählung aller Gruppen in der Ebene.

Alle Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene ordnen sich naturgemäss in fünf Classen, nämlich 1) solche, die keine Schaar $\varphi(xy) = a$ invariant lassen, 2) solche, die eine und nur eine Schaar $\varphi = a$ invariant lassen, 3) solche, die zwei und nur zwei Schaaren $\varphi = a$ invariant lassen, 4) solche, die einfach unendlich viele Schaaren invariant lassen, 5) solche, die ∞^∞ Schaaren invariant lassen.

58. Wenn eine Schaar $\varphi = a$ eine infinitesimale Transformation, etwa die Translation q, gestattet, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder gestattet jede Curve der Schaar die Transformation q, oder auch q vertauscht die Curven der Schaar unter sich. Im ersten Falle besteht die Schaar aus den Geraden $x =$ Const.; im zweiten Falle hat sie die Gleichungsform

$$y + f(x) = \lambda = \text{Const.},$$

wobei λ eine arbiträre Constante bezeichnet.

Gestattet eine Schaar die beiden Transformationen q und $X(x)q$, so hat sie jedenfalls eine der Formen

$$y + f(x) = \lambda; \quad x = \text{Const.};$$

und da der Ausdruck

$$X(x)\frac{\partial}{\partial y}(y + f(x)) = X(x)$$

keine Function von $y + f(x)$ ist, so erkennen wir, *dass $x =$ Const.*

*) Dieser Satz dehnt sich auf n Dimensionen aus. In meiner nächsten Abhandlung über Transformationsgruppen hoffe ich einen strengen Beweis dieser Verallgemeinerung geben zu können.

die einzige Schaar ist, die die beiden Transformationen q und Xq gestattet.

Gestattet eine Schaar die beiden Transformationen q und yq, so hat sie ebenso die eine der Formen

$$y + f(x) = \lambda; \qquad x = \lambda,$$

und da die Grösse y nur, wenn $f(x) =$ Const. ist, eine Function von $y + f(x)$ ist, so erkennen wir, *dass $x =$ Const. und $y =$ Const. die einzigen Schaaren sind, die die beiden Transformationen q und yq gestatten.*

Gestattet eine Schaar die Transformationen q und p, so hat sie wiederum entweder die Form $x =$ Const., oder die Form $y + f(x) = \lambda$. Und da im letzten Falle die Grösse $f'(x)$ keine Function von $y + f(x)$ sein kann, ausgenommen wenn sie eine Constante ist, so schliessen wir, dass *die Schaar $ay + bx = \lambda$ mit dem arbiträren Parameter $\frac{a}{b}$ die allgemeinste ist, welche die Transformationen p und q gestattet.*

59. Indem wir nunmehr diese Ueberlegungen auf alle früher bestimmten Gruppen anwenden, erhalten wir die folgende *erschöpfende* Classification aller Gruppen der Ebene.

A) *Gruppen, die keine Schaar invariant lassen:*

$$\left|\begin{array}{c} p \\ q \\ xp \\ yq \\ xq \\ yp \\ x^2p + xyq \\ xyp + y^2q \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} p \\ q \\ xp \\ yq \\ xq \\ yp \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} p \\ q \\ xp - yq \\ xq \\ yp \end{array}\right|.$$

Diese Gruppen sind sämmtlich lineare Gruppen.

B) *Gruppen, die nur eine Schaar invariant lassen:*

$$\left|\begin{array}{c} q \\ X_1 q \\ \vdots \\ X_r q \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} q \\ X_1 q \\ \vdots \\ X_r q \\ yq \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} q \\ X_1 q \\ \vdots \\ X_r q \\ p + \varepsilon yq \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} q \\ X_1 q \\ \vdots \\ X_r q \\ yq \\ p \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ p \\ xp + Kyq \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} p \\ xp + yq \\ x^2p + 2xyq \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{matrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ p \\ xp + [(r+1)y + x^{r+1}]\, q \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ yq \\ p \\ xp \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} yq \\ p \\ xp \\ x^2p + xyq \end{matrix}\right|,$$

$$\left|\begin{matrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ p \\ 2xp + ryq \\ x^2p + rxyq \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ p \\ xp \\ yq \\ x^2p + rxyq \end{matrix}\right|.$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Zahl r grösser als Null ist. Nur in der Gruppe 7 kann r zugleich gleich Null sein.

C) *Gruppen, die zwei und nur zwei Schaaren invariant lassen:*

$$\left|\begin{matrix} q \\ yq \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ yq \\ y^2q \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ yq \\ p \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ yq \\ y^2q \\ p \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ yq \\ p \\ xp \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ yq \\ y^2q \\ p \\ xp \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} q \\ yq \\ y^2q \\ p \\ xp \\ x^2p \end{matrix}\right|,$$

$$\left|\begin{matrix} q \\ p \\ xp + Kyq \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} p + q \\ xp + yq \\ x^2p + y^2q \end{matrix}\right|.$$

Die letzte Gruppe ist eine neue Form der früher gefundenen Gruppe p, $xp + yq$, $x^2p + (2xy + y^2)\, q$. In der nächst-letzten Gruppe darf die Constante K nicht gleich 1 sein. Alle hierher gehörigen Gruppen sind Untergruppen der sechsgliedrigen Gruppe q, yq, y^2q, p, xp, x^2p, deren einfachstes geometrisches Bild, wie hier beiläufig bemerkt sei, der Inbegriff aller Punkttransformationen ist, die alle Kreise in Kreise umwandeln.

D) *Gruppen, die einfach unendlich viele Schaaren invariant lassen:*

$$\left| \begin{matrix} q \\ p + \varepsilon y q \end{matrix} \right|, \quad \left| \begin{matrix} q \\ p \\ xp + yq \end{matrix} \right|.$$

E) *Gruppen, die ∞^∞ Schaaren invariant lassen.*

Eine solche Gruppe enthält nur eine einzige infinitesimale Transformation, etwa:

$$\left| p \right|.$$

§ 20.

Allgemeine Betrachtungen.

Wie schon in der Einleitung gesagt, glaube ich, dass meine Theorie der Transformationsgruppen, deren erste Elemente in der vorangehenden Abhandlung entwickelt sind, als eine neue Theorie zu betrachten ist, wenn sie gleich mit mehreren mathematischen Disciplinen, insbesondere mit der Galoischen Substitutionstheorie, mit der Geometrie und der modernen Mannigfaltigkeitslehre, mit der Theorie der Differentialgleichungen und endlich auch mit der Invariantentheorie viele Berührungspunkte besitzt. Ich werde mir erlauben, meine Auffassung näher zu präcisiren. Zu diesem Zwecke bespreche ich hier alle mir bekannten älteren (vor 1874 publicirten) Untersuchungen, die mit den meinigen mehr oder weniger verwandt sind.*) Gleichzeitig mache ich einige allgemeine Bemerkungen über die *neuen* Gedanken, die meinen Untersuchungen zu Grunde liegen.

Abel bestimmt in seiner ersten Abhandlung in Crelle's Journal die allgemeinste symmetrische Function $F(xy)$, die eine Relation von der Form

$$F(F(xy)z) = F(xF(yz))$$

erfüllt. Dieses Problem ist ein specieller Fall des einfachsten Problems in meiner Theorie. Denn die Aufgabe, die allgemeinste eingliedrige Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu bestimmen, kommt darauf hinaus, die Functionalgleichung

$$F(F(xa)b) = F(x\varphi(ab))$$

mit den unbekannten Functionen F und φ in allgemeinster Weise zu befriedigen.

Mit der Substitutionstheorie**) ist meine Transformationstheorie genau verwandt. Die Analogie wie auch der Unterschied zwischen beiden Disciplinen beruht einerseits darauf, dass die Substitutionstheorie sich auf discrete Mannigfaltigkeiten, die Transformations-

*) Da meine Kenntniss der mathematischen Litteratur nur unvollkommen ist, muss ich befürchten, dass die Citate des Textes unvollständig sind. Ich werde jede etwaige Berichtigung, die ich für meine späteren Publicationen über Transformationsgruppen verwerthen könnte, mit Dank empfangen.

**) Vergleiche Camille Jordan's traité des substitutions; (Galois, Cauchy).

theorie dagegen auf continuirliche Mannigfaltigkeiten bezieht, andererseits darauf, dass je zwei Operationen einer Substitutionsgruppe immer endlich verschieden sind, während die Operationen einer Transformationsgruppe von continuirlichen Parametern abhängen*). In der Theorie der algebraischen Gleichungen spielt die Substitutionstheorie bekanntlich eine fundamentale Rolle. Dem entsprechend wird die Theorie der Transformationsgruppe eine nicht unwichtige Rolle in der Theorie der Differentialgleichungen spielen. Und zwar hat meine Theorie Bedeutung nicht allein für solche Differentialgleichungen, die eine Transformationsgruppe gestatten, sondern überhaupt für beliebige Differentialgleichungen. Dies beruht wesentlich auf den folgenden Bemerkungen. Die Frage, ob eine vorgelegte Differentialgleichung $G = 0$ (oder ein System solcher Gleichungen) durch eine zweckmässige Punkt- oder Berührungstransformation auf eine gewisse Form $F = 0$ gebracht werden kann, verlangt zu ihrer Erledigung in jedem einzelnen Falle nur solche Operationen, die man in der Integralrechnung als ausführbar zu bezeichnen pflegt. Gestattet sowohl $G=0$ wie $F=0$ je eine Transformationsgruppe, so ist zunächst nothwendig, dass die eine Gruppe in die andere Gruppe übergeführt werden kann. Hat man gefunden einerseits, dass weder $F = 0$ noch $G = 0$ eine Transformationsgruppe gestattet, andererseits dass $G = 0$ auf die Form $F = 0$ gebracht werden kann, *so verlangt diese Ueberführung nur ausführbare Operationen.* — Gestattet eine Differentialgleichung oder ein System solcher Gleichungen eine Transformationsgruppe, so dient dieser Umstand, wie ich schon gezeigt oder jedenfalls angedeutet habe, entweder zur Bestimmung des allgemeinen Integrals oder jedenfalls zur Auffindung gewisser ausgezeichneter Classen von Integralen**).

Dass meine Transformationstheorie mit der Invariantentheorie verwandt ist, beruht darauf, dass sie sich mit solchen Eigenschaften von Differentialgleichungen beschäftigt, die bei beliebigen Punkt- oder Berührungstransformationen ungeändert bleiben. Ich denke hierbei nicht allein an die Cayley-Sylvester'sche Invariantentheorie, sondern zugleich an die von Lipschitz und Christoffel angestellten (mir leider fast unbekannten) Untersuchungen über die Transformation von Differentialausdrücken.

---

*) An dieser Stelle habe ich C. Jordan's Bestimmung aller Gruppen von Bewegungen zu nennen. Er betrachtet zwei Gruppen als äquivalent, wenn die eine in die andere durch eine *orthogonale* Transformation übergeführt werden kann. Bei *meinen Untersuchungen werden dagegen zwei Gruppen als äquivalent betrachtet, wenn die eine durch eine ganz beliebige analytische Transformation in die andere übergeführt werden kann.*

**) Die Transformationsgruppe einer vorgelegten Differentialgleichung kann unendlich viele Parameter enthalten. Andererseits ist wichtig zu bemerken, dass Differentialgleichungen Gruppen von *unendlich-deutigen* Transformationen gestatten können.

Die Riemann-Helmholtz'schen Untersuchungen über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, stehen in directem Zusammenhange mit der Theorie der Transformationsgruppen. Helmholtz's bekannte Note (Göttinger Nachrichten 1868, Nr. 9) beschäftigt sich in meiner Terminologie eben mit der Bestimmung einer gewissen sechsgliedrigen Gruppe eines dreifach ausgedehnten Raumes*). Die Riemann-Helmholtz'schen Untersuchungen beschränken sich auf die metrische Geometrie. Die Theorie der Transformationsgruppen giebt u. A. eine ähnliche eingehende Discussion der *projectivischen* Geometrie eines n-fach ausgedehnten Raumes, wie ich bei einer anderen Gelegenheit näher nachweisen werde.

Die Geometrie beschäftigt sich bekanntlich häufig mit Transformationsgruppen, so z. B. mit der allgemeinen linearen Gruppe, mit der orthogonalen Gruppe, mit der Gruppe aller conformen Transformationen u. s. w. In meinen ersten geometrischen Arbeiten betrachtete ich einige neue Gruppen. In der Note: „Ueber die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye'schen Complexes"**) beschäftigte ich mich mit der Gruppe aller Berührungstransformationen, die eine gewisse partielle Differentialgleichung 2. O., die mit dem tetraedralen Liniencomplexe genau zusammenhängt, invariant lassen. Sodann untersuchte ich zusammen mit Klein, der seinerseits sich mit Anwendungen der Substitutionstheorie auf die Geometrie beschäftigt hatte, diejenigen Flächen, die durch zweifach unendlich viele permutable lineare Transformationen invariant bleiben***). Ferner bestimmte ich in einer Arbeit über Complexe (Math. Ann. Bd. V.) u. A. eine wichtige neue Gruppe, nämlich den Inbegriff aller Berührungstransformationen, bei denen Krümmungslinien invariante Curven sind; ich zeigte, dass diese Gruppe durch eine merkwürdige Berührungstransformation in die allgemeine projectivische Gruppe des Raumes umgewandelt werden kann. Endlich entwickelte Klein in der Programmschrift: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen"†) die Auffassung, dass sich die Methoden in der Mathematik insbesondere in der Geometrie in vielfacher Hinsicht durch die Transformationsgruppe charakterisiren lassen, welche sie adjungiren, d. h. durch die Gruppe derjenigen Aenderungen, welche, im Sinne der jedesmaligen Methode, als unwesentlich betrachtet werden.

Bei Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen 1. O. bemerkte ich, dass die Formeln, die in dieser Disciplin auftreten, bei Anwendung des Begriffs der *infinitesimalen Transformation* einer bemerkens-

*) Klein verdanke ich die Kenntniss dieses Umstandes wie auch der Note.

**) Göttinger Nachrichten, Januar 1870.

***) Comptes Rendus 1870, Math. Ann. IV.

†) Erlangen, 1872.

werthen begrifflichen Auffassung zugänglich werden. Insbesondere steht das sogenannte Poisson-Jacobi'sche Theorem, wie auch die bekannte Jacobi'sche Identität, in genaustem Zusammenhange mit der Theorie der Zusammensetzung infinitesimaler Transformationen*). Durch Verfolgung dieser Bemerkung kam ich zu dem überraschenden Resultate, dass alle Transformationsgruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch Einführung von zweckmässigen Variabeln auf die *lineare* Form reducirt werden können, wie auch, dass *die Bestimmung aller Gruppen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch die Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen geleistet werden kann.* Diese Entdeckung, deren erste Spuren auf Abel und Helmholtz zurückzuführen sind, ist der Ausgangspunkt meiner vieljährigen Untersuchungen über Transformationsgruppen gewesen.

Meine erste Publication über diesen Gegenstand (Göttinger Nachrichten 1874, Nr. 22) enthält nicht allein ein Resumé aller Resultate der gegenwärtigen Abhandlung, sondern zugleich die Bestimmung aller Gruppen von Berührungstransformationen einer Ebene, wie auch Andeutungen hinsichtlich der Anwendungen meiner Theorie auf Differentialgleichungen. Eine ausführlichere Redaction meiner wichtigsten Resultate gab ich sodann in fünf Abhandlungen**), die in dem norwegischen „Archiv for Mathematik og Naturvidenskab", Bd. 1, 3 und 4, gedruckt sind. An derselben Stelle gedenke ich einerseits die Theorie eines n-fach ausgedehnten Raumes, insbesondere diejenige des gewöhnlichen zu entwickeln, andererseits Anwendungen meiner Theorie auf Differentialgleichungen zu machen. Eine erste solche Anwendung gab ich bereits in der Abhandlung: „Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven", Universitätsprogramm, Christiania 1879.

Indem ich schliesse, kann ich die folgende Bemerkung nicht zurückhalten. Bei meiner Definition des Begriffs Transformationsgruppe forderte ich ausdrücklich, dass die Transformationen der Gruppe sich paarweise als inverse Operationen zusammenordnen lassen sollen. Diese Forderung wird von dem Inbegriffe aller Transformationen, die eine Differentialgleichung invariant lassen, von selbst erfüllt.

Christiania, December 1879.

---

*) Man trifft jetzt zuweilen die Auffassung: die berühmte Jacobi'sche Identität habe nur einen untergeordneten Werth. Hierzu möchte ich bemerken, dass diese Identität die analytische Grundlage meiner Transformationstheorie bildet.

**) In diesen Vorarbeiten haben sich mehrere Ungenauigkeiten in den Beweisen eingeschlichen. Auf einige solche Fehler in den beiden ersten in Christiania gedruckten Arbeiten machte mich Mayer gelegentlich aufmerksam. Wenn man ausgedehnte Theorien, die durch *gemischte* Methoden gefunden sind, bei der Redaction in die Sprache der reinen *Analysis* überträgt, so ist es schwer, Ungenauigkeiten in den Beweisen zu vermeiden.