Ueber die Convergenz der Entwicklung einer arbiträren Function $f(x)$ nach den Bessel'schen Functionen $\overset{a}{J}(\beta_1 x)$, $\overset{a}{J}(\beta_2 x)$, $\overset{a}{J}(\beta_3 x)$, $\cdots\cdots$, wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots\cdots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{a}{J}(\beta) = 0$ vorstellen.

Von L. Schläfli in Bern.

Wenn der Parameter a grösser als -1 ist, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \overset{a}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(\lambda+a+1)} = 0$$

alle reell und paarweise entgegengesetzt. Die positiven, nach wachsender Grösse geordnet, seien $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots$ *). Dann ist in der Reihenform

---

*) Eine solche Wurzel β ist Function des Parameters a, und wenn dieser positiv ist, so zeigt der Ausdruck

$$\frac{\partial \beta}{\partial a} = \frac{2a}{\beta \left(\overset{a+1}{J}(\beta)\right)^2} \int_0^\beta \left(\overset{a}{J}(t)\right)^2 \frac{dt}{t},$$

der für $a = 0$ zu $1 : \beta\left(\overset{1}{J}(\beta)\right)^2$ wird, dass die Wurzel ununterbrochen wächst, während a von 0 aus wächst. Da für $a = \frac{1}{2}$ die positiven Wurzeln $\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ sind, und da im Allgemeinen eine sehr grosse Wurzel β annähernd die Gleichung $\cos\left(\beta - (a+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right) = 0$ befriedigt, so kann man aus der positiven Beschaffenheit von $\frac{\partial \beta}{\partial a}$ mit Sicherheit schliessen, dass für eine sehr grosse Ordnungszahl n annähernd $\beta_n = (2n + a - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ sei.

$$(1)\qquad f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} A_\lambda \overset{a}{J}(\beta_\lambda x)$$

bekanntlich Coefficientenbestimmung möglich; man hat

$$(2)\qquad A_n = \frac{2}{(\overset{a+1}{J}(\beta_n))^2}\int_0^1 tf(t)\,\overset{a}{J}(\beta_n t)\,dt\,;$$

und es entsteht die Frage, unter welchen Beschränkungen die Function $f(x)$ im Intervalle $0 < x < 1$ willkürlich gegeben werden kann, damit die Reihe (1) convergire.

Hankel hat in einer schon vor sieben Jahren verfassten, aber erst aus seinem Nachlass in diese Annalen (Bd. VIII, S. 471) eingerückten Abhandlung über die Entwicklungsform (1) die Frage gelöst. Seine Untersuchung beschreibt indess einen etwas längern Weg, als die Natur der Sache erfordert. Man kann die Schwierigkeiten, die der so weit als möglich gefasste Begriff der Stetigkeit verursacht, durch ächt analytische Verwandlungen von der Entwicklungsform (1) ab und auf diejenigen Integralausdrücke hinüberwälzen, die in der Behandlung der trigonometrischen Reihe auftreten und schon vielfach untersucht worden sind.

Sollte durch (1) die Function $x^{-a}f(x)$ innerhalb des Einheitskreises ($mod.\, x < 1$) und auf dem Rande selbst mit dem Charakter einer ganzen Function definirt sein, so müsste zuletzt $mod.\,(A_\lambda : A_{\lambda-1})$ stets kleiner als eine positive Zahl r sein, die selbst unterhalb $e^{-\pi}$ läge. Dann wäre $f(1) = 0$. Im Folgenden wird aber nur die Endlichkeit des Werthes von $f(1)$ und diejenige von $x^{-a}f(x)$ in $x = 0$ vorausgesetzt werden, ausserdem, dass $f(x)$ für alle positiven unter 1 befindlichen Argumente mit erträglicher Stetigkeit gegeben sei.

Die auf die n ersten Glieder beschränkte Summe (1) sei mit S_n bezeichnet; n sei eine sehr grosse positive ganze Zahl, die zum Unendlichwerden bestimmt ist, und es sei $A = (2n + a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$. Wenn

$$(3)\qquad T_n(t) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{2\overset{a}{J}(\beta_\lambda x)\overset{a}{J}(\beta_\lambda t)}{(\overset{a+1}{J}(\beta_\lambda))^2}$$

gesetzt wird, so ist

$$(4)\qquad S_n = \int_0^1 T_n(t)\,tf(t)\,dt.$$

Dass die Summenform T_n oscillirt wie $\sum^{\lambda=\infty} \cos(\lambda a + b)$, ist leicht zu sehen. Es handelt sich zunächst darum, sie in ein passendes Integral zu verwandeln; der zugehörige Weg wird im Wesentlichen mit dem von Hankel gebrauchten übereinstimmen.

Man betrachte das Integral

$$Z = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{g(\omega)}{\omega\left(\overset{a}{J}(\omega)\right)^2}\, d\omega,$$

wo der Weg einen kleinen positiven Kreis um eine positive Wurzel β der Gleichung $\overset{a}{J}(\omega) = 0$ beschreibt, aber keine andere Wurzel dieser Gleichung umschliesst; $g(\omega)$ bedeutet irgend eine in diesem Bereiche differentiable Function. Da

$$\overset{a}{J}(\beta+\psi) = -\overset{a+1}{J}(\beta)\psi\left(1 - \frac{\psi}{2\beta} + \cdots\right),$$

so ist

$$(\beta+\psi)\left(\overset{a}{J}(\beta+\psi)\right)^2 = \beta\left(\overset{a+1}{J}(\beta)\right)^2\psi^2(1 + 0\cdot\psi + \cdots);$$

folglich

$$\text{(5)}\qquad \frac{1}{2i\pi}\int \frac{g(\omega)}{\omega\left(\overset{a}{J}(\omega)\right)^2}\, d\omega = \frac{g'(\beta)}{\beta\left(\overset{a+1}{J}(\beta)\right)^2},$$

wenn ω einen kleinen positiven Kreis um die Wurzel β beschreibt. Um (5) auf (3) anwenden zu können, muss man also die Function $g(\omega)$ aus der Bedingung

$$g'(\omega) = 2\,\omega\,\overset{a}{J}(x\omega)\,\overset{a}{J}(t\omega)$$

bestimmen. Wie aus dem Beweise der Möglichkeit der Bestimmung der Coefficienten in (1) bekannt ist, ergibt sich aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{2\omega}{t^2 - x^2}\left(\overset{a}{J}(t\omega)\frac{\partial}{\partial\omega}\overset{a}{J}(x\omega) - \overset{a}{J}(x\omega)\frac{\partial}{\partial\omega}\overset{a}{J}(t\omega)\right) \\ &= \frac{2\omega}{t^2 - x^2}\left(t\overset{a}{J}(x\omega)\overset{a+1}{J}(t\omega) - x\overset{a}{J}(t\omega)\overset{a+1}{J}(x\omega)\right). \end{aligned}$$

(Man überzeugt sich leicht, dass dieser Ausdruck in Bezug auf t auch im Bereiche von $t = x$ den Charakter einer ganzen Function bewahrt.)

Wendet man jetzt (5) auf (3) an, so hat man:

$$(6)\quad T_n(t) = \frac{2}{t^2-x^2}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int\left\{t\overset{a}{J}(x\omega)\overset{a+1}{J}(t\omega) - x\overset{a}{J}(t\omega)\overset{a+1}{J}(x\omega)\right\}\frac{d\omega}{\left(\overset{a}{J}(\omega)\right)^2},$$

wenn der Integrationsweg aus vielen kleinen um die Wurzeln β_1, β_2, ..., β_n beschriebenen positiven Kreisen besteht. Man kann nun diese vielen Wege in einen einzigen vereinigen, der alle die genannten Wurzeln und nur diese umschliesst; er sei Umfang eines Rechtecks, das durch die Realitätslinie symmetrisch getheilt wird; eine Seite falle in die laterale Axe und habe die sehr grosse Länge $2B$ (denn 0 kann ohne Gefahr passirt werden, weil sich hier das Integral wie $\int^{\cdot}\omega\,d\omega$ verhält); die zu ihr parallele Seite schneide die Realitätslinie in $\omega = A = \left(2n+a+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$, $\left(\text{es ist dann ungefähr } A-\beta_n = \beta_{n+1}-A = \frac{\pi}{2}\right)$. Das Integral von iB bis $-iB$ verschwindet, weil der Integrand eine ungerade Function von ω ist. Die Integrale von $A+iB$ bis iB und $-iB$ bis $A-iB$ verschwinden für $B=\infty$, weil sie mit dem Factor

$$\frac{1}{\sqrt{xt}}e^{-B(2-x-t)}$$

behaftet sind, wenn anders $1-x$ (wie auch x, t) angebbar positiv ist; denn so lange ist auch $2-x-t$ positiv. Es reicht also hin, wenn man in (6) die Variable ω von $A-iB$ bis $A+iB$ führt und die positive Zahl B unendlich werden lässt. Setzt man daher $\omega = A+i\chi$, wo χ von $-B$ bis B reelle Werthe zu durchlaufen hat, so ist annähernd:

$$\frac{\overset{a}{J}(x\omega)\overset{a+1}{J}(t\omega)}{\left(\overset{a}{J}(\omega)\right)^2}\,d\omega = \frac{\cos(x\chi+iA(1-x))\sin(t\chi+iA(1-t))}{\sqrt{xt}\cdot\cos^2\chi}\,d\chi.$$

Mittelst dieses Näherungswerthes ergiebt sich aus (6) nach einigen Reductionen:

$$T_n(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{xt}}\left\{\frac{\sin[A(t-x)]}{t-x}\int_0^\infty\frac{\cos[(t-x)\chi]}{\cos^2\chi}\,d\chi\right.$$

$$\left.-\frac{\sin[A(2-t-x)]}{t+x}\int_0^\infty\frac{\cos[(t+x)\chi]}{\cos^2\chi}\,d\chi\right\}.$$

Bedeutet p eine positive Zahl, die kleiner als 1 ist, so ist

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{cos}(2p\chi)}{\operatorname{cos}^2\chi}\,d\chi = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{2p\chi}\frac{d\chi}{\operatorname{cos}^2\chi}$$

und geht, wenn man

$$\chi = \tfrac{1}{2}\log\frac{u}{1-u}$$

setzt, in

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 u^p(1-u)^{-p}\,du = \frac{p}{\sin(p\pi)}$$

über. Also ist annähernd:

$$(7)\qquad T_n(t) = \frac{1}{2\sqrt{xt}}\left\{\frac{\sin[A(t-x)]}{\sin\frac{\pi(t-x)}{2}} - \frac{\sin[A(2-t-x)]}{\sin\frac{\pi(2-t-x)}{2}}\right\}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (4), ersetzt resp. $\frac{\pi(t-x)}{2}$, $\frac{\pi(2-t-x)}{2}$ durch φ und lässt

$$m = \frac{2A}{\pi} = 2n + a + \tfrac{1}{2}$$

sein, so ergibt sich für ein sehr grosses n in tiefster Näherung:

$$(8)\qquad S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi x}^{\frac{1}{2}\pi(1-x)} \sqrt{1+\frac{2\varphi}{\pi x}}\, f\left(x+\frac{2\varphi}{\pi}\right)\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\pi(1-x)}^{\frac{1}{2}\pi(2-x)} \sqrt{\frac{2}{x}-1-\frac{2\varphi}{\pi x}}\, f\left(2-x-\frac{2\varphi}{\pi}\right)\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi,$$

ein Ausdruck, der nach den gebräuchlichen Regeln für $n=\infty$ in $f(x)$ übergeht. Da die Gleichung (7) auf $T_n(0)$, $T_n(1)$ nicht mehr anwendbar ist, so sind die Grenzen hier nicht streng zu nehmen; es muss erlaubt sein, die Intervalle an beiden Enden zu stutzen, und man muss der Gleichung (4) mit der Voraussetzung zu Hülfe kommen, dass die Integrale

$$\int_0^\varepsilon T_n(t)\,t f(t)\,dt, \qquad \int_{1-\zeta}^1 T_n(t)\,t f(t)\,dt$$

zugleich mit ε, ζ verschwinden.

Der Unterschied von dem bei der trigonometrischen Reihe vorkommenden Näherungsausdruck

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\theta}^{\pi-\frac{1}{2}\theta} f(\theta+2\varphi)\,\frac{\sin[(2n+1)\varphi]}{\sin\varphi}\,d\varphi$$

für die Reihe

$$f(\theta) = a_0 + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}(a_\lambda \cos\lambda\theta + b_\lambda \sin\lambda\theta)$$

besteht nur darin, dass hier m die Form $2n + a + \frac{1}{2}$ hat und daher im Allgemeinen incommensurabel ist, statt eine ungerade Zahl zu sein.

Bern, 17. Januar 1876.