Ueber eine geometrische Verwandtschaft fünften Grades.

Von H. Müller in Freiburg i. B.

Im 62. Bande des Crelle'schen Journales hat O. Hesse folgende Aufgabe behandelt:

Es seien in zwei Ebenen E und G zwei Gruppen $p_1\ p_2\ p_2 \ldots p_7$ und $q_1\ q_2\ q_3 \ldots q_7$ von je 7 Punkten gegeben. Man soll diejenigen Paare von Punkten p und q finden, für welche die Bedingung:

$$p\,(p_1\,p_2\,p_3 \ldots p_7) \text{ proj. } q\,(q_1\,q_2\,q_3 \ldots q_7)$$

erfüllt ist.

Es existiren bekanntlich drei solcher Punktepaare. Setzt man zwischen zwei ebenen Systemen in E und G eine Verwandtschaft zweiten Grades fest, so dass die Punkte $p_1\ p_2 \ldots p_7$ in E den Punkten $q_1\ q_2 \ldots q_7$ in G der Reihe nach entsprechen, so sind je zwei Punkte p, q eines der genannten Punktepaare, zugeordnete Hauptpunkte der beiden Systeme.

Die Aufstellung der durch die Paare $p_1\,q_1,\ p_2\,q_2 \ldots p_7\,q_7$ entsprechenden Punkte bestimmten Verwandtschaft zweiten Grades zwischen E und G kann durch die Aufeinanderfolge von mehreren linearen Constructionen erreicht werden*). Darauf ergeben sich dann die Hauptpunkte in dem einen der beiden Systeme als gemeinsame Punkte zweier collinearer Systeme oder als Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte, von denen ein gemeinsamer Punkt bekannt ist. Hierdurch ist eine synthetische Lösung der oben genannten, von Hesse analytisch behandelten Aufgabe, gegeben.

Man kann nun dieselbe Frage dadurch, dass man sie mit zwei andern in Zusammenhang bringt, direct, das heisst ohne Zuziehung der Verwandtschaft zweiten Grades, lösen.

Die beiden Aufgaben, welche zur Lösung der ursprünglich gegebenen führen, sind die folgenden:

---

*) Schroeter, Crelle's J. Bd. 62. Reye, Schloemilch's Zeitschrift. Bd. X.

1) In den Ebenen E und G sind zwei Gruppen $p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,p_5$ und $q_1\,q_2\,q_3\,q_4\,q_5$ von je 5 Punkten gegeben. Jedem Punkte p in E entspricht bekanntlich im Allgemeinen ein einziger Punkt q in G, so dass:

$$p(p_1\,p_2\,..\,p_5) \text{ proj. } q(q_1\,q_2\,..\,q_5).$$

Durch diese entsprechenden Punkte p und q ist eine Verwandtschaft zwischen den ebenen Systemen E und G festgestellt, welche näher untersucht werden soll.

2) In E und G seien zwei Gruppen $p_1\,p_2\,...\,p_6$ und $q_1\,q_2\,...\,q_6$ von je 6 Punkten gegeben. Welches ist der geometrische Ort der Punkte p und q, wenn dieselben der Bedingung:

$$p(p_1\,p_2\,...\,p_6) \text{ proj. } q(q_1\,q_2\,...\,q_6)$$

genügen sollen.

Diese Punkte sollen nun im Folgenden behandelt werden. Ausserdem befindet sich in § 3. noch die Angabe einer besonders einfachen Construction der durch 9 Punkte bestimmten Curve dritter Ordnung und des durch 8 Grundpunkte eines Büschels solcher Curven bestimmten neunten Grundpunktes.

§ 1.

Um die Aufgabe 1) zu behandeln, beziehen wir zunächst zwei Punktsysteme s und s_1 in E und G collinear aufeinander, so dass den Punkten $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ in s die Punkte $q_1\,q_2\,q_3\,q_4$ in s_1 entsprechen.

Sodann beziehen wir in denselben Ebenen E und G zwei Systeme σ und σ_1 collinear auf einander, so dass die $p_2\,p_3\,p_4\,p_5$ in σ den Punkten $q_2\,q_3\,q_4\,q_5$ in σ_1 entsprechend sind.

Soll nun zu einem beliebigen Punkte p in E der Punkt q in G gesucht werden, so dass

$$p(p_1\,p_2\,..\,p_5) \text{ proj. } q(q_1\,q_2\,..\,q_5),$$

so hat man zu bestimmen:

1) Den Kegelschnitt H, welcher im Systeme s_1 dem als zu s gehörig betrachteten Kegelschnitt $\overline{p\,p_1\,p_2\,p_3\,p_4}$ entspricht.

2) Dem Kegelschnitt J, welcher im Systeme σ_1 dem als zu σ gehörig betrachteten Kegelschnitt $\overline{p\,p_2\,p_3\,p_4\,p_5}$ entspricht.

R und L haben die drei Punkte $q_2\,q_3\,q_4$ gemein. Ihr vierter Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt q.

Besondere Fälle. Dem Punkte p_1 in E entsprechen in G die Punkte eines Kegelschnitts L_1, welcher durch $q_2\,q_3\,q_4\,q_5$ geht, aber p_1 nicht enthält. L_1 kann mit Benutzung der collinearen Systeme σ und σ_1 construirt werden oder auf andere bekannte Arten*).

*) Cremona, ebene Curven Nr. 62.

Ebenso entsprechen den Punkten $p_2\,p_3\,p_4\,p_5$ in E bezüglich die Punkte von Kegelschnitten L_2, L_3, L_4, L_5, welche auch nur je 4 von den 5 Punkten $q_1\,q_2\,..\,q_5$ enthalten.

Ferner entsprechen den Punkten $q_1\,q_2\,..\,q_5$ in G, respective die Punkte von 5 Kegelschnitten $R_1\,R_2\,..\,R_5$ in E.

Allen Punkten des Kegelschnitts $\overline{p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,p_5}$ in E entspricht in G ein einziger Punkt, welcher mit q_{15} bezeichnet werden soll. Derselbe wird erhalten als vierter Durchschnittspunkt der beiden Kegelschnitte, welche in s_1 und σ_1 dem Kegelschnitt $\overline{p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,p_5}$ entsprechen, wenn der letztere nach einander als den beiden Systemen s und σ angehörig betrachtet wird.

Ebenso entspricht den Punkten des Kegelschnitts $\overline{q_1\,q_2\,q_3\,q_4\,q_5}$ in G ein einziger Punkt p_{15} in E.

Es ist leicht zu sehen, dass alle Kegelschnitte $L_1\,...\,L_5$ durch q_{15} und $R_1\,...\,R_5$ durch p_{15} gehen.

Wir lassen nun den Punkt p gerade Linien auf E beschreiben und fragen, welche Curven der von p eindeutig abhängende Punkt q in G beschreibt.

a) p bewege sich auf der Geraden $p_2\,p_3$. Fällt p mit p_2 oder p_3 zusammen, so entsprechen ihm bezüglich alle Punkte der Kegelschnitte L_2 oder L_3. Ist aber p von p_2 und p_3 verschieden, so muss der entsprechende Punkt q offenbar auf $q_2\,q_3$ gelegen sein. Um ihn zu finden, braucht man z. B. nur den Kegelschnitt M zu construiren, welcher durch $q_1\,q_3\,q_4\,q_5$ geht und über diesen Punkten das Doppelschnittverhältniss $p(p_1\,p_3\,p_4\,p_5)$ fasst.

Bewegt sich p, so bilden die Kegelschnitte M ein mit der von p beschriebenen Punktreihe projectivisches Kegelschnittbüschel. Daher bilden die Schnittpunkte der Kegelschnitte dieses Büschels mit der durch einen der Grundpunkte q_3 gehenden Geraden $q_2\,q_3$ auch eine Punktreihe, welche mit der von p beschriebenen projectivisch ist.

Ebenso entspricht jeder Geraden in E, welche irgend zwei $p_r\,p_s$ der Punkte $p_1\,p_2\,..\,p_5$ verbindet, eine Gerade in G, welche durch die entsprechenden Punkte $q_r\,q_s$ geht, und diese beiden Linien sind durch die Punkte $p\,q$ projectivisch auf einander bezogen.

Zu dieser Linie sind dann noch die zwei Kegelschnitte L_r und L_s zu rechnen, welche den Punkten p_r und p_s selbst entsprechen, so dass die drei Curven eine zusammengesetzte Curve fünfter Ordnung bilden, welche in $q_1\,q_2\,q_3\,q_4\,q_5$ und q_{15} Doppelpunkte hat.

b) p bewege sich auf einer zum Beispiel durch p_2 gehenden Geraden C, welche keinen andern der Punkte $p_1\,...\,p_5$ enthält. Die Kegelschnitte $\overline{p\,p_1\,p_2\,p_3\,p_4}$ und $\overline{p\,p_2\,p_3\,p_4\,p_5}$ bilden, während p sich auf C bewegt, zwei durch diesen Punkt projectivisch auf einander bezogene

Kegelschnittbüschel. Dasselbe findet demnach mit den Kegelschnitten H und J statt, als deren vierten Durchschnittspunkt man den Punkt q erhält.

Die beiden Büschel der Curven H und J haben 3 Grundpunkte $q_2\, q_3\, q_4$ gemeinsam. Die entsprechenden Curven derselben schneiden sich also nach bekannten Sätzen*) auf einer Curve vierter Ordnung, welche in $q_2\, q_3\, q_4$ Doppelpunkte hat.

Aus dem vorigen a) sieht man leicht, dass die beiden Kegelschnitte dieser Büschel, welche in zwei Gerade zerfallen (von denen jeweils die eine $q_3\, q_4$ ist) sich entsprechen. Man braucht nämlich nur zu bedenken, dass dem Durchschnitt von C und $\overline{p_3\, p_4}$ in G ein von q_3 und q_4 verschiedener Punkt der Geraden $\overline{q_3\, q_4}$ entspricht. Derselbe muss auf zwei entsprechenden Kegelschnitten H, J liegen, und diese enthalten daher beide die Gerade $\overline{q_3\, q_4}$.

Diese Gerade $\overline{q_3\, q_4}$ ist aber der Frage fremd. Sie wurde nur dadurch erhalten, dass wir zur Construction von q specielle Systeme collinear auf einander bezogen, in welchen die ursprünglich gleichwerthigen Punkte $p_1 \ldots p_5$, $q_1 \ldots q_5$ in verschiedener Weise verwendet waren.

Es bleibt also noch eine Curve D dritter Ordnung übrig, welche einfach durch q_1, q_3, q_4, q_5 geht und in q_2 einen Doppelpunkt hat. D geht aber auch durch q_{15}, denn dieser Punkt ist demjenigen Punkt von E entsprechend, in welchem C von dem Kegelschnitt $\overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}$ zum zweiten Male geschnitten wird.

Wie die durch p_2 gehende Gerade C durch einen weitern Punkt m auf ihr bestimmt ist, so sind auch die Punkte $q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, q_5$, q_{15}, n, von denen q_{15} ein Doppelpunkt von D ist, und n dem Punkte m in E entsprechen soll, zur Bestimmung der Curve D vollständig hinreichend. C und D sind durch die Punkte p, q projectivisch auf einander bezogen.

Fällt p mit den zweiten Durchschnittspunkten von C und den Kegelschnitten R_1, R_3, R_4, R_5, $\overline{p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5}$ zusammen, so geht q bezüglich durch die Punkte q_1, q_3, q_4, q_5, q_{15}.

Fällt dagegen p mit einem der beiden Schnittpunkte von C und R_2 zusammen, so befindet sich q im Doppelpunkt q_2. Durchläuft p die Strecke zwischen diesen beiden Schnittpunkten, so durchläuft q die Schleife des Doppelpunktes.

Dem Punkte p_2 von C selbst entspricht der Kegelschnitt L_2 in G, welcher D ausser in den Punkten q_1, q_3, q_4, q_5, q_{15} noch in einem weitern Punkte x trifft, den man, wenn nur auf die projectivische Be-

---

*) Cremona, ebene Curven § 10.

ziehung von C und D gesehen wird, auf dieser Curve als p_2 entsprechend zu nehmen hat.

D und L_2 bilden wieder eine zusammengesetzte Curve fünfter Ordnung, welche in $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{15}$ Doppelpunkte hat.

Daher der Satz:

Einer durch p_1 gehenden Geraden C in E entspricht in G eine Curve dritter Ordnung D, welche durch die 6 Punkte $q_1 \ldots q_5, q_{15}$ geht und in q_r einen Doppelpunkt hat. Ausserdem aber noch für den Punkt p_r selbst der Kegelschnitt L_r.

c) Die Gerade C soll durch keinen der 5 Punkte $p_1 p_2 \ldots p_5$ gehen.

Wir denken uns C als perspectivischen Durchschnitt zweier projectivischen Strahlbüschel mit den Mittelpunkten p_2 und p_3, in denen demnach die Gerade $\overline{p_2\, p_3}$ sich selbst entsprechen muss. Der Punkt p auf C wird durch zwei entsprechende Strahlen $\overline{p_2\, p}$, $\overline{p_3\, p}$ projicirt. Diesen beiden Strahlen entsprechen in G zwei Curven D und F dritter Ordnung, welche durch $q_1\, q_2 \ldots q_5\, q_{15}$ gehen und von denen D in q_2 und F in q_3 einen Doppelpunkt hat. D und F können sich daher nur in einem weitern Punkt q schneiden, welcher dem Punkte p in E entspricht. Bewegt sich p auf C, so beschreiben D und F projectivische Curvenbüschel dritter Ordnung. Die entsprechenden Curven dieser Büschel schneiden sich auf einer Curve sechster Ordnung, welche in q_1, q_4, q_5, q_{15} Doppelpunkte hat und in q_2, q_3 dreifache Punkte. Man sieht aber, dass diejenigen Curven dritter Ordnung, welche in beiden Büscheln der Geraden $\overline{p_2\, p_3}$ und somit sich selbst entsprechen, beide die Gerade $\overline{q_2\, q_3}$ enthalten. Diese Gerade hat wieder mit unserer Frage nichts zu thun. Es bleibt daher der Satz:

Einer Geraden C in E, welche durch keinen der fünf Punkte $p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5$ geht, entspricht in G eine einfache Curve S fünfter Ordnung, welche in $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{15}$ Doppelpunkte hat.

Die Curven C und S sind durch die Punkte p und q projectivisch auf einander bezogen. Fällt p mit einem der Durchschnittspunkte von C und R_r zusammen, so befindet sich q in dem Doppelpunkte q_r und durchläuft p die Strecke zwischen diesen beiden Punkten, so beschreibt q die Schleife des Doppelpunktes q_r.

Fällt aber p mit einem der beiden Schnittpunkte von C und $\overline{p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5}$ zusammen, so befindet sich q im Doppelpunkte q_{15} und während p die zwischen den beiden Punkten gelegene Strecke durchläuft, muss q die Schleife des Doppelpunktes q_{15} durchlaufen.

Die Gerade C ist durch zwei ihrer Punkte m und m_1 bestimmt. Ebenso ist S bestimmt durch die entsprechenden Punkte n und n_1 in G zusammen mit den 6 festen Doppelpunkten. Die Verwandtschaft der Systeme E und G ist also vom fünften Grade.

§ 2.

Um die zweite Frage zu behandeln, nehmen wir in E und G zwei Gruppen $p_1 p_2 \ldots p_6$ und $q_1 q_2 \ldots q_6$ von je 6 Punkten.

Wie die Punktgruppen $p_1 \ldots p_5$ und $q_1 \ldots q_5$ zur Construction der Punkte p_{15} und q_{15} Veranlassung gaben, so entstehen auf dieselbe Weise aus den Gruppen $p_2 p_3 \ldots p_6$ und $q_2 q_3 \ldots q_6$ die Punkte p_{26} und q_{26}, ferner aus $p_3 \ldots p_6 p_1$ und $q_3 \ldots q_6 q_1$ die Punkte p_{31} und q_{31} etc. Wir nehmen ferner einen Punkt p in E und bestimmen zwei Punkte m und n in G durch die Bedingungen:

$$m(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \text{ proj. } p(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5),$$

$$n(q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \text{ proj. } p(p_2, p_3, p_4, p_5, p_6).$$

Sodann legen wir durch p_2 eine Gerade C_1. Den Punkten p dieser Geraden entsprechen in G:

1) Die Punkte m einer Curve dritter Ordnung M, welche durch $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{15}$ einfach geht und in q_2 einen Doppelpunkt hat.

2) Die Punkte n einer Curve dritter Ordnung N, welche durch $q_3 q_4 q_5 q_6 q_{26}$ einfach geht und in q_2 einen Doppelpunkt hat.

M und N schneiden sich daher noch in zwei Punkten λ und μ.

Von diesen beiden Punkten, z. B. von λ, soll bewiesen werden, dass

$$\lambda(q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6) \text{ proj. } \varrho\,(p_1 p_2 \ldots p_4 p_5 p_6),$$

wo ϱ ein noch zu bestimmender Punkt der Geraden C ist.

Zunächst ist klar, dass λ als Punkt von M und N zwei Punkte π, φ (deren Zusammenfallen aber bewiesen werden soll) zugehören, so, dass

$$\lambda(q_1 q_2 q_3 q_4 q_5) \text{ proj. } \pi(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)$$

und

$$\lambda\,(q_2 q_3 q_4 q_5 q_6) \text{ proj. } \varphi(p_2 p_3 p_4 p_5 p_6).$$

Daraus folgt:

$$\lambda(q_2 q_3 q_4 q_5) \text{ proj. } \pi(p_2 p_3 p_4 p_5) \text{ proj. } \varphi(p_2 p_3 p_4 p_5).$$

π und φ liegen daher auf dem durch $p_2 p_3 p_4 p_5$ gehenden Kegelschnitt, welcher über diesen 4 Punkten das Doppelschnittverhältniss $\lambda(q_2 q_3 q_4 q_5)$ fasst. π und φ fallen daher mit dem zweiten Schnittpunkt (ausser q_2) von C und diesem Kegelschnitt zusammen.

Zu dem Punkt λ in G gehört also ein einziger Punkt in E, so dass

$$\lambda(q_1 q_2 \ldots q_6) \text{ proj. } \varrho\,(p_1 p_2 \ldots p_6).$$

Ein analoger Punkt gehört auch zu μ.

Lassen wir C sich um p_2 drehen, so entstehen zwei Curvenbüschel dritter Ordnung der Curven M und N, welche zugleich projectivisch auf einander bezogen sind. Unter den festen Grundpunkten ist ein gemeinsamer Doppelpunkt für alle Curven beider Büschel und drei gemeinsame einfache Punkte.

Die projectivischen Büschel erzeugen daher eine Curve sechster Ordnung mit einem vierfachen Punkt in q_2 und drei Doppelpunkten in $q_3\, q_4\, q_5$, welche ausserdem einfach durch q_2 und q_6 geht.

Diese Curve ist aber nicht einfach. Lässt man nämlich C die Lage $\overline{p_2\, p_3}$ annehmen, so sieht man, dass die entsprechenden Curven M und N beide die Gerade $\overline{q_2\, q_3}$ enthalten. Dieselbe ist also ein Theil jener Curve sechster Ordnung. Dasselbe ist der Fall mit den Geraden $\overline{q_2\, q_4}$ und $\overline{q_2\, q_5}$. Diese 3 Linien sind aber unserer Frage fremd und nur durch die Besonderheit der angewandten Constructionen in das Resultat hereingekommen.

Von dem Ort der Durchschnittspunkte entsprechenden Curven bleibt also noch eine Curve B dritter Ordnung übrig, welche einfach durch q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 geht. Die Curve B geht auch durch die 6 Punkte $q_{15}\; q_{26}\ldots$, welche dadurch erhalten werden, dass man von den 6 Punkten $q_1\, q_2 \ldots q_6$ immer einen auslässt und denjenigen Punkt sucht, welcher von den fünf übrigen gerade so abhängt, wie q_{15} von $q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, q_5$.

Jedem Punkte λ der Curve B entspricht ein einziger Punkt ϱ in E. Die Punkte ϱ liegen ebenso auf einer Curve dritter Ordnung A, welche durch $p_1\, p_2 \ldots p_6$ und p_{15}, $p_{26} \ldots$ geht.

Anmerkung. Es kann auffallen, dass auf der durch p_2 gehenden Geraden C ursprünglich nur zwei Punkte ϱ erhalten wurden, während doch offenbar diese Punkte auf der Curve A dritter Ordnung liegen. Dies erklärt sich daraus, dass p_2 selbst der dritte Schnittpunkt von A und C ist und der diesem Punkt zugehörige σ als Durchschnitt von M und N nicht erhalten wurde, weil ja von dem vollständigen Ort der Punkte m oder n, welche den Punkten p von C entsprechen, immer ein fester Kegelschnitt weggelassen wurde. Doch ist auch der Punkt σ in B enthalten, denn, zieht man die Tangente an A im Punkte p_2, und nimmt dieselbe zur Linie C, so fällt einer der beiden Punkte ϱ mit p_2 zusammen und daher der entsprechende λ in B mit σ.

§ 3.

Durch das Bisherige ist es nun leicht, die drei Punktepaare $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ zu finden, für welche

$$\alpha(p_1\, p_2 \ldots . p_7) \text{ proj. } \beta(q_1\, q_2 \ldots . q_7) \quad \text{u. s. w.}$$

Die Punkte ϱ, λ, für welche die Bedingung gilt:

$$\varrho\; (p_1\, p_2 \ldots p_6) \text{ proj. } \lambda(q_1\, q_2 \ldots q_6),$$

liegen auf zwei Curven dritter Ordnung A und B.

Die Punkte ϱ_1, λ_1, für welche

$$\varrho_1(p_2\, p_3 \,.\,.\, p_6\, p_7) \text{ proj. } \lambda_1(q_2\, q_3 \,.\,.\, q_6\, q_7),$$

liegen ebenso auf zwei Curven A' und B'.

A und A' haben die Punkte $p_2\, p_3\, p_4\, p_5\, p_6$ und p_{26} gemeinsam. Sie schneiden sich in drei weitern Punkten α, α_1, α_2. Diesen 3 Punkten müssen in der Ebene G drei Punkte β, β_1, β_2 entsprechen, welche sowohl auf B als auch auf B_1 liegen.

Sie sind daher die Punkte, welche B und B_1 ausser $q_2 q_3 q_4\, q_5\, q_6\, q_{26}$ gemein haben.

Je zwei zugehörige dieser Punkte, z. B. α und β erfüllen daher die Bedingung:

$$\alpha(p_1\, p_2 \ldots . p_7) \text{ proj. } \beta(q_1\, q_2 \ldots . q_7).$$

Bei der analytischen Behandlung der Aufgabe von Hesse treten die drei Punktepaare als Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte auf, welche einen bekannten gemeinsamen Punkt haben. Hier dagegen stellen sich diese Punkte als Durchschnittspunkte von Curven dritter Ordnung dar, welche 6 bekannte gemeinsame Punkte haben. Diese beiden Constructionen lassen sich aber leicht auf einander zurückführen.

Hat man nämlich zwei Curven dritter Ordnung A und A', von denen man fünf gemeinsame Punkte kennt, so lassen sich auf verschiedene Arten zwei Kegelschnitte angeben, welche die 4 übrigen Schnittpunkte von A und A' gemein haben.

Die Mittel zu dieser Zurückführung bietet die Verwandtschaft zweiten Grades.

Zwei Systeme E und E_1 in derselben Ebene seien in einer solchen Verwandtschaft. a, b, c seien die Hauptpunkte im System E_1.

Dann entspricht einem Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt o in E ein projectivisches Kegelschnittbüschel in E_1. Die Grundpunkte des letzteren sind a, b, c und der Punkt ω, welcher in E_1 dem Punkte o entspricht. Die beiden projectivischen Büschel schneiden sich in einer Curve A dritter Ordnung.

Einem andern Strahlbüschel in E mit dem Mittelpunkt o_1 entspricht in E_1 ein Kegelschnittbüschel $(a\, b\, c\, \omega_1)$. Beide schneiden sich in einer andern Curve dritter Ordnung A_1. A und A_1 haben nun gemeinsam:

1) Die Punkte a, b, c.

2) Die Punkte, in denen $o\, o_1$ von dem dieser Geraden in E_1 entsprechenden Kegelschnitt getroffen wird.

Alle weitern A und A_1 gemeinsamen Punkte σ sind solche, in denen entsprechende Punkte der Systeme E und E_1 zusammenfallen.

Diese sich selbst entsprechenden Punkte σ sind aber vier und können auch als gemeinsame Punkte zweier Kegelschnitte erhalten werden, wie folgt:

$m\, n\, p$ seien die den Punkten $a\, b\, c$ zugeordneten Hauptpunkte in E.

Dem Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt m in E entspricht ein projectivisches Strahlbüschel in E_1 mit dem Mittelpunkt a. Beide erzeugen einen Kegelschnitt R. Ebenso erhält man durch die sich entsprechenden Strahlbüschel n und b einen andern Kegelschnitt R_1. R und R_1 schneiden sich in 4 Punkten σ, welche in E und E_1 sich selbst entsprechen.

Sind nun die beiden Curven dritter Ordnung A und A_1 gegeben und fünf a, b, c, d, e ihrer Durchschnittspunkte bekannt, so kommt es darauf an, zwischen zwei Systemen E und E_1 eine Verwandtschaft zweiten Grades festzusetzen, so dass A und A' beide durch entsprechende Strahl- und Kegelschnittbüschel in E und E_1 erzeugt werden.

Hierzu bedürfen wir des Satzes:

Zwischen zwei ebenen Systemen ist eine Verwandtschaft zweiten Grades bestimmt, wenn man die zugehörigen Hauptpunkte $m\,n\,p$ und $a\,b\,c$ beider Systeme wählt und ausserdem festsetzt, dass einer beliebigen, nicht durch m, n, p gehenden Geraden G in E ein beliebiger durch $a\,b\,c$ gehender Kegelschnitt R entspricht.

Beweis. G schneide die Seiten mn, mp, np in den Punkten π, ν, μ. Nimmt man auf G einen weitern Punkt o an, sucht sodann auf R einen Punkt o_1, so dass auf G und R die beiden anharmonischen Verhältnisse $(o\,\pi\,\nu\,\mu)$ und $(o_1\,c\,b\,a)$ gleich sind und bezieht man die Systeme E und E_1 so auf einander, dass $m\,n\,p$ und $a\,b\,c$ der Reihe nach zugeordnete Hauptpunkte in beiden Systemen sind, während ausserdem die Punkte o und o_1 sich entsprechen, so ist leicht zu sehen, dass die Linie G von selbst dem Kegelschnitt R entspricht.

Um nun die Aufgabe selbst zu lösen, seien wieder $A\,A_1$ die gegebenen Curven mit den bekannten gemeinsamen Punkten a, b, c, d, e.

Die Linien $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$, $\overline{de}$ mögen die Curven A und A_1 bezüglich in den Punkten $\gamma\gamma_1$, $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, oo_1 zum dritten Male schneiden. Dann sind alle diese Punkte bekanntlich durch lineare Constructionen zu finden.

p, m, n seien bezüglich die Schnittpunkte der Linienpaare $\overline{\gamma o}$ und $\overline{\gamma_1 o_1}$, $\overline{\alpha o}$ und $\overline{\alpha_1 o_1}$, $\overline{\beta o}$ und $\overline{\beta_1 o_1}$.

Man setze nun zwischen zwei Systemen E und E_1 eine Verwandtschaft zweiten Grades fest, so dass $m\,n\,p$ und $a\,b\,c$ die zugeordneten Hauptpunkte in E und E_1 sind und der Geraden oo_1 der Kegelschnitt $\overline{a\,b\,c\,d\,e}$ entspricht.

Das Strahlbüschel mit dem Mittelpunkte o in E und das entsprechende Kegelschnittbüschel in E_1 erzeugen eine Curve dritter Ordnung, welche zunächst die Punkte $o\,a\,b\,c\,d\,e$ enthält. Auf dieser Curve liegen aber auch die Punkte α, β, γ, denn der Geraden mo in E entspricht in E_1 ein in zwei Gerade zerfallender Kegelschnitt, von dem bc

ein Theil ist, und α als Durchschnittspunkt von mo und bc muss demnach der Curve dritter Ordnung angehören. Ebenso sieht man, dass auch β und γ auf dieser Curve liegen. Eine Curve dritter Ordnung, welche mit der gegebenen Curve A die Punkte $o\ a\ b\ c\ d\ e\ \alpha\ \beta\ \gamma$ gemein hat, muss aber offenbar mit ihr zusammenfallen. Ebenso wird gezeigt, dass der Büschel o_1 in E und der ihm entsprechende Kegelschnittbüschel in E_1 die Curve A_1 erzeugen. Die Punkte, welche ausser $a\ b\ c\ d\ e$ den beiden Curven gemeinsam sind, müssen also diejenigen sein, welche in den Systemen E und E_1 sich selbst entsprechen und können nach dem frühern als die Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte R und R_1 erhalten werden.

Es mag nur noch mit wenigen Worten eines besonderen Falles gedacht werden, der allerdings zu der vorliegenden Untersuchung keine Beziehung mehr hat.

Sind von zwei Curven dritter Ordnung 8 Schnittpunkte bekannt, so kennt man von den oben genannten Kegelschnitten R und R_1 schon 3 Punkte. Der vierte kann nun linear construirt werden. Man sieht daher, dass im Vorhergehenden die Lösung der Aufgabe enthalten ist, den neunten Punkt, in welchem sich zwei durch 8 gegebene Punkte gehende Curven dritter Ordnung noch schneiden, linear zu construiren.

Nur sieht man aus den bisherigen Betrachtungen nicht ein, dass alle durch diese 8 Punkte gehenden Curven dritter Ordnung denselben neunten mit einander gemein haben.

Um auch dies zu erörtern, benutzen wir den folgenden Satz, der sehr leicht zu beweisen ist.

Man kann zwischen zwei ebenen Systemen E und E_1 eine Verwandtschaft zweiten Grades dadurch festsetzen, dass man bestimmt: 4 Linien in E, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, sollen vier durch die Punkte $a\ b\ c$ gehenden Kegelschnitten in E_1 entsprechen, von denen keine drei einem Büschel angehören. $a\ b\ c$ sind dann die Hauptpunkte in E_1.

Seien nun $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h$ die gegebenen 8 Punkte. Man beziehe die Systeme E und E_1 in einer Verwandtschaft zweiten Grades so auf einander, dass den Geraden $\overline{de}$, $\overline{df}$, $\overline{ef}$, $\overline{gh}$ in E die Kegelschnitte $\overline{a\ b\ c\ d\ e}$, $\overline{a\ b\ c\ d\ f}$, $\overline{a\ b\ c\ e\ f}$, $\overline{a\ b\ c\ g\ h}$ entsprechen.

$d\,e\,f$ sind dadurch offenbar zu sich selbst entsprechenden Punkten in E und E_1 gemacht.

A sei nun eine beliebige, durch die 8 Punkte gehende Curve dritter Ordnung, welche die Gerade $\overline{gh}$ in dem Punkt o zum dritten Male trifft. Dann wird A offenbar durch das Strahlbüschel o in E und das ihm in E_1 entsprechende Kegelschnittbüschel erzeugt und muss daher durch den vierten in den beiden Systemen sich selbst entsprechenden Punkt σ gehen.

Lässt man o sich auf der Geraden gh bewegen, so erhält man alle Curven des Curvenbüschels, welches durch die 8 Punkte $a\,b\,\ldots\,g\,h$ bestimmt ist und den gefundenen Punkt σ als neunten Grundpunkt enthält.

Bestimmt man unter diesen Curven diejenige, welche durch einen beliebigen Punkt i geht, so hat man eine Construction der durch die 9 Punkte $a\,b\,c\,\ldots\,g\,h\,i$ bestimmten Curve dritter Ordnung. Zu diesem Zwecke ist nur nöthig, den Punkt o so zu bestimmen, dass dem durch o gehenden Strahle oi in E ein durch i gehender Kegelschnitt in E_1 entspricht. Um diesen Punkt zu finden betrachte man das Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt i in E. Demselben entspricht in E_1 ein Kegelschnittbüschel projectivisch. Dem durch i gehenden Kegelschnitt dieses Büschels in E_1 entspricht daher in E ein durch i gehender Strahl, welcher offenbar der gesuchte Strahl oi ist. Der Durchschnitt o dieser Linie mit gh ist der dritte Durchschnittspunkt der Curve dritter Ordnung $\overline{a\,b\,c\,\ldots\,g\,h\,i}$ mit der Geraden gh.

§ 4.

Legt man die Ebenen E und G (§ 2.) auf einander, so hat man in derselben Ebene zwei Systeme E, E_1, zwischen welchen jene Verwandtschaft fünften Grades besteht.

Man kann nun nach den Punkten fragen, welche in beiden Systemen sich selbst entsprechen, das heisst für welche

$$m(p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,p_5) \text{ proj. } m(q_1\,q_2\,q_3\,q_4\,q_5)\,.$$

Zunächst soll der Punkt p_5 noch weggelassen und die Punkte n gesucht werden, für welche die Bedingung:

$$n(p_1\,p_2\,p_3\,p_4) \text{ proj. } n(q_1\,q_2\,q_3\,q_4)$$

besteht.

Denkt man sich diesem Doppelschnittverhältniss einen bestimmten Werth gegeben, so befinden sich die diesem Werthe zugehörigen Punkte n auf zwei Kegelschnitten R und L, welche bezüglich durch $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ und $q_1\,q_2\,q_3\,q_4$ gehen und über diesen Punkten das gegebene Doppelschnittverhältniss fassen.

Lässt man den Werth des Doppelschnittverhältnisses sich ändern, so beschreiben R und L projectivische Kegelschnittbüschel. Die Durchschnittspunkte der entsprechenden Curven dieser Büschel liegen auf einer Curve vierter Ordnung V, welche alle gesuchten Punkte n enthält.

Man sieht nun, dass dem aus den Geraden $\overline{p_1\,p_2}$ $\overline{p_3\,p_4}$ bestehenden Kegelschnitte des einen Büschels der aus $\overline{q_1\,q_2}$ $\overline{q_3\,q_4}$ bestehende Kegelschnitt des andern entspricht.

Jene Curve vierter Ordnung geht daher nicht nur durch die acht Punkte $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ $q_1\,q_2\,q_3\,q_4$, sondern auch durch die 6 Schnittpunkte

$(\overline{p_1 p_2}, \overline{q_1 q_2})\ (\overline{p_1 p_3}, \overline{q_1 q_3}) \dots (\overline{p_3 p_4}, \overline{q_3 q_4})$ und ist durch diese vierzehn Punkte bestimmt.

Diejenigen Punkte o aber, für welche

$$o(p_2 p_3 p_4 p_5) \text{ proj. } o(q_2 q_3 q_4 q_5),$$

liegen auf einer anderen Curve W vierter Ordnung, welche durch die Punkte $p_2 \dots p_5$ $q_2 \dots q_5$ $(\overline{p_2 p_3}, \overline{q_2 q_3}) \dots (\overline{p_4 p_5}, \overline{q_4 q_5})$ geht. V und W haben die Punkte $p_2, p_3, p_4, q_2, q_3, q_4, (\overline{p_2 p_3}, \overline{q_2 q_3})\ (\overline{p_2 p_4}, \overline{q_2 q_4})$ $(\overline{p_3 p_4}, \overline{q_3 q_4})$ gemein und schneiden sich daher in 5 weitern Punkten m, welche die Eigenschaft haben

$$m(p_1 p_2 \dots p_5) \text{ proj. } m(q_1 q_2 \dots q_5),$$

und also die gesuchten in jenen Systemen sich selbst entsprechenden Punkte sind.