Über wohlgeordnete Mengen.

Von

Hugo Dingler in München.

Ich habe in meiner Habilitationsschrift „Über wohlgeordnete Mengen und zerstreute Mengen im allgemeinen"*) gezeigt, daß sich auf Grund geeigneter Begriffsbildungen eine geschlossene Reihe von Sätzen über Limites wohlgeordneter Reihen unabhängig von jeder Bezeichnung aufstellen läßt, die für sämtliche wohlgeordnete Mengen (W-Reihen) gelten. Zuerst hatte wohl Gerhard Hessenberg in seinen „Grundbegriffen der Mengenlehre" (Göttingen 1906) ein detaillierteres Studium der Limites mittels allgemeiner Sätze begonnen. Nun hat Georg Cantor für die Zahlen der zweiten Zahlenklasse zwei Erzeugungsprinzipien angegeben, welche für deren Aufstellung hinreichen: es ist dies die Hinzufügung von „1" und die Bildung des Limes einer Fundamentalreihe. Andererseits ergibt sich aus den Cantorschen Sätzen, daß man mit diesen beiden Erzeugungsprinzipien allein niemals über die $Z(\mathrm{II})$ hinausgelangen kann. Denn da die Summe einer ω-Reihe von abzählbaren Mengen stets wieder eine abzählbare Menge liefert, so bleibt man mit den beiden Erzeugungsprinzipien immer innerhalb der $Z(\mathrm{II})$.

In meiner Habilitationsschrift habe ich nun zwei Sätze bewiesen, welche für alle W-Reihen gelten, und welche die Limesbildung auf Grund von Fundamentalreihen als für *sämtliche* W-Reihen ausschlaggebend erscheinen lassen. Diese Sätze sind:

1. Jede W-Reihe hat einen Limes höchster Ordnung (l. c. VI. 34).

2. Der Limes höchster Ordnung kann in der W-Reihe nur eine endliche Zahl von Malen vorkommen (l. c. VI. 33).

Um zu sehen, ob nicht, wie diese Sätze es wahrscheinlich machen, die W-Reihen mit der Cantorschen $Z(\mathrm{II})$ überhaupt zusammenfallen, dazu wäre es nötig, festzustellen, ob jeder Limes einer W-Reihe als Limes einer Fundamentalreihe betrachtet werden kann (l. c. VI. 32).

*) München 1912 bei Theodor Ackermann (im Buchhandel), weiterhin zitiert als „l. c."

Um diese Untersuchung durchzuführen, bediene ich mich einiger in meiner Habilitationsschrift gegebenen Definitionen und Sätze, die ich daher hier kurz wiedergebe:

1. Eine einfach geordnete Menge heiße kurz „Reihe“, eine wohlgeordnete „W-Reihe“. Durch jedes Element e einer W-Reihe W wird ein „Abschnitt“ bestimmt, der alle Elemente x von W enthält, für die $x \prec e$.

2. Eine Teilreihe T einer Reihe R heißt ein „Stück von R“, wenn jedes Element x von R, das T nicht angehört, und wovon mindestens eines vorhanden ist, zu sämtlichen Elementen t von T entweder in der Beziehung $x \prec t$ oder $t \prec x$ steht.

3. Enthält jedes Stück einer Reihe R, sowie sie selbst, ein erstes und letztes Element, so heißt sie eine „*endliche Reihe*“ (Stäckels Definition).*)

4. Enthält eine Reihe weder eine Teilreihe vom Typus ω noch eine solche vom Typus $^*\omega$, so ist sie eine endliche Reihe.

5. Enthält eine Reihe zu jedem ihrer Elemente außer zu einem eventuell vorhandenen ersten oder letzten Elemente ein unmittelbar vorhergehendes und ein unmittelbar nachfolgendes Element, so heißt sie eine „*geschlossene Reihe*“.

6. Eine Reihe heißt „*wohlgeordnet*“, wenn sie keine Teilreihe vom Typus $^*\omega$ enthält. (Jede fallende Teilreihe einer W-Reihe ist eine endliche Reihe.)

7. Ist eine W-Reihe R zerlegbar in eine Summe unter sich ähnlicher Stücke P, so heißt R ein „*Multiplum von P*“.

8. Betrachten wir in einer W-Reihe R, welche ein Multiplum von P ist, jedes Stück P als ein einfaches Element, so heißt die Reihe dieser Elemente „die P-Ableitung von R“ (in Zeichen $R'(P)$).

9. Hat die X-Ableitung von R kein letztes Element, dann heißt R ein „*Limes von Reihen X*“.

10. Sei R eine gegebene, R_0 eine beliebige niedrigere W-Reihe. Ist dann R stets Limes von R_0, so heißt R eine „*reine Limesreihe*“.

---

*) Der Einwurf, den ich in meiner Schrift „Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit in der Mathematik, zugleich als Einführung in die Axiomatik“, München 1915, gegen diese Definition gemacht habe, hat in der vorliegenden Abhandlung keinen unmittelbaren Ansatzpunkt und wird daher im folgenden nicht weiter berücksichtigt. Der Vorwurf macht ja nichts falsch und die mathematische Folgerichtigkeit wird durch ihn in keiner Weise gestört; er sagt nur, daß die Definition in gewisser Hinsicht nicht eng genug sei. In den folgenden Überlegungen kommt er nirgends direkt zur Wirkung, auch bei seiner Berücksichtigung würde sich nichts am folgenden ändern. Ich werde bei anderer Gelegenheit diesen Punkt eingehender zur Sprache bringen.

11. Ist R Limes von Reihen P, so ist es auch Limes von Reihen P', wenn $P' < P$.

12. Irgend ein Abschnitt einer W-Reihe, der kein letztes Element hat, heißt ein „*Limesabschnitt*“. Wegen Definition des Begriffes „*Endlimes*“ siehe l. c. VI. 17 u. 24.

Ist R Limes von Reihen X und hat X den Endlimes E, dann heißt der Endlimes von R „*von höherer Ordnung als der Limes E*“. Der Limes 1. Ordnung heißt „ω“.

Sonst wird im folgenden noch von einigen geläufigen Begriffen und Sätzen aus der Theorie der wohlgeordneten Mengen Gebrauch gemacht.

I.

Satz: *Zwei reine Limesreihen mit dem gleichen Endlimes sind ähnlich.*

Beweis: Seien R und R' zwei reine Limesreihen mit dem gleichen Endlimes. Wäre dann etwa R' ähnlich zu einem Abschnitte A von R, so wäre R Limes von Reihen A, d. h. der Endlimes von R höher als der von A gegen die Voraussetzung.

Satz: *Haben wir eine W-Reihe R ohne letztes Element, deren Endlimes von höherer Ordnung ist als alle vorhergehenden Limites, so ist sie eine reine Limesreihe und umgekehrt.*

Beweis: Wäre R keine reine Limesreihe, also z. B. nicht Limes von Reihen G, wo $G < R$. Hat dann R eine G-Ableitung $R'(G)$, so hat diese ein letztes Element. Also ist $R'(G)$ entweder eine endliche Reihe oder von der Form $U + E$, wo U ohne letztes Element, E eine endliche Reihe. Im ersten Fall würde der Endlimes in jedem der endlich vielen Summanden G vorkommen, wäre also nicht höher als alle vorhergehenden. Im zweiten Falle hätte der Abschnitt von R, dessen G-Ableitung gleich U ist, einen Endlimes höherer Ordnung als R. (Denn der Endlimes von R ist gleich dem Endlimes von G. Aber U ist Limes von Reihen G.) Beides gegen die Voraussetzung. — Hat nun R keine G-Ableitung, so läßt es sich darstellen in der Form $R_1 + G_1$, wo R_1 eine G-Ableitung hat, und $G_1 < G$. Macht man dann für R_1 genau die gleiche Überlegung bezüglich der G-Ableitung von R_1, wie oben bezüglich der G-Ableitung von R, so findet man, daß stets der Endlimes nicht höher ist als alle vorhergehenden, bzw. daß ihm höhere vorhergehen. Beides gegen die Voraussetzung. — Ist umgekehrt R eine reine Limesreihe, und L ein Limesabschnitt von R, so ist R Limes von Reihen L, d. h. der Endlimes von R höher als der von L, d. h. der Endlimes von R ist der höchste der Reihe. (Einfacher mittels des Begriffes der C-Reihe l. c. VI. 17.)

Satz: *Jeder Limes einer W-Reihe kann Endlimes einer reinen Limesreihe sein.*

Beweis: Es sei gegeben eine W-Reihe W. L sei der ihr angehörende zu untersuchende Limes. Sei dann R der zu L gehörende Limesabschnitt, so daß L der Endlimes von R ist. Dann ist entweder schon R selbst eine reine Limesreihe, dann ist der Satz erfüllt. Ist R dagegen keine reine Limesreihe, so enthält es einen höchsten Limes, der nach vorigem Satze nicht der Endlimes ist. Dieser höchste Limes kommt in R nur eine endliche Zahl von Malen vor. Es gibt dann unter den Elementen von R, die so beschaffen sind, daß nach ihnen der höchste Limes nicht mehr vorkommt, ein niederstes. Dieses sei e_1. Dieses bestimmt einen Rest R_1, der nur Limites enthält, die niedriger sind als der höchste. Dann ist entweder R_1 eine reine Limesreihe oder nicht. Ist sie es, so ist der Satz erfüllt; ist sie es nicht, so machen wir bei R_1 die gleiche Überlegung wie bei R. Wir erhalten so einen Rest R_2, der nur Limites enthält, die niedriger sind als der Höchstlimes von R_1. Die Reihe der Höchstlimites von R, $R_1, R_2, \cdots$ ist eine fallende, muß also endlich sein. Nach einer endlichen Zahl von Anwendungen des gleichen Verfahrens muß also ein Rest R_x kommen, der durch dieses Verfahren nicht mehr erniedrigt werden kann (der aber auch nicht Null ist, sonst wäre der vorhergehende Schritt der letzte). Dieser Rest muß dann eine reine Limesreihe sein, der L als Endlimes hat.

Corrolar: Ist R eine W-Reihe ohne letztes Element, und keine reine Limesreihe, ihr Endlimes L, so ist stets $R = K + L$, wo L eine reine Limesreihe mit dem Endlimes L.

Definition: Ist ein Limesabschnitt einer W-Reihe eine reine Limesreihe, so heiße er ein *„reiner Limesabschnitt“*.

Satz: *Sei R eine reine Limesreihe, e_1 und e_2 irgend zwei Elemente von ihr, so daß $e_1 \prec e_2$, dann gibt es einen kleinsten reinen Limesabschnitt von R, dem (e_1 und) e_2 angehört.*

Beweis: Sei E_2 der zu e_2 gehörende Abschnitt von R, so hat $R'(E_2)$ kein letztes Element, ist also sicher keine endliche Reihe. Dann ist $R'(E_2)$ entweder gleich der reinen Limesreihe 1. Ordnung ω, oder größer als ω. Im letzteren Fall betrachten wir den Abschnitt von R, dessen E_2-Ableitung gleich ω ist. Dieser Abschnitt ist der gesuchte kleinste reine Limesabschnitt.

Definition: Sind e_1 und e_2 Elemente einer reinen Limesreihe R, dann heißt der kleinste reine Limesabschnitt von R, dem e_1 und e_2 als Elemente angehören, *„der zu e_1 und e_2 gehörige Deckungslimes“* (in Zeichen $A(e_1 e_2)$, welches Zeichen auch den betreffenden Abschnitt bedeuten soll). Dabei heiße e_1 das Anfangselement, e_2 das Richtungselement des Deckungslimes.

Definition: Ist $L_1, L_2, \cdots, L_i, \cdots$ eine gegebene ω-Reihe von W-Reihen, so beschaffen, daß für $i < k$ auch $L_i < L_k$, so sagen wir, *die L_i streben einer Grenzreihe Λ zu*, die folgendermaßen definiert ist:

Sei $L_{i+1} = L_i + K_{i+1}$, so sei Λ definiert als die (nach Axiom l. c. II. 16 existierende) Summe: $\Lambda = L_1 + K_2 + K_3 + \cdots$.

Die Elemente von Λ, welche die Abschnitte $L_1, L_2, \cdots$ von Λ bestimmen, heißen: „*eine Λ definierende Fundamentalreihe*". Durch die Fundamentalreihe ist der Limes bestimmt.

Definition: Ist A ein Abschnitt einer W-Reihe R und ist x das auf den Abschnitt unmittelbar folgende Element von R, so schreiben wir dies in Zeichen: $A \vdash x$.

Die Angabe des auf einen Abschnitt unmittelbar folgenden Elementes heiße *die Operation der Anhängung des nächsten Elementes.*

Definition: Ist $e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots$ eine Fundamentalreihe von Elementen einer W-Reihe, so werde sie bezeichnet durch $[e_i]$. Die Angabe des durch eine Fundamentalreihe definierten Limes heiße *die Operation der Limesbildung.*

Satz: *Zu jedem Limes einer gegebenen W-Reihe läßt sich eine definierende Fundamentalreihe angeben.*

Beweis: Wir werden diesen Beweis zunächst nur teilweise führen, die verbleibende Lücke wird darnach ausgefüllt werden. Sei W die gegebene W-Reihe, L der zu betrachtende, ihr angehörige Limes. Dann hat nach vorigen Sätzen W einen reinen Limesabschnitt, dessen Endlimes L ist. Diesen Limesabschnitt nennen wir R.

Zunächst zeigt sich, daß es genügt, nachzuweisen, daß L in R eine definierende Fundamentalreihe hat. Tritt dann L später als Endlimes eines anderen Abschnittes R' von W, wo $R < R'$, wieder auf und soll dort seine definierende Fundamentalreihe angegeben werden, so verfahren wir so: Es ist $R' = K + L$, wo L eine Reihe ähnlich zu R ist. Sind dann $e_1 e_2 \cdots e_i \cdots$ die Elemente der definierenden Fundamentalreihe in R; $E_1 E_2 \cdots E_i \cdots$ die durch sie bestimmten Abschnitte von R, so sind die zu den Abschnitten $K + E_1, K + E_2, \cdots, K + E_i, \cdots$ von R' gehörigen Elemente von R' eine definierende Fundamentalreihe für den Endlimes L von R'. Es genügt daher die Betrachtung der reinen Limesreihe R.

Seien dann e_1 und e_2 irgend zwei Elemente von R und $e_1 \prec e_2$. Dann bilden wir den zu e_1 und e_2 gehörigen Deckungslimes $A(e_1 e_2)$. Fällt dann bereits dieser mit R (besser mit L) zusammen, so ist, wenn E_2 der zu e_2 gehörige Abschnitt, die Reihe der durch die Abschnitte

$$E_2, 2E_2, 3E_2, \cdots, nE_2, \cdots$$

bestimmten Elemente eine definierende Fundamentalreihe von R.

Ist nun $A(e_1 e_2) < R$ (was sonst einzig in Betracht kommt), so nennen wir das auf $A(e_1 e_2)$ unmittelbar folgende Element e_3, also $A(e_1 e_2) \vdash e_3$. Ebenso bilden wir: $A(e_1 e_3)$ und $A(e_1 e_3) \vdash e_4$. Sei allgemein auf diese Weise ein Element e_n erreicht, so bilden wir $A(e_1 e_n) \vdash e_{n+1}$. Damit ist aber eine Fundamentalreihe bestimmt:

$$[e_n] = e_1 e_2 \cdots e_n \cdots$$

und durch diese ein Limes: $\lim\limits_{n=\omega} e_n = A_\omega$.

Der Limes A_ω kann dann wiederum zu L folgende Beziehungen haben:

1. $A_\omega = R$, d. h. die Endlimites von A_ω und R sind von gleicher Ordnung. Dann ist die Fundamentalreihe $[e_n]$ die gesuchte Fundamentalreihe von L.

2. $A_\omega > R$, also $\lim e_n > L$. Sei dann etwa: $E_n \leqq R < E_{n+1}$ (wo E_n der zu e_n gehörige Abschnitt), dann kann hiervon nur $E_n = R$ eintreten, weil, wenn R zwischen E_n und E_{n+1} läge, es nicht Limes von E_n sein könnte, was seiner Eigenschaft als reiner Limesreihe widerspräche.

Ist aber $E_n = R$, so ist nach Definition: $A(e_1 e_{n-1}) \vdash e_n$ also die Reihe:

$$E_{n-1},\ 2E_{n-1}, \cdots, KE_{n-1}, \cdots$$

eine L definierende Fundamentalreihe.

3. $A_\omega < R$. Dieser Fall ist nun weiter zu behandeln. Wir hatten:

$$\lim_k A(e_1 e_k) = A_\omega.$$

Wir bilden dann wiederum $A_\omega \vdash e_{11}$, und daraus sukzessive:

$$A(e_1 e_{11}) \vdash e_{12};\ A(e_1 e_{12}) \vdash e_{13} \cdots A(e_1 e_{k-1}) \vdash e_{1k} \cdots$$

sowie
$$\lim_k A(e_1 e_{1k}) = A_{\omega 1},$$

dann wiederum $A_{\omega 1} \vdash e_{21}$. Ferner:

$$A_\omega \vdash e_{11}:\ A_{\omega 1} \vdash e_{21};\ A_{\omega 2} \vdash e_{31}; \cdots;\ A_{\omega k} \vdash e_{k1} \cdots$$

sowie
$$\lim_k A_{\omega k} = A_{\omega\omega}.$$

Ferner:
$$A_\omega A_{\omega\omega} A_{\omega\omega\omega} \cdots A_{\omega^k} \cdots$$

und
$$\lim_k A_{\omega^k} = A_{\omega^\omega} \text{ usw.}$$

Wir nennen diese Operation die Operation der sukzessiven Limesbildung. Wir setzen sie beliebig fort.

Wird dabei der Limes L erreicht oder überschritten, so treten die obigen Fälle 1. und 2. ein, so daß in diesem Falle das Vorhandensein einer definierenden Fundamentalreihe für den untersuchten Limes nachgewiesen ist. Dabei tritt im Falle 2. folgende Betrachtung für den allgemeinen Fall ein: Es ist leicht zu sehen, daß von $A(e_1 e_2)$ ab sämtliche durch das Symbol $A(e_1 e_x)$ dargestellte Limites reine Limesreihen darstellen und zwar erhalten wir, wie das obige Verfahren zeigt, auch sämtliche reinen Limites dabei. Gelangen wir also mit unserer Konstruktion bis L oder über L hinaus, so fällt L sicher mit einem der konstruierten Limites zusammen, und da diese sämtlich durch Fundamentalreihen definiert sind, so erhält damit auch L seine definierende Fundamentalreihe.

Nun fehlt noch der Nachweis, daß auch jeder Limes einer gegebenen W-Reihe durch unsere Konstruktion erreicht werden kann. Diesen Nachweis wollen wir nun gesondert führen. Wir füllen damit die erwähnte Lücke aus.

II.

Axiom: Ein Ding besteht oder besteht nicht.

Axiom: Ein bestehendes Ding ist entweder hergestellt oder nicht hergestellt. Ist ein bestehendes Ding hergestellt, so besteht es durch sich selbst und umgekehrt. Ist ein bestehendes Ding nicht hergestellt, so besteht es durch (eine Gruppe von) Bestimmungen und umgekehrt.

Definition: Jedes bestehende Ding heiße *„bestimmt"*.

Definition: Besteht ein Ding durch Bestimmungen, so heiße es *„wohlbestimmt"*.

Axiom: Jede Bestimmung ist ein Ding.

Axiom: Besteht ein Ding durch (eine Gruppe von) Bestimmungen, so besteht auch jede dieser Bestimmungen (ist ein bestehendes Ding).

Axiom: Besteht ein Ding durch eine Gruppe von Bestimmungen, so bestehen auch alle übrigen Bestimmungen des Dinges durch die Bestimmungen dieser Gruppe.

Axiom: Durch eine Gruppe von bestehenden Bestimmungen eines Dinges, welche so beschaffen sind, daß durch sie nicht alle übrigen Bestimmungen des Dinges bestehen, kann das Ding nicht bestehen. Bestehen nur die Bestimmungen dieser Gruppe, so besteht das Ding nicht.

Satz: *Ist ein Ding nicht hergestellt und nicht wohlbestimmt, so besteht das Ding nicht.*

Definition: Besteht ein Ding durch eine Gruppe von Bestimmungen, so heiße diese Gruppe: *„eine bestimmende Basisgruppe (von Bestimmungen) des Dinges."*

Jede Gruppe von Bestimmungen, welche bestimmende Basisgruppe eines Dinges sein kann, heiße *„eine Basisgruppe von Bestimmungen des Dinges"*.

Besteht keine Bestimmung dieser Gruppe durch die übrigen Bestimmungen der Gruppe, so heiße die Gruppe eine „*kanonische Gruppe*".

Definition: Bestehen die Bestimmungen einer bestimmenden Basisgruppe eines durch Bestimmungen bestehenden Dinges durch sich selbst, so heiße das Ding „*gegeben*".

Definition: Bestehen sie nicht durch sich selbst, so heißt das Ding „*B-bestimmt*" (d. h. bestimmungsbestimmt).

Satz: *Ein bestehendes Ding ist B-bestimmt, wenn eine Basisgruppe der Bestimmungen seiner Bestimmungen hergestellt, gegeben oder B-bestimmt ist.*

Satz: *Besteht ein Ding durch Bestimmungen, so ist es entweder gegeben oder B-bestimmt.*

Satz: *Ist ein Ding B-bestimmt, so ist es auch wohlbestimmt und bestimmt. Ist ein Ding wohlbestimmt, so ist es auch bestimmt.*

Axiom: Jede Menge ist ein Ding.

Axiom: Die Elemente der Menge sind Bestimmungen der Menge und zwar eine Basisgruppe von Bestimmungen.

Satz: *Sind die Elemente einer Menge bestimmt, so ist die Menge wohlbestimmt.*

Satz: *Sind die Elemente einer Menge gegeben, so ist die Menge wohlbestimmt.*

Satz: *Sind die Elemente einer Menge hergestellt, so ist die Menge gegeben.*

Axiom: Ist ein bestehendes Ding wohlbestimmt, und wird von ihm das Bestehen einer Bestimmung logisch widerspruchslos bewiesen, so ist die betreffende Bestimmung bestimmt.

Satz: *Ist eine endliche Reihe bestimmt, so ist auch ihr letztes Element bestimmt.*

Beweis: Für eine endliche Reihe ist jedes Element eine Bestimmung, auch das letzte. Diese Bestimmung wird aus der Definition der endlichen Reihe als bestehend bewiesen. Also ist die Bestimmung bestimmt; d. h. das letzte Element einer bestimmten endlichen Reihe ist bestimmt.

Definition: Ist eine Bestimmung gegeben, welche zu dem ersten Element einer ω-Reihe von Elementen und darnach zu jedem weiteren ein unmittelbar folgendes Element bestimmt, so heiße diese Bestimmung ein „*Erzeugungsprinzip*" oder eine „*Erzeugungsregel der ω-Reihe*" (*ω-Operation*).

Axiom: Eine Basisgruppe von Bestimmungen einer ω-Reihe von Elementen (Fundamentalreihe) sind:

a) das erste Element, b) die Erzeugungsregel.

NB. Im Praktischen kann jeder Fall auf diese Form gebracht werden.

Axiom: Für jede wohlbestimmte Fundamentalreihe ist ein kleinster endlicher Abschnitt bestimmt derart, daß, wenn dieser Abschnitt (durch seine sämtlichen Elemente) bestimmt (B-bestimmt gegeben, hergestellt) ist, damit jedes andere Element der Reihe bestimmt und damit auch die Erzeugungsregel der Reihe bestimmt (B-bestimmt gegeben, hergestellt) ist.

Definition: Der im vorigen Axiom genannte Abschnitt heißt *„die Basis der ω-Reihe oder Fundamentalreihe"*.

Satz: *Ist die Basis einer Fundamentalreihe B-bestimmt, so ist die Fundamentalreihe B-bestimmt.*

Ist die Basis einer Fundamentalreihe gegeben, so ist die Fundamentalreihe B-bestimmt.

Ist die Basis einer Fundamentalreihe hergestellt, so ist die Fundamentalreihe gegeben.

Satz: *Sind die Basiselemente einer Fundamentalreihe hergestellt, so ist keines derselben durch die übrigen wohlbestimmt.*

Beweis: Wäre eines durch die übrigen wohlbestimmt, so wäre die Fundamentalreihe bereits durch die übrigen Basiselemente wohlbestimmt, also wäre die gegebene Basis nicht der kleinste derartige Abschnitt gegen die Definition.

Definition: Es sei eine W-Reihe W gegeben. Es seien dann irgend zwei Elemente von ihr e_1 und e_2 ($e_1 \prec e_2$) hergestellt. Es werde dann eine Reihe von Elementen und Limites in W durch fortgesetzte Anwendung folgender drei Operationen auf die bisher bereits durch deren Anwendung (bzw. durch Gegebensein von e_1 und e_2, welches im allgemeinen die beiden ersten Elemente von W sein sollen) bestimmte Reihe wohlbestimmt:

1. durch die Operation der Bildung des Deckungslimes, wenn zwei Elemente hergestellt sind, wovon das zweite das höchste bisher durch die drei Operationen (oder durch Hergestelltsein von e_1 und e_2) Hergestellte ist,

2. durch die Operation der Bildung des höchsten Limes, falls durch Anwendung dieser drei Operationen eine diesen definierende Fundamentalreihe von Elementen durch Herstellung der Basiselemente gegeben ist,

3. durch die Operation der Anhängung und Herstellung des nächsten Elementes, wenn ein höchster Limes durch diese drei Operationen gegeben ist.

Dabei sollen sämtliche Elemente, welche nicht gegebenen Fundamentalreihen (deren Basis hergestellt ist) angehören, derart durch die früheren hergestellten Elemente bestimmt sein, daß, wenn ein Element der Reihe nicht bestimmt ist auch kein folgendes bestimmt sein kann, indem insbesondere auch alle zwischenliegenden reinen Limesabschnitte wohlbestimmt sind; umgekehrt sollen neue Elemente nur hergestellt werden, wenn weitere Elemente durch die früheren hergestellten Elemente nicht mehr wohlbestimmt sind. Die neuhergestellten Elemente sollen auf sämtliche durch die früher hergestellten Elemente wohlbestimmten Elemente folgen.

Dann heiße die Reihe der so wohlbestimmten Elemente und Limites: *der zu den beiden Elementen e_1 und e_2 gehörige Limesaufbau dieser W-Reihe.*

Die Tätigkeit der Bestimmung des Limesaufbaus heiße: *die Konstruktion des Limesaufbaues dieser W-Reihe.*

NB. Diese Forderungen lassen sich in der Praxis stets gewährleisten. Die Berücksichtigung der Möglichkeit von Unregelmäßigkeiten und Abweichungen wäre überaus langwierig und verwirrend, insbesondere aber unnötig, da ja diese Festsetzungen durchaus von uns abhängen. Sämtliche in Gebrauch befindlichen aufgestellten W-Reihen gehorchen diesen Forderungen.

Definition: Wählen wir für e_1 und e_2 die beiden ersten Elemente der gegebenen W-Reihe W, so heiße der entstehende Limesaufbau: der allgemeine Limesaufbau der W-Reihe W. Andernfalls heiße er *„speziell"*.

Definition: Jede Fundamentalreihe, die durch die Konstruktion des (allgemeinen) Limesaufbaues einer W-Reihe gegeben ist, (deren Basis also hergestellt ist) heiße eine *„für diese Konstruktion benutzte Fundamentalreihe"*.

Definition: Die Reihe der letzten Basiselemente der bei der Konstruktion eines Limesaufbaues einer W-Reihe benutzten Fundamentalreihen heiße *„die Reihe der Abbruchelemente"*, kurz *„Abbruchreihe"*. Das letzte Basiselement einer benutzten Fundamentalreihe heiße *„das Abbruchelement dieser Fundamentalreihe"*.

Satz: *Ist ein Limesaufbau gegeben, so ist seine Abbruchreihe bestimmt.*

Beweis: Im Falle eines allgemeinen oder speziellen Limesaufbaues sind die durch die drei Operationen aufgebauten, für den Limesaufbau benutzten Fundamentalreihen nach der Definition des Limesaufbaues durch die Herstellung ihrer Basis wohlbestimmt. Es ist die Basis jeder dieser Fundamentalreihen bestimmt, also auch jeweils das letzte Element dieser Basis. Damit ist aber jedes Element der Abbruchreihe bestimmt und damit die Reihe selbst.

Corrolar: Ist ein Limesaufbau gegeben, so sind sämtliche Abbruchelemente bestimmt.

Satz: *Die Abbruchreihe eines Limesaufbaues einer gegebenen W-Reihe enthält keine Teilreihe vom Typus $^*\omega$.*

Beweis: Weil die Abbruchreihe Teilreihe einer W-Reihe ist.

Satz: *Die Basiselemente der zur Konstruktion des Limesaufbaues einer W-Reihe benutzten Fundamentalreihen bilden eine kanonische Basisgruppe von Bestimmungen des Limesaufbaues.*

Beweis: Keines dieser Elemente ist durch die übrigen wohlbestimmt, durch sie aber sind sämtliche übrigen Elemente des Limesaufbaues wohlbestimmt.

Satz: *Sind die Basiselemente der zur Konstruktion eines Limesaufbaues einer W-Reihe benutzten Fundamentalreihen hergestellt, so ist der Limesaufbau gegeben. Auch wenn nur diese hergestellt sind.*

Beweis: Diese bilden eine Basisgruppe von Bestimmungen des Limesaufbaues und zwar eine kanonische.

Satz: *Enthält die Basisgruppe von Bestimmungen eines Limesaufbaues nur hergestellte Elemente, sind aber nicht sämtliche Elemente einer kanonischen Basisgruppe von Elementen bestimmt, so ist der Limesaufbau nicht gegeben.*

Beweis: Weil keine Basisgruppe von Bestimmungen des Limesaufbaues bestimmt ist.

Satz: *Die Abbruchreihe A eines gegebenen Limesaufbaues L einer gegebenen W-Reihe W enthält keine ω-Reihe als Teilreihe.*

Beweis: Angenommen, A enthalte ein Stück vom Typus ω. Da der Limesaufbau gegeben, so ist die Abbruchreihe bestimmt. Da also dieses Stück (Abschnitt) von A eine bestimmte Fundamentalreihe F wäre, so wäre deren Basis bestimmt, sowie deren letztes Element l. Sei dann F der durch die Fundamentalreihe F bestimmte Limes, e_1 das erste Element des Limesaufbaues. Dann wären nach Bestimmung des Limesaufbaues soweit, daß die Abbruchreihe gleich F ist, gemäß der Definition des Limesaufbaues jetzt die dort genannten Operationen zum Aufbau des Limesaufbaues weiter anzuwenden. Dies gibt (nach früherer Bezeichnung) $F \vdash q$, ferner $A(e_1 q)$ usw. Die auf F im Limesaufbau folgende, zum Limesaufbau benutzte Fundamentalreihe F' enthält dann als erstes Element e_1, als zweites Element aber entweder das Element q oder ein späteres Element als q. Sei dann l' das Abbruchelement von F', dann ist l' das auf l unmittelbar folgende Abbruchelement. Also sind sämtliche Elemente x von F, für welche $l \prec x$, auch so beschaffen, daß $x \prec q$, d. h. diese Elemente x liegen zwischen den beiden unmittelbar folgenden Abbruchelementen l und l', sind also keine Abbruchelemente gegen die Voraussetzung. Daher kann die Abbruchreihe niemals eine ω-Reihe sein, auch nicht eine solche als Stück oder Teilreihe enthalten.

Satz: *Die Abbruchreihe eines gegebenen Limesaufbaues ist eine endliche Reihe.*

Beweis: Da sie weder eine Teilreihe vom Typus ω noch vom Typus $*\omega$ enthält.

Definition: Haben wir eine gegebene W-Reihe W und haben wir einen allgemeinen Limesaufbau L derselben derart, daß unter den durch den Limesaufbau bestimmten Limites sich der höchste Limes H von W° befindet, so sagen wir, der Limesaufbau sei *„der zu W gehörige allgemeine Limesaufbau“*.

Ist W eine Limesreihe, dann heiße der zu W gehörige allgemeine Limesaufbau „der W deckende Limesaufbau“.

Satz: *Jeder Endlimes einer reinen Limesreihe, welche einen deckenden Limesaufbau hat, hat eine definierende Fundamentalreihe.*

Beweis: Nach dem oben teilweise bewiesenen Satze hat jeder Limes, der von dem Limesaufbau erreicht wird, eine definierende Fundamentalreihe. Dieser Fall liegt hier vor.

Definition: Es seien zwei Elemente e_1 und e_2 hergestellt, wo $e_1 \prec e_2$, derart, daß e_1 und e_2 die Basis einer ω-Reihe bilden. Es werde dann eine W-Reihe gegeben, indem folgende Operationen fortgesetzt ausgeübt werden:

1. Die Operation der Bildung des Deckungslimes, wenn zwei Elemente hergestellt sind, wovon das zweite das höchste bisher durch die drei Operationen (oder durch Hergestelltsein von e_1 und e_2) Hergestellte ist.

2. Die Operation der Bildung des höchsten Limes, falls durch Anwendung dieser drei Operationen eine diesen definierende Fundamentalreihe von Elementen durch Herstellung der Basiselemente gegeben ist.

3. Die Operation der Anhängung und Herstellung des nächsten Elementes, wenn ein höchster Limes durch diese drei Operationen gegeben ist.

Dabei sollen sämtliche Elemente, welche nicht gegebenen Fundamentalreihen (deren Basis hergestellt ist) angehören, durch die früheren hergestellten Elemente derart bestimmt sein, daß, wenn ein Element der Reihe nicht bestimmt ist, auch kein folgendes bestimmt sein kann, indem insbesondere auch alle zwischenliegenden reinen Limesabschnitte wohlbestimmt sind; umgekehrt sollen neue Elemente nur hergestellt werden, wenn weitere Elemente durch die früheren hergestellten Elemente nicht mehr wohlbestimmt sind. Die neuhergestellten Elemente sollen auf sämtliche durch die früher hergestellten Elemente bestimmten Elemente folgen.

Dann heiße eine solche W-Reihe eine *„konstruktive W-Reihe“*.

NB. Hier ist die gleiche Bemerkung anzufügen, wie bei der Definition des Limesaufbaues.

NB. Hier tritt fortgesetzt der Fall auf, daß die Basis einer Fundamentalreihe aus zwei Elementen besteht. Dies ist z. B. immer der Fall, wenn jedes Element der Fundamentalreihe durch das unmittelbar vorhergehende in gleicher Weise wohlbestimmt ist, wie das zweite Element der Reihe durch das erste.

NB. Es ist klar, daß die vorstehend genannten drei Operationen auch die Cantorschen beiden Erzeugungsprinzipien der 2. Zahlenklasse einschließen bzw. mit ihnen zusammenfallen.

Satz: *Ist eine konstruktive W-Reihe gegeben, so ist gleichzeitig ein zugehöriger deckender Limesaufbau gegeben. Umgekehrt kann zu jedem gegebenen Limesaufbau einer W-Reihe eine konstruktive W-Reihe konstruiert werden, welche von dem Limesaufbau gedeckt wird.*

Beweis: Nach den Definitionen des Limesaufbaues und der konstruktiven W-Reihen sind in beiden Fällen die Operationen identisch.

Corrolare: Jede konstruktive W-Reihe hat ein endliche Abbruchreihe. Jeder Limes einer konstruktiven W-Reihe hat eine definierende Fundamentalreihe.

NB. Überhaupt übertragen sich damit sämtliche für den Limesaufbau aufgestellten Begriffsbildungen auf die konstruktiven W-Reihen.

Satz: *Ein gemäß der 3. Operation der Definition der konstruktiven W-Reihen an eine gegebene konstruktive W-Reihe etwa anzuhängendes und herzustellendes nächstes Element (die konstruktive W-Reihe endigt also in diesem Falle naturgemäß mit einem Limes) ist durch die vorhergehenden Elemente nicht wohlbestimmt.*

Beweis: Wäre es wohlbestimmt, so dürfte nach Definition der konstruktiven W-Reihen die 3. Operation noch nicht angewandt werden.

Satz: *Die konstruktiven W-Reihen fallen mit den W-Reihen der Cantorschen zweiten Zahlenklasse zusammen.*

Beweis: Die konstruktiven W-Reihen werden durch die für die $Z(\mathrm{II})$ charakteristischen beiden Erzeugungsprinzipien aufgebaut. Außerdem hat jeder Limes derselben eine definierende Fundamentalreihe.

Satz: *Haben wir eine gegebene konstruktive W-Reihe K (die also eine endliche Abbruchreihe hat) und stellen ein neues Element Ω her, mit der Bestimmung, daß Ω das erste Element sei, das einen Abschnitt mit nicht endlich vielen Abbruchelementen bestimmt, so können die Elemente einer solchen W-Reihe niemals sämtlich bestimmt sein, die W-Reihe kann nicht gegeben sein.*

Beweis: Setzen wir K fort bis zum nächsten höchsten Limes, bzw. denken wir uns es soweit fortgesetzt, so ist das auf diesen folgende Element nicht bestimmt (nach Früherem). Also auch die Fundamentalreihe nicht gegeben oder wohlbestimmt, in der dieses Element Basiselement ist usw. Da dieses Element einer kanonischen Basisgruppe von Bestimmungen der fortgesetzten W-Reihe angehören würde, aber nicht bestimmt ist, so ist die W-Reihe nicht gegeben.

Corrolar: Das in diesem Falle hergestellte Element Ω ist also nicht unterscheidbar von dem nächsten, auf den höchsten Limes der konstruktiven W-Reihe, wenn diese eventuell soweit fortgesetzt gedacht wird, folgenden und gemäß der 3. Operation hergestellten Element.

Satz: *Die zwischen einer gegebenen konstruktiven W-Reihe K und dem neu hergestellten Elemente Ω des vorigen Satzes liegenden Elemente bestehen nicht.*

Beweis: Sie sind weder wohlbestimmt noch hergestellt.

Satz: *W-Reihen von höherer Mächtigkeit als der abzählbaren können niemals durch Fortsetzung des konstruktiven Limesaufbaues, d. h. durch Herstellung einer Basisgruppe von bestimmenden Elementen gegeben sein.*

Beweis: Weil die Abbruchreihe immer endlich sein muß und nur Zahlen der $Z(\mathrm{II})$ auf diese Weise gegeben werden können.

NB. Man kann unschwer durch Hinzufügung einiger noch abstrakterer Begriffsbestimmungen zu den vorstehenden Formulierungen dann auch noch beweisen, daß W-Reihen höherer Mächtigkeiten auch nicht auf anderen Wegen als durch Herstellung einer Basisgruppe von bestimmenden Elementen, d. h. also überhaupt nicht-gegeben sein können. Wir begnügen uns für diesmal mit dem Vorstehenden. Die dazu nötigen, etwas ungewohnten Formulierungen werden einer breiteren Basis bedürfen.

Satz: *Es kann niemals eine Wohlordnung des Kontinuums durch Herstellung von Elementen gegeben sein.*

III.

Ich füge noch einige Bemerkungen hinzu. Ich habe zuerst in Weiterführung der in meiner Habilitationsschrift gegebenen Überlegungen im Vorstehenden einige Sätze über den allgemeinen Limescharakter der W-Reihen aufgestellt. Es wird dann der Beweis, daß jeder Limes eine definierende Fundamentalreihe hat, zum Teil durchgeführt. Es bleibt zu untersuchen, wie weit dieser Satz Geltung hat. Diese Überlegung läßt sich offenbar (siehe auch l. c. VI. 32) mit den allgemeinen formalen Überlegungen über W-Reihen allein nicht durchführen. Es kommen vielmehr hier „*Existenzbetrachtungen*" in Frage. Solche sind uns etwas Ungewohntes in diesen Teilen der Mathematik, während sie in der Geometrie der Griechen und auch in unserer Analysis eine große Rolle spielen. Diese wichtigen Dinge sind hier bisher völlig unsystematisch und nebenbei behandelt worden und außer einigen kritischen Betrachtungen G. Freges ist wenig darüber gesagt worden. (Auch wo diese Fragen eine Rolle spielen, z. B. in der Analysis, liegt ihre systematische Behandlung sehr im Argen).

Es geschieht hier, soviel ich weiß, zum ersten Male, daß diese sehr abstrakten Begriffe des „bestimmt, gegeben, hergestellt", deren Behandlung bisher fast ausschließlich der Philosophie überlassen war, und die auch in der Mathematik nur sozusagen zwischen den Zeilen ein gänzlich gesetzloses, quallenhaftes (Pringsheim) Dasein führten, in konziser axiomatischer Fassung auftreten. Was ich an Axiomen und Definitionen darüber gebe, ist lediglich ein für den vorliegenden Zweck angepaßter Teil eines ausgedehnten und überaus wichtigen und fundamentalen Untersuchungsgebietes der Axiomatik, das ich als *„Dinglehre“* bezeichne, und über das ich demnächst ausführlicher berichten werde.

Teil II der vorstehenden Untersuchung stellt sozusagen eine Axiomatisierung desjenigen Teiles der Cantorschen Forschungen dar, welcher sich auf die Aufstellung der Ordnungszahlen bezieht, speziell in Richtung auf die „Existenz“. Cantor hat diese Untersuchung im wesentlichen an die Aufstellung einer speziellen Bezeichnung dieser Zahlen angeschlossen, und ist dabei zu weitgehenden Konsequenzen gelangt, die natürlich nicht als endgültig gesichert betrachtet werden konnten, solange die Existenzfrage nicht geklärt war.

Es ist klar, daß mit den genannten Existenzbetrachtungen der Gesichtspunkt der *„Bezeichnung“* eng zusammenhängt. Hessenberg hatte bemerkt, daß zur Aufstellung der Zahlen der Z(II) in Cantorscher Bezeichnung die Einführung immer neuer Zeichen notwendig sei. Ich selbst habe l. c. den Nachweis geführt, daß dies bei *jeder* möglichen Bezeichnung zutreffe.

Wollen wir eine Bezeichnung der W-Reihen von Anfang an festsetzen, so geschieht dies, indem wir die *Regeln* angeben, nach denen die Bezeichnung aufgestellt wird. Dann sind aber — vom allgemeinen Standpunkt betrachtet — diese Regeln nichts anderes als Operationen zur Erzeugung von Limites, und damit ist schon gesagt, daß sie sich erschöpfen müssen, und stets neue Regeln notwendig machen. Es ist dies in vollkommener Analogie zur Herstellung von Basiselementen von immer neuen benutzten Fundamentalreihen in unserem Limesaufbau.

Ich verweise für die Frage der Bezeichnung auf den zweiten Teil (B) meiner Habilitationsschrift.

Man hat sich in der Lehre von den wohlgeordneten Mengen bisher vielfach mit demjenigen Teile begnügt, den man den „formalen“ nennen könnte, d. h. man hat weitergearbeitet ohne die Fragen der Existenz in nähere Berücksichtigung zu ziehen. Man ist in der Mathematik in ähnlichen Fällen schon mehrfach zu Folgerungen gelangt, welche sich nachher nicht völlig aufrecht erhalten ließen. Vor derartigen Folgerungen wäre man nur durch eine absolut reinliche Scheidung zwischen formalen und existenzmäßigen Überlegungen bewahrt geblieben, doch waren die Mittel dazu noch nicht vorhanden. Bekannt ist die formelle, d. h. unreinlich formelle Behandlung der divergenten Reihen, welche derartige Konsequenzen nach sich zog, ebenso gewisse Anschauungen über den Kurvenbegriff usw.*)

Zuletzt aber möge noch der Umstand hervorgehoben sein, daß die Mengenlehre, auf deren Bahnen Georg Cantor uns führte, immer neue und immer weitergreifende Anregungen und Entwickelunganstöße bringt und bringen wird, zumal, wo sie mit der Axiomatik zusammenfließt (besonders auch in methodologischer Hinsicht).

Augsburg, Dezember 1917.

---

*) Ich habe kürzlich ausführlicher zu zeigen begonnen, wie eine reinliche (axiomatische) Scheidung des Formalen etwa auszuführen wäre, um derartige Fälle von dieser Seite her allgemein zu klären. (Siehe: „Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit in der Mathematik, zugleich als Einführung in die Axiomatik", München 1915.)