

Sur les systèmes linéaires.

Par G. Peano à Turin.

M. Carvallo a publié dans ce journal, deuxième année, pag. 1, 225, 311, sur ce sujet, des notes de la plus grande importance. Mais il y a deux lacunes, qu'il convient de combler.

À la pag. 11, on admet pour e^φ , lorsque φ est un système linéaire, la définition

$$e^\varphi = 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \dots$$

et il ajoute: „Il resterait à montrer que ce développement est convergent“. Or j'ai donné cette démonstration dans ma note „Intégration par série des équations différentielles linéaires“ (Atti Acc. Torino, 1887, et Mathematische Annalen).

À la pag. 227 l'A. en traitant la formule de Taylor appliquée aux vecteurs, dit: „Toutefois ce développement doit être indéfiniment prolongé car on ne saurait établir ici la formule du reste“. J'ai donné, dans mon *Calcolo geometrico*, (Torino, 1888) plusieurs formes du reste R dans le développement

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(t) + R,$$

lorsque $f(t)$ est un complexe quelconque (nombre imaginaire, vecteur, quaternion, système linéaire etc.) fonction de la variable réelle t . On a:

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R}{h^n} = 0,$$

c'est à dire, R est un infiniment petit, avec h , d'ordre supérieur à l' $n^{\text{ième}}$ et cela en supposant seulement l'existence des dérivées écrites dans la formule, pour la valeur particulière t de la variable, sans supposer leur existence ou continuité aux environs de la valeur considérée.

$$(2) \quad R = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} m,$$

où m est une valeur moyenne entre celles de $f^{(n+1)}(t+\theta h)$, lorsque la variable réelle θ varie entre 0 et 1. Elle correspond à l'expression de Lagrange; mais on ne peut pas affirmer ici que m est une des valeurs de $f^{(n+1)}(t+\theta h)$, comme cela arrive à $f(t)$ est une fonction réelle.

$$(3) \quad R = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(t+\theta h) d\theta,$$

comme pour les fonctions réelles.

Je ne donne pas ici les démonstrations de ces formules, et de beaucoup d'autres formes du reste, qu'on obtient en transformant celles écrites; car cela est une application bien simple des théorèmes de l'Analyse, généralisés aux nombres complexes d'ordre quelconque.