Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von sechsten Potenzen ganzer Zahlen.

Von

Albert Fleck in Berlin.

Bekanntlich ist jede ganze positive Zahl als Summe von höchstens vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar (Lagrange). Eine Verkleinerung der Höchstzahl vier ist unmöglich, da es Zahlen gibt, welche zu ihrer summatorischen Darstellung nicht weniger als vier Quadrate erfordern.

Während hier die Feststellung der Anzahl exakt geglückt ist, bietet die Zerlegung einer Zahl in (positive) Kuben oder Biquadrate oder fünfte Potenzen insofern bisher unüberwindliche Schwierigkeiten, als man nur dazu gelangt ist, festzustellen, *daß für die Höchstzahl der betreffenden Potenzen, die zur Darstellung jeder, noch so großen, Zahl sicher ausreichen, eine absolute angebbare Grenze vorhanden ist.* An die Erreichung des exakten Resultates ist aber hier noch gar nicht zu denken. *Für noch höhere als fünfte Potenzen war bisher noch nicht einmal bekannt, ob eine solche Grenze existiert.*

Für die *dritten Potenzen* ist es Herrn Maillet*) gelungen, nachzuweisen, daß jede ganze Zahl sich in eine bestimmte — für alle Zahlen gleiche — Höchstzahl von positiven Kuben zerlegen läßt. Maillet hat diese Grenze auf 17 bestimmt. Verfasser**) dieses hat sie als leicht auf 13 reduzierbar nachgewiesen. Mehr als 13 Kuben sind also zur Darstellung irgend einer Zahl nie erforderlich. Doch gibt es bis 40000 keine

---

*) Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de cubes d'entiers positifs (Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Bordeaux 1895, S. 242—247). — Eine Reproduktion des Mailletschen Beweises siehe in der folgenden Abhandlung Note **).

**) Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen (Sitzungsberichte der Berliner mathem. Gesellsch. Jahrg. V, S. 2, 1906).

Zahl, die zu ihrer Darstellung mehr als neun Kuben benötigte (v. Sterneck).*)

Für die *vierten Potenzen* zeigte Liouville**) aus der Identität:

$$6(x^2+y^2+z^2+u^2)^2=(x+y)^4+(x+z)^4+(x+u)^4+(y+z)^4+(y+u)^4+(z+u)^4$$
$$+(x-y)^4+(x-z)^4+(x-u)^4+(y-z)^4+(y-u)^4+(z-u)^4,$$

daß jede ganze positive Zahl N die Summe von höchstens 53 Biquadraten ist. Denn, da links das sechsfache Quadrat einer beliebigen Zahl n_1 steht, so ist jedes Sechsfache einer beliebigen Zahl N,

$$6N=6(n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2),$$

durch 48, also jede beliebige Zahl

$$Z=6N+\alpha \qquad (\alpha=0,1,2,3,4,5)$$

durch höchstens 53 Biquadrate ausdrückbar.

Die Zahl 53 erfuhr Reduktionen durch Realis***) auf 47, durch Lucas†) auf 45 und später††) auf 41, durch den Verfasser (s. S. 561 Note**)) dieses auf 39 und zuletzt durch Herrn Landau†††) auf 38. Doch ist keine Zahl bekannt, welche nicht durch höchstens 19 Biquadrate darstellbar wäre.

Für die *fünften Potenzen* ist durch Maillet*†) bewiesen worden, daß 192 solcher zur Darstellung jeder Zahl genügen. Diese Anzahl läßt sich leicht noch um ca. 36 Einheiten reduzieren. Doch ist diese Verringerung zwecklos, weil auch die dann resultierende Anzahl noch zu sehr von der vermutlichen idealen Grenzzahl (37) differiert.

Über die fünften Potenzen hinaus ist die Mailletsche Methode nicht anwendbar. Aber schon Waring**†) hat die Vermutung ausgesprochen, *daß zur Darstellung jeder noch so großen Zahl höchstens eine bestimmte Anzahl n^{ter} Potenzen erforderlich ist.*

*) Über die kleinste Anzahl Kuben, aus welchen jede Zahl bis 40000 zusammengesetzt werden kann. Sitzungsberichte der K. Akad. der Wissensch. in Wien. Math.-naturwissenschaftliche Klasse Bd. 112, Abt. IIa, Dez. 1903, S. 1627—1666.

**) Der Liouvillesche Beweis findet sich in Lebesgue, Exercices d'Analyse numérique. Paris 1859 (Leiber et Faraguet), S. 113—115.

***) Note sur un théorème d'Arithmétique (Nouv. Corresp. mathématique Bd. IV, 1878, S. 209—210).

†) Sur la décomposition des nombres en bicarrés (ebenda p. 323—325).

††) Sur un théorème de M. Liouville, concernant la décomposition des nombres en bicarrés (Nouv. Ann. de Math. Ser. 2, Bd. 17, S. 536—537).

†††) Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo T. XXIII, 1907, S. 91—96).

*†) Quelques extensions du théorème de Fermat sur les nombres polygones (Journ. de mathématiques Ser. 5, Bd. II, 1896, S. 363—380).

**†) Meditationes algebraicae, ed. III, Cambridge 1782, S. 349—350.

Dies ist nicht schon a priori klar, und es gibt Zahlenreihen, von welchen — zur Darstellung gewisser Zahlen — immer mehr Glieder erforderlich werden, je größer jene Zahlen werden. Ein Beispiel bildet die Reihe mit dem allgemeinen Glied $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$, denn es sind z. B. zur Darstellung der Zahl $n \cdot n!$ *genau* die n Zahlen $n!$ erforderlich. Die obere Grenze ist daher hier unendlich groß. Auch geometrische Reihen gehören hierher.

Für sechste Potenzen stand bisher nicht fest, ob eine endliche Höchstzahl überhaupt existiert. *Im folgenden soll für die Darstellung ganzer Zahlen durch sechste Potenzen gezeigt werden, daß eine gewisse endliche Anzahl solcher zur Darstellung aller Zahlen sicher genügt.*

Auch in dieser Richtung ist bereits ein — allerdings mißglückter — Versuch gemacht worden. Bei Laisant*) befindet sich folgende von Lucas**) aufgestellte Identität:

$$\begin{aligned}10(x^2+y^2+z^2+u^2)^3 = {} & (x+y)^6+(x+z)^6+(x+u)^6+(y+z)^6+(y+u)^6+(z+u)^6 \\ & +(x-y)^6+(x-z)^6+(x-u)^6+(y-z)^6+(y-u)^6+(z-u)^6 \\ & +4x^6+4y^6+4z^6+4u^6.\end{aligned}$$

Diese ist offensichtlich falsch! Sie lautet im Original**) ebenso und ist auch später nicht richtig gestellt worden.

Die Methode, welche ich zur Auffindung einer passenden Identität verwandte, beruht auf folgender einfachen Überlegung.

Es ist $(a^2+b^2+c^2+d^2)^3$ darzustellen oder ein Vielfaches davon. Die Entwicklung dieses Ausdrucks enthält nur quadratische Summanden, und derselbe ist in eine Summe von sechsten Potenzen der Form

$$(\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d)^6$$

zu verwandeln. Also müssen zunächst die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so beschaffen sein, daß in der entwickelten Summe alle Glieder, welche ungerade Potenzen von a, b, c, d enthalten, sich aufheben.

Dies ist z. B. bereits der Fall bei $(a+b)^6+(a-b)^6$, also auch bei der Summe

$$\begin{aligned}B = {} & (a+b)^6+(a-b)^6+(a+c)^6+(a-c)^6+(a+d)^6+(a-d)^6+(b+c)^6+(b-c)^6 \\ & +(b+d)^6+(b-d)^6+(c+d)^6+(c-d)^6 = \sum_{a\cdots d}^{(12)} [a \pm b]^6.\end{aligned}$$

*) Laisant, Recueil de problèmes de mathématiques. Algèbre. Théorie des nombres. Probabilités. Géométrie de situation. S. 125, No. 407.

**) Journ. de Mathématiques élémentaires et spéciales (Bourget), Bd. I, 1877, S. 127, Aufgabe 38.

Die (12) über dem rechts stehenden Ausdruck zeigt die Anzahl der Summanden an.

Diese Summe B reicht aber nicht aus, denn wenn auch hier die Glieder mit ungeraden Potenzen fehlen, so können wir doch nicht die Koeffizienten mit denen von $(a^2+b^2+c^2+d^2)^3$ in Übereinstimmung bringen.

Dies gelingt aber, wenn wir noch einige Summen von ähnlichen Eigenschaften ausfindig machen. Dazu gehört zunächst

$$C = a^6 + b^6 + c^6 + d^6 = \sum_{a \cdots d}^{(4)} [a]^6.$$

Da aber in $(a^2+b^2+c^2+d^2)^3$ auch Glieder der Form $6\,a^2b^2c^2$ erscheinen, so müssen wir auch noch eine ähnliche Summe finden, in der die a, b, c, d zu dreien kombiniert vorkommen. Nun ist leicht zu sehen, daß

$$(a+b+c)^6 + (-a+b+c)^6 + (a-b+c)^6 + (a+b-c)^6$$

die verlangte Eigenschaft hat, und um auch d zu seinem Rechte kommen zu lassen, müssen wir mehrere derartige Summen zu folgendem Ausdruck vereinigen:

$$\begin{aligned} A = {} & (a+b+c)^6 + (-a+b+c)^6 + (a-b+c)^6 + (a+b-c)^6 \\ & + (a+b+d)^6 + (-a+b+d)^6 + (a-b+d)^6 + (a+b-d)^6 \\ & + (a+c+d)^6 + (-a+c+d)^6 + (a-c+d)^6 + (a+c-d)^6 \\ & + (b+c+d)^6 + (-b+c+d)^6 + (b-c+d)^6 + (b+c-d)^6 \\ = {} & \sum_{a \cdots d}^{(16)} [a \pm b \pm c]^6. \end{aligned}$$

Nunmehr können wir vier ganze positive Zahlen

$$m,\ n,\ p,\ r$$

so finden, daß

$$mA + nB + pC = r\,(a^2+b^2+c^2+d^2)^3. \tag{1}$$

Es wird, wenn wir entwickeln, bei Anwendung leicht verständlicher Abkürzungen,

$$\begin{aligned} A &= 12 \sum_{a \cdots d} a^6 + 120 \sum_{a \cdots d} a^4b^2 + 360 \sum_{a \cdots d} a^2b^2c^2, \\ B &= 6 \sum_{a \cdots d} a^6 + 30 \sum_{a \cdots d} a^4b^2, \\ C &= \sum_{a \cdots d} a^6, \end{aligned}$$

und andererseits:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^3 = \sum_{a \cdots d} a^6 + 3 \sum_{a \cdots d} a^4b^2 + 6 \sum_{a \cdots d} a^2b^2c^2,$$

eine Formel, deren Einsetzung in (1) bei Koeffizientenvergleichung folgende Beziehungen ergibt:

$$\left.\begin{array}{ll} 12m + 6n + p = & r \\ 120m + 30n \phantom{{}+p} = & 3r \\ 360m \phantom{{}+30n+p} = & 6r \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} r = 60m, \\ n = 2m, \\ p = 36m. \end{array}\right.$$

Hieraus erhalten wir z. B. für $m = 1$ das Wertsystem:

$$m = 1;\quad n = 2;\quad p = 36;\quad r = 60,$$

woraus sofort die gewünschte Identität folgt:

$$\begin{aligned} &(a+b+c)^6 + (-a+b+c)^6 + (a-b+c)^6 + (a+b-c)^6 \\ &+ (a+b+d)^6 + (-a+b+d)^6 + (a-b+d)^6 + (a+b-d)^6 \\ &+ (a+c+d)^6 + (-a+c+d)^6 + (a-c+d)^6 + (a+c-d)^6 \\ &+ (b+c+d)^6 + (-b+c+d)^6 + (b-c+d)^6 + (b+c-d)^6 \\ &+ 2(a+b)^6 + 2(a-b)^6 + 2(a+c)^6 + 2(a-c)^6 + 2(a+d)^6 + 2(a-d)^6 \\ &+ 2(b+c)^6 + 2(b-c)^6 + 2(b+d)^6 + 2(b-d)^6 + 2(c+d)^6 + 2(c-d)^6 \\ &+ 36a^6 + 36b^6 + 36c^6 + 36d^6 = 60(a^2+b^2+c^2+d^2)^3, \end{aligned}$$

oder mit der oben eingeführten Abkürzung geschrieben:

$$\sum_{a\cdots d}^{(16)} [a \pm b \pm c]^6 + 2\sum_{a\cdots d}^{(12)} [a \pm b]^6 + 36\sum_{a\cdots d}^{(4)} [a]^6 = 60(a^2+b^2+c^2+d^2)^3.\text{*)}$$

Hier steht links eine Summe von $1 \cdot 16 + 2 \cdot 12 + 36 \cdot 4 = 184$ sechsten Potenzen, rechts aber der sechzigfache Kubus *irgendeiner* Zahl n_1. Nun läßt sich aber jede Zahl N als Summe von höchstens 13 Kuben (etwa der Zahlen $n_1, n_2, \cdots, n_{13}$) ausdrücken, also wird das Sechzigfache jeder ganzen Zahl N eine Summe von höchstens $13 \cdot 184 = 2392$ sechsten Potenzen und daher jede beliebige Zahl $Z = 60N + \alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 59$) eine Summe von höchstens $2392 + 59 = 2451$ sechsten Potenzen. — Die Reduktion dieser Anzahl wäre zwar leicht, aber ohne besonderen Nutzen. Sie mag daher hier unterbleiben.

Die Methode versagt bei den achten Potenzen, wie man leicht findet, deshalb, weil hier zum Unterschied gegen oben bereits zwei Arten von Gliedern aus zwei Faktoren erscheinen, nämlich a^6b^2 und a^4b^4, und, gleichviel wie wir die m, n, p usw. wählen, sich hier stets ein bestimmtes Verhältnis der Koeffizienten herausstellt, das nicht mit dem anderswertigen Verhältnis der entsprechenden Koeffizienten der anderen Seite in Einklang gebracht werden kann.

---

*) Die obige Identität mit der aus ihr gezogenen Folgerung betr. die Zerlegung einer Zahl in sechste Potenzen habe ich am 28. Nov. 1906 in der Berliner mathematischen Gesellschaft vorgetragen.

Es ist ersichtlich, daß auf ähnliche Weise wie oben eine große Anzahl von Identitäten abgeleitet und für ähnliche oder andere Zwecke nutzbar gemacht werden kann.)*

Berlin, Dez. 1906.

---

*) Hier könnten noch die höheren Kombinationen und Potenzen eine Rolle spielen; ein Beispiel ist die Summe

$$\sum_{a\cdots d}^{(8)}[a\pm b\pm c\pm d]^{2m}=(a+b+c+d)^{2m}+(-a-b+c+d)^{2m}+(-a+b-c+d)^{2m}+(-a+b+c-d)^{2m}$$
$$+(-a+b+c+d)^{2m}+(a-b+c+d)^{2m}+(a+b-c+d)^{2m}+(a+b+c-d)^{2m}$$

deren Entwicklung nur Glieder mit geraden Potenzen enthält.

(Dagegen ergibt z. B. die obere Hälfte der rechten Seite allein den Wegfall aller Glieder mit ungeraden Potenzen der a, b, c, d, ausgenommen diejenigen Glieder, die ungerade Potenzen *aller vier* Größen zugleich enthalten. Die untere Hälfte verhält sich ebenso.)

Ähnliches ergibt die allgemeine Betrachtung der Summe

$$\sum_{a_1\cdots a_n}^{\left(\binom{n}{k}2^{k-1}\right)}[a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_k]^{2m}. \qquad (k\leqq n)$$

Zur Erklärung sei erwähnt, daß, wenn die $\pm$ Zeichen der a_i in *jeder* Weise bei allen a_i, auch bei a_1 variiert würden, wir 2^k Ausdrücke der in der eckigen Klammer stehenden Art erhalten würden. Da dann aber zu jedem Ausdruck auch der entgegengesetzt gleiche gehören würde, so brauchen wir nur die Hälfte der 2^k Ausdrücke, also nur 2^{k-1}, was dadurch angedeutet ist, daß vor a_1 das $\pm$ Zeichen fehlt. — Sind nun n Zahlen, $a_1, a_2, \cdots, a_n$, gegeben, so deuten die $a_1, \cdots, a_k$ der eckigen Klammer irgend eine Kombination der n Zahlen zur k^{ten} Klasse an, deren es $\binom{n}{k}$ gibt. Also deutet das Σ im Ganzen die Summe von $\binom{n}{k}2^{k-1}$ $2m^{\text{ten}}$ Potenzen an.

Die Auswertung dieser Summe ergibt nur Glieder mit geraden Exponenten der a_i, und zwar wird:

$$\sum_{a_1\cdots a_n}^{\left(\binom{n}{k}2^{k-1}\right)}[a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_k]^{2m}=2^{k-1}\sum_{a_1\cdots a_k}\sum_{\alpha}\binom{n-i}{k-i}\frac{(2m)!}{(2\alpha_1)!\,(2\alpha_2)!\cdots!\,(2\alpha_k)}\,a_1^{2\alpha_1}a_2^{2\alpha_2}\cdots a_k^{2\alpha_k},$$

wo

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=m,\qquad k\leqq n,$$

i die Anzahl der Exponenten α_ν von a_ν, welche nicht Null sind. Die innere Summe bezieht sich auf alle α, die der obigen Gleichung genügen, die äußere Summe auf alle Kombinationen zur k^{ten} Klasse der $a_1, a_2, \cdots, a_n$.