Ueber trigonometrische Reihen.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle a. S.)

---

§. 1. Bis in die neueste Zeit glaubte man, es sei das Integral einer convergenten Reihe, deren Glieder zwischen endlichen Integrationsgrenzen endlich bleiben, gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Glieder, und erst Herr *Weierstrass* hat bemerkt, der Beweis dieses Satzes erfordere, dass die Reihe in den Integrationsgrenzen nicht nur convergire, sondern dass sie auch in gleichem Grade convergire*). Hiermit ist aber der Satz:

Eine zwischen $x=-\pi$ und $x=\pi$ gegebene endliche Function $f(x)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine trigonometrische Reihe von der Form

$$(\alpha.)\qquad f(x) = \tfrac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots$$

entwickeln

hinfällig geworden, und durch die Arbeiten von *Dirichlet, Lipschitz* und *Riemann* ist daher nur festgestellt, *dass* eine Function von x in einer Anzahl von Fällen sehr allgemeiner Natur sich in eine Reihe von der Form (α.), deren Coefficienten bekannt sind, entwickeln lasse, aber *nicht, auf wie viele Arten die Entwickelung geschehen könne.*

Die Bedeutung, welche der Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe bisher zukam, beruhte zum grossen Theile in der Einheit der Entwickelung, also in der Sicherheit, dieselbe Reihe zu finden, auf welchem Wege man auch die Function in die Reihe transformiren möge. Ich habe deshalb versucht, den vorstehenden Satz mit einem anderen zu vertauschen, der die Einheit der Entwickelung wiederherstellt, und für mancherlei Anwendungen, z. B. auf Probleme der Physik, ausreicht.

Eine leichte Ueberlegung (M. vgl. den Schluss des §. 2.) zeigt zwar, dass eine Reihe (α.), welche gleich einer *discontinuirlichen* Function ist, selbst wenn sie endlich bleibt, unmöglich in gleichem Grade convergiren kann; es ist aber noch nicht bekannt, dass, oder vielmehr ob eine Reihe, welche eine continuirliche Function darstellt, in gleichem Grade convergiren muss, was man

---

*) Im gegenw. Journal führt auch Herr *Thomé* in Berlin diesen Satz als bekannt an. M. vergl.: Ueber die Kettenbruchentwickelung der *Gauss*schen Function $F(\alpha,1,\gamma,x)$, Bd. 66, S. 334.

wohl stillschweigend angenommen hat. Dieser Gegenstand wird auch im Folgenden nicht aufgeklärt. *Man weiss ferner bis heute* *) *noch nicht einmal mit Sicherheit, ob es überhaupt möglich ist, eine gegebene continuirliche Function durch eine in gleichem Grade convergente trigonometrische Reihe darzustellen.* Hierüber, so wie über die ähnliche Frage für den Fall noch anderer endlich bleibender Functionen, giebt der folgende Satz Aufschluss, zu dessen Beweise (M. vgl. den Anhang) man die wesentlichen Elemente in *Dirichlet*s berühmter Arbeit über die *Fourier*schen Reihen in *Dove*s Repertorium **) findet:

I. Satz. *Die Fouriersche Reihe für eine endliche Function $f(x)$, die eine endliche Anzahl Maxima und Minima besitzt,* d. h. diejenige ganz bestimmte Reihe von der Form (α.), in welcher

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos m x \, dx, \qquad \pi b_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin m x \, dx,$$

convergirt in gleichem Grade, sobald $f(x)$ continuirlich von $-\pi$ bis π (incl.) und $f(\pi) = f(-\pi)$ ist; in allen anderen Fällen ist sie nur im allgemeinen in gleichem Grade convergent.

Der Ausdruck *„im allgemeinen"* wird hier wie im Folgenden gebraucht, wenn die Ausnahme sich auf eine *endliche Anzahl von Punkten* beziehen soll. Die Ausnahmestellen im obigen Satze sind übrigens leicht anzugeben; sie sind nämlich die Umgebungen der Unstetigkeitspunkte, — in sofern die Unstetigkeiten in diesen Punkten nicht durch Abänderung der Function in denselben fortgeschafft werden können, — und ausserdem $x = \pm \pi$, wenn nicht $f(\pi) = f(-\pi)$.

Durch diesen Satz ist der Weg angebahnt, auf welchem man von dem unbewiesenen Satze an der Spitze zu einem sicheren gelangen kann. Dies geschieht zwar sofort, wenn man den Schlussworten desselben noch die Bedingung hinzufügt, „die in gleichem Grade convergirt"; er würde aber zu eng sein, weil er seine Bedeutung schon verliert, wenn es sich nicht grade um eine continuirliche Function handelt, für die noch ausserdem $f(\pi) = f(-\pi)$, weil, wie oben bemerkt wurde, in den anderen Fällen keine einzige in gleichem Grade convergente Entwickelung existirt. Ich vertausche diesen Satz nunmehr mit dem folgenden:

---

*) Die folgenden beiden Sätze und den Inhalt des §. 6 habe ich Herrn *Thomae* mitgetheilt, der meine Untersuchungen in einem Werke, welches über die *Jacobi*schen Θ-Functionen handeln soll, und welches sich schon unter der Presse befindet, zu benutzen wünschte.

**) Bd. I, S. 152—174: Ueber die Darstellung ganz willkührlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen.

II. Satz. *Eine im allgemeinen stetige, nicht nothwendig endliche Function $f(x)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine trigonometrische Reihe von der Form $(\alpha.)$ entwickeln, wenn die Reihe der Bedingung unterworfen ist, im allgemeinen in gleichem Grade zu convergiren. Die Reihe stellt die Function im allgemeinen von $-\pi$ bis π dar.*

Der Schluss dieses Satzes bedarf noch einer Erläuterung: Entwickelt man eine gegebene endliche Function in eine *Fourier*sche Reihe, so muss man darauf verzichten, dass die Reihe die gegebene Function genau darstellt; an den Stellen der Discontinuität giebt sie bekanntlich einen gewissen Mittelwerth. Die nächste Frage würde nun sein, ob diejenige Function, welche *genau* gleich der *Fourier*schen Reihe ist, auch noch *genau* durch eine andere trigonometrische Reihe von der Form $(\alpha.)$ dargestellt werden kann. Durch Herrn *Cantor* *) in Halle, den ich mit meinen Untersuchungen bekannt machte, wurde ich veranlasst, sie auch auf den Fall auszudehnen, dass eine Uebereinstimmung an den Unstetigkeitspunkten nicht mehr gefordert wird **). Der II. Satz giebt nun das Resultat an, wenn auf die Uebereinstimmung in diesen und noch in irgend welchen anderen Punkten in endlicher Anzahl verzichtet wird; er sagt, dass nichts desto weniger die Reihe bestimmt sei, dass sie also mit der *Fourier*schen Entwickelung, wenn dieselbe für die Function existirt, übereinstimmt.

Es ist einleuchtend, dass der II. Satz auch in folgende Gestalt gebracht werden kann, in welcher er bewiesen werden soll:

III. Satz. *Soll eine trigonometrische Reihe $(\alpha.)$ von $-\pi$ bis π im allgemeinen in gleichem Grade convergiren und im allgemeinen Null vorstellen,* wobei nicht vorausgesetzt wird, dass sie da, wo sie nicht verschwindet, einen endlichen Werth behält, *so müssen alle Coefficienten a und b verschwinden, und die Reihe stellt daher überall Null vor.*

§. 2. Dem Beweise des III. Satzes schicke ich einige *Definitionen* voraus: Eine Reihe von Gliedern

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \dots \quad g_m,$$

*) Derselbe bemerkt, dass der Begriff der Convergenz in gleichem Grade in einer „Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen" von Herrn *Seidel,* in den Denkschriften der Münchener Akademie für 1848, auftritt.

**) Diesen Fall kann man nicht mehr als erledigt durch *Riemanns* Arbeit „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" §. 3, S. 15, No. 3 betrachten, für deren Mittheilung wir Herrn *Dedekind* zu Dank verpflichtet sind, da grade der Satz, auf welchem dort die Bestimmung der Coefficienten beruht, hier in Frage gestellt ist.

heisst *convergent,* wenn von einem angebbaren Werthe n an, für stets wachsende Werthe von n, die Summe

$$g_n + g_{n+1} + g_{n+2} + \cdots + g_{n+m}$$

unter jede beliebig gegebene von Null verschiedene Grösse ε herabsinkt, welchen positiven Werth man auch m geben möge.

Hängen die Glieder g von einer Veränderlichen x ab, welche alle Werthe von α bis β (incl. α, β) durchlaufen darf, so heisst die Reihe innerhalb dieser Grenzen *in gleichem Grade convergent, wenn das Criterium der Convergenz für jedes gegebene ε, während x alle Werthe durchläuft, durch dasselbe n erfüllt wird;* für n hat man erst dann einen anderen Werth zu nehmen, wenn ein anderes ε gegeben ist.

Im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der Umgebung gewisser Punkte, *in gleichem Grade convergent* von α bis β nenne ich eine Reihe, welche das Criterium der gleichmässigen Convergenz auf der ganzen Linie von α bis β erfüllt, nachdem man aus derselben vorher beliebig kleine Stücke ausgeschieden hat, welche die erwähnten Punkte einschliessen. Ob die Reihe in den kritischen Punkten selbst convergirt oder divergirt, ist hierbei durchaus unerheblich; es convergiren z. B. die *Fourier*schen Reihen für die endlichen Functionen mit endlichen Sprüngen auch an den Sprungstellen, und sie sind dennoch unmöglich in gleichem Grade convergent.

In der That, es sei x_0 ein solcher kritischer Punkt, so stellt in demselben die Reihe, welche im allgemeinen $f(x)$ ist, wie man weiss das arithmetische Mittel aus $f(x_0+0)$ und $f(x_0-0)$ dar; es ändert sich also, bei der geringsten Aenderung von x an der Stelle x_0 (es handelt sich hier nur um sehr kleine Werthe der Differenz $x-x_0$), die *Fourier*sche Reihe um mehr, als eine endliche Grösse d angiebt, welche kleiner als der Zahlwerth von $\frac{1}{2}(f(x_0+0)-f(x_0-0))$ ist. Setzt man nun für ε einen aliquoten Theil von d, z. B. $\varepsilon = 0{,}01\,d$, und nimmt an, dass für dieses ε ein festes n existire, so entsteht ein Widerspruch. *Einerseits* ändert sich nämlich die unendliche Reihe $g_1 + g_2 + \cdots$, wie oben bemerkt wurde, um mehr als d; an beiden Stellen unterscheidet sich aber, nach der Annahme, die unendliche Reihe von der Summe der ersten n Glieder höchstens um ε; folglich ändert sich diese endliche Summe, $g_1 + g_2 + \cdots g_n$, wie wenig man auch x ändert, wenigstens um $d - 2\varepsilon$. *Andrerseits* kann man x so wenig ändern, dass jedes Glied g sich höchstens um den n^{ten} Theil von ε, also die endliche Summe $g_1 + g_2 + \cdots + g_n$ höchstens um ε verändert, was mit dem Resultate, dass die Aenderung wenigstens $d - 2\varepsilon$ beträgt, nicht übereinstimmt.

§. 3. Es ist zunächst zu beweisen, dass eine trigonometrische Reihe, wenn sie im allgemeinen convergirt, zu denen gehört, *bei welchen die Glieder für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden,* wie der Ausdruck im §. 7, S. 25 der Arbeit von *Riemann* über trigonometrische Reihen lautet. Es ist nur nöthig, dieses gesondert für eine Cosinus- und eine Sinusreihe zu zeigen; denn die Summe oder Differenz zweier im allgemeinen in gleichem Grade convergenten Reihen ist gleich einer Reihe von derselben Eigenschaft, und da x die Werthe von $-\pi$ bis π durchläuft, so sind die Reihen mit den n^{ten} Gliedern

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad a_n \cos nx - b_n \sin nx$$

nach unserer Annahme beide im allgemeinen gleichmässig convergent.

Um nun zu zeigen, dass in der Cosinusreihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots$$

a_n mit wachsendem n unter jede gegebene noch so kleine Grösse ε herabsinkt, scheide man wie in §. 2 die kritischen Punkte aus. Es sei nachher pq irgend ein zusammenhängendes Stück, so dass, wenn man x nur Werthe giebt, die pq angehören, die Reihe dort in gleichem Grade convergirt, also n so gross genommen werden kann, dass für dieses und die grösseren n alle der Strecke pq angehörenden x das Glied $a_n \cos nx < \varepsilon$ machen. Ist nun n so gross, dass $\frac{\pi}{n} < pq$, so wird für wenigstens einen ganzen Werth von m sicher $x = \frac{m\pi}{n}$ in die Linie pq fallen, also $a_n \cos nx$, d. h. a_n unter ε liegen müssen.

Aehnlich verhält es sich mit der Sinusreihe; zum Beweise hat man hier $x = \frac{(2m+1)\pi}{2n}$ zu setzen.

§. 4. Nach den Bemerkungen im Eingange des §. 3 wird es genügen, den III. Satz gesondert für eine Sinusreihe und dann für eine Cosinusreihe zu erweisen.

Es sei die Sinusreihe

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

im allgemeinen in gleichem Grade convergent und Null; $x_0, x_1, x_2, \ldots x_\tau$ sollen, der Grösse nach geordnet, 0, π und die positiven Abscissen der kritischen Punkte darstellen, wobei es gleichgültig ist, ob x_0 und x_τ, d. h. 0 und π, zu diesen gehören oder nicht. Kritische Punkte heissen hier diejenigen, in welchen entweder die Reihe nicht verschwindet, oder in deren Umgebung sie nicht in gleichem Grade convergirt.

Bedeutet σ irgend eine ganze Zahl von 1 bis τ, so ist es erlaubt, wenn man die Gleichung

$$\Sigma b_n \sin nx = 0$$

nach x integrirt, und die Integrationsgrenzen *zwischen* $x_{\sigma-1}$ und x_σ eingeschlossen sind, das Integral der Summe mit der Summe der Integrale zu vertauschen; man hat daher

$$\Sigma b_n \frac{\cos nx - \cos nz}{n} = 0$$

wenn z irgend eine Constante bedeutet, die, wie x, zwischen $x_{\sigma-1}$ und x_σ liegt.

Es ist nicht gestattet, die vorstehende Reihe in die Differenz zweier Theile aufzulösen, von denen der eine nur x enthält, der andere nur z, da nicht bewiesen ist, dass jeder Theil für sich convergirt. Die Reihe convergirt aber, ebenso wie die, aus welcher sie durch Integration entstand, so lange x innerhalb seiner Grenzen bleibt, in gleichem Grade. Daher kann man, bei einer zweiten Integration zwischen denselben Grenzen, die Summation auf die Integration folgen lassen. Hierdurch entsteht

$$\Sigma b_n \left(\frac{\sin nx - \sin nz}{n^2} - (x-z) \frac{\cos nz}{n} \right) = 0.$$

Die Glieder b_n nehmen mit wachsendem n zu Null ab; es sind daher die Reihen mit den n^{ten} Gliedern

$$b_n \frac{\sin nx}{n^2}, \qquad b_n \frac{\sin nz}{n^2}$$

unbedingt (absolut) convergent, und es folgt aus der vorhergehenden Gleichung, dass auch die Reihe mit dem n^{ten} Gliede $b_n \frac{\cos nz}{n}$ convergent und gleich einer Constante ist, die k oder vielmehr k_σ heisse. Setzt man

$$\Sigma b_n \frac{\sin nx}{n^2} = F(x),$$

und bedeutet auch c_σ eine Constante, so hat man daher

$$F(x) = \Sigma b_n \frac{\sin nx}{n^2} = c_\sigma + x k_\sigma, \qquad (x_{\sigma-1} < x < x_\sigma).$$

Nachdem so die Form der Function $F(x)$ gefunden worden, handelt es sich um Bestimmung der Constanten c und k, zu der wir die erforderliche Anzahl von Gleichungen erhalten, wenn wir von zwei verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen.

a) Erstens sieht man ein, dass die vorstehende Gleichung, da $F(x)$ eine absolut convergente Reihe und die rechte Seite eine lineare Function von x ist, noch für die Grenzen $x = x_{\sigma-1}$ und $x = x_\sigma$ selbst gilt. Man erhält daher an sämmtlichen $\tau+1$ Punkten $x_0, x_1, \ldots x_\tau$ für $F(x)$ Doppelgleichungen, nämlich $\tau-1$ von der Form

$$F(x_\sigma) = c_\sigma + x_\sigma k_\sigma = c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1} \qquad (0 < \sigma < \tau)$$

und für $x = 0$ und $x_\tau = \pi$

$$F(x_0) = 0 = c_1,$$
$$F(x_\tau) = 0 = c_\tau + \pi . k_\tau .$$

b) Zweitens kann man sich des Satzes bedienen, den *Riemann* in der oben erwähnten Arbeit *) aufstellt und streng beweist, nach welchem

$$\frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha}$$

stets mit α unendlich klein wird. Setzt man hier x_σ für x, so liegt $x+\alpha$, bei positiv genommenem α, zwischen x_σ und $x_{\sigma+1}$, dagegen $x-\alpha$ zwischen $x_{\sigma-1}$ und x_σ. Man hat daher

$$\begin{aligned} F(x_\sigma+\alpha) &= c_{\sigma+1} + (x_\sigma+\alpha) k_{\sigma+1}, \\ F(x_\sigma-\alpha) &= c_\sigma + (x_\sigma-\alpha) k_\sigma, \\ 2F(x_\sigma) &= (c_\sigma + x_\sigma k_\sigma) + (c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1}), \end{aligned}$$

und nach Substitution dieser Werthe durch *Riemanns* Satz

$$k_\sigma = k_{\sigma+1}.$$

Da nunmehr gefunden ist, dass alle k gleich sind, so folgt aus (*a.*), dass alle c gleich, also gleich $c_1 = 0$ werden. Hieraus ergiebt sich, indem $c_\tau + \pi k_\tau = 0$, dass $k_\tau = 0$; also sind alle k gleich Null, ebenso wie alle c. Es verschwindet daher die absolut convergente Reihe

$$F(x) = \Sigma b_n \frac{\sin nx}{n^2}$$

für alle x von 0 bis π, so dass alle b verschwinden, und somit der Theil des III. Satzes, welcher sich auf die Sinusreihe bezieht, erwiesen ist.

§. 5. Der III. Satz soll nun für eine Cosinusreihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \Sigma a_n \cos nx \qquad (n > 0)$$

bewiesen werden, wobei die Buchstaben z, σ, τ, c, k eine ähnliche Bedeutung für die Cosinusreihe haben wie im vorigen Paragraphen für die Sinusreihe. Man setze ferner

$$F(x) = \Sigma a_n \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad (n > 0).$$

*) §. 8, S. 29, Lehrsatz 2.

Eine zweimalige Integration verschafft, wenn x und z zwischen $x_{\sigma-1}$ und x_σ liegen, die Gleichung

$$\tfrac{1}{4}a_0(x-z)^2 - \Sigma a_n\left(\frac{\cos nx - \cos nz}{n^2} + \frac{x-z}{n}\sin nz\right) = 0,$$

also

$$F(x) = c_\sigma + x k_\sigma + \tfrac{1}{4}a_0 x^2, \qquad (x_{\sigma-1} < x < x_\sigma).$$

Diese Gleichung muss noch an den Grenzen $x_{\sigma-1}$ und x_σ gelten, so dass man wiederum ein System Gleichungen erhält

$$c_\sigma + x_\sigma k_\sigma + \tfrac{1}{4}a_0 x_\sigma^2 = c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1} + \tfrac{1}{4}a_0 x_\sigma^2$$

oder, nach Fortlassung des gleichen Gliedes, wie im §. 4 unter (*a.*)

$$c_\sigma + x_\sigma k_\sigma = c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1}, \qquad (0 < \sigma < \tau).$$

Wie §. 4 unter (*b.*) ergiebt sich

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_\tau$$

und hieraus

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_\tau,$$

also von $x = 0$ bis $x = \pi$

$$F(x) = c + kx + \tfrac{1}{4}a_0 x^2,$$

wo c und k dieselben Constanten im ganzen Intervalle bezeichnen. Um diese zu bestimmen, bemerke man, dass die Reihe für $F(x)$ absolut convergirt, dass also die Gleichung besteht:

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{n^2\pi}\left(\frac{\pi}{2}a_0\cos n\pi - 2k\sin^2\frac{n\pi}{2}\right).$$

Setzt man den gefundenen Werth von a_n in die gegebene Cosinusreihe ein, so übersieht man sofort, dass sie nicht convergirt, während sie doch im allgemeinen die Summe Null haben soll, wenn nicht a_0 und k, folglich alle a verschwinden, wodurch der Beweis des III. Satzes gegeben ist.

§. 6. Einige Punkte im Beweise des *Dirichlet*schen Prinzipes sind noch nicht mit jener äussersten Strenge begründet, welche für einen so bedeutenden Satz wünschenswerth wäre. Bekanntlich haben die Herren *Kronecker* und *Weierstrass* schon vor längerer Zeit ihre Bedenken über die Annahme geäussert, dass ein Minimum existiren müsse, so wie auch über die Anwendung der Variationsrechnung. Auch ich habe bereits vor mehreren Jahren darauf aufmerksam gemacht, es sei eine Voraussetzung nicht unzweifelhaft, die nämlich, dass eine Function vom Rande in's Innere immer continuirlich fortgesetzt werden könne, während noch ihre ersten Differentialquotienten nach den rechtwinkligen

Coordinaten continuirlich bleiben sollen. In den verflossenen Jahren hat man versucht, den Beweis mit Hülfe der trigonometrischen Reihen zu führen, was hier zur Sprache kommen muss, weil sich aus demselben ergeben würde, dass jede continuirliche einwerthige Function $f(x)$, für welche $f(\pi) = f(-\pi)$ ist, nur auf *eine* Art in eine trigonometrische Reihe von der Form $(\alpha.)$ entwickelbar sei, ohne dass die im allgemeinen gleichmässige Convergenz zur Bedingung der Entwickelung gemacht wird. Ich erwähne deshalb, dass jener Beweismethode eine unbewiesene Voraussetzung zu Grunde liegt, über welche ich noch Einiges hinzufügen will, da hier ein sehr wesentlicher Umstand bei der Betrachtung von Functionen mehrerer Veränderlichen zur Sprache kommt. Es sei $(\alpha.)$ irgend eine Entwickelung von $f(x)$ in eine trigonometrische Reihe, so betrachtet man nämlich gewöhnlich den Ausdruck

$$(\beta.) \qquad \tfrac{1}{2}a_0 + r(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + r^2(a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

als eine Function von r und x, die für alle Werthe von x und von $r = 0$ bis $r = 1$ (incl.) continuirlich ist. Nachdem *Dirichlet* *) den von *Abel* in seiner Arbeit über die binomische Reihe aufgestellten Satz **) genau bewiesen hat, wonach die Grenze einer als Potenzreihe gegebenen Function

$$c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \cdots \qquad (r < 1)$$

für $r = 1$, gleich $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$ wird, wenn die letztere Reihe convergirt, so ist allerdings klar, dass die Function $(\beta.)$ bei festgehaltenem r sich mit x, bei festgehaltenem x sich mit r bis $r = 1$ (incl.) continuirlich ändert. Es scheint aber noch nicht bemerkt zu sein, dass diese Eigenschaften, *diese Continuität in jedem einzelnen Punkte nach zwei Richtungen hin,* nicht diejenige Continuität ist, welche man voraussetzen muss, wenn man auf die Function analoge Schlüsse anwenden will, wie diejenigen, welche für die continuirlichen Functionen mit einer Veränderlichen gestattet sind, und die man *gleichmässige Continuität* nennen kann, weil sie sich gleichmässig über alle Punkte und alle Richtungen erstreckt. *Eine Function zweier Veränderlichen x, y heisse gleichmässig continuirlich in einem Gebiete, wenn für jede beliebig kleine gegebene Grösse ε Grössen h_1 und k_1, von denen keine Null ist, existiren, so dass die Differenz $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ kleiner als ε bleibt, so lange h und k resp. h_1 und k_1 nicht überschreiten, und zwar muss dieses bei gegebenem ε und festgehaltenen h_1 und k_1 für alle Punkte (x, y) und $(x+h, y+k)$ stattfinden, die dem Gebiete, seine Begrenzung eingeschlossen, angehören.*

---

*) *Liouville,* Journal de Mathématiques, II Série, T. VII, p. 253—255.
**) Bd. I, No. II, Lehrsatz IV, S. 314 u. 315 dieses Journals.

Anhang.

§. 7. Der Beweis des I. Satzes soll hier nachgetragen werden, und zwar in genauem Anschlusse an den vorerwähnten Aufsatz von *Dirichlet,* auf den sich auch die folgenden Citate beziehen. Die im I. Satze erwähnte Function $f(x)$ denke man sich befreit von den durch Abänderung ihres Werthes in einzelnen Punkten hebbaren Unstetigkeiten, was gestattet ist, weil die Entwickelung von $f(x)$ in eine *Fourier*sche Reihe mit der übereinstimmt, welche dieselbe Function, befreit von jenen Unstetigkeiten geben würde. Es sei ferner g eine positive Zahl, so gross, dass $g+f(x)$ positiv bleibt, n eine positive ganze Zahl und $2n+1=k$ gesetzt.

Die Punkte der Abscissenaxe, welche nun noch zu Unstetigkeitsstellen gehören, scheide man wie im §. 2 aus, indem man diese Punkte mit beliebig kleinen Stücken umgiebt, die man sich im Folgenden ausgeschlossen denkt, wenn man auch *den Buchstaben* x (aber nicht andere Buchstaben) die Werthe von $-\pi$ bis π durchlaufen lässt, so dass also $f(x)$ einwerthig ist, und $f(x+0)$ mit $f(x-0)$ übereinstimmt. *Die umgebenden Stücke darf man im Laufe des Beweises nicht mehr verkleinern.* Die Punkte $\pm\pi$ werden den Unstetigkeitsstellen gleich geachtet, wenn nicht $f(\pi)$ mit $f(-\pi)$ übereinstimmt. Da die Summe der *Fourier*schen Reihe in jedem Punkte x der Abcissenaxe von $-\pi$ bis π genau $f(x)$ ist, so lässt sich der noch zu beweisende Theil des I. Satzes so fassen: Es kann die Zahl n so gross genommen werden, dass die Summe der ersten n Glieder der Reihe weniger $f(x)$ kleiner ist als eine beliebig kleine gegebene Grösse ε, *und zwar findet dies in gleichem Grade, d. h. für die* x *von* $-\pi$ *bis* π *durch dasselbe* n *statt.* Für noch grössere Werthe von n darf ferner jene Differenz nicht wieder ε übersteigen.

Zum Beweise hat man zu untersuchen, auf welche Art sich

$$S=\int_0^h \varphi(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta, \qquad \left(0<h\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

mit wachsendem n seinem Grenzwerthe $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ nähert; es sei im Voraus bemerkt, dass hier $\varphi(\beta)$ *entweder* $f(x\pm 2\beta)$ vorstellen soll *oder* irgend eine Function, welche auf der ersten Strecke, d. h. von $\beta=0$ an, eine Strecke constant ist und überall unter g bleibt. Im ersten Falle wird

$$\varphi(\beta)-\varphi(0) = f(x\pm 2\beta)-f(x);$$

nun ist eine Function von einer Veränderlichen x, die nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima besitzt, wenn sie auf einer Strecke von $x=a$ bis $x=b$ stetig bleibt, auf dieser Strecke sicher in gleichem Grade stetig, d. h. für jedes beliebig gegebene ε giebt es eine so kleine Grösse h, dass sämmtliche Ordinaten, die zu den Abscissen von x bis $x+h$ gehören, sich von einander um weniger als ε unterscheiden, und zwar für alle x von a bis b bei festgehaltenem ε und h. Es wird also (wegen der Stetigkeit von $f(x)$ für jede Abscisse x), für ein festgehaltenes ε und ein dazu gehöriges festes β, die Ungleichheit $\varphi(\beta)-\varphi(0)<\varepsilon$ für alle Functionen φ, die in diesem ersten Falle in Betracht kommen, bestehen und auch noch bestehen, wenn β verkleinert wird. Im zweiten Falle ist $\varphi(\beta)-\varphi(0)$ für ein hinreichend kleines β sogar genau gleich Null.

§. 8. *Dirichlet* behandelt (S. 164) zuerst den Fall, dass $\varphi(\beta)$ von $\beta=0$ bis $\beta=h$ stetig ist, nie zunimmt und nie negativ wird. Er zeigt, dass dann der Werth von S zwischen den Grenzen (*Dirichlet* S. 166)

$$\frac{\pi}{2}\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)-\varrho_{2m+1}\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right),$$

$$\frac{\pi}{2}\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)+\varrho_{2m+1}\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)+\varrho_1\left(\varphi(0)-\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right)$$

liegt, wo m irgend eine positive ganze Zahl vorstellt, die so beschaffen ist, dass $(2m+1)\pi$ unter hk liegt, wo ferner

$$\varrho_1<\frac{\pi}{2}+\frac{2}{k\sin\frac{\pi}{k}},$$

$$\frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{k}}<\varrho_{2m+1}<\frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{k}}.$$

Man nehme m etwa von der Grösse $\sqrt{n}$, setze z. B. für m die nächste auf $\sqrt{n}$ folgende ganze Zahl; dann ist für hinreichend grosse Werthe von n, wenn man Grössen von der Ordnung $n^{-\frac{3}{2}}$, die hier völlig bedeutungslos sind, der Kürze halber fortlässt,

$$\varrho_1<\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}, \qquad \varrho_{2m+1}=\frac{1}{\pi\sqrt{n}}.$$

Es unterscheidet sich also, wenn man wiederum das Glied höherer Ordnung vernachlässigt, S von $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ um weniger als

$$(\gamma.) \qquad \frac{2}{\pi}\left(\varphi(0)-\varphi\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)+\frac{g}{\pi\sqrt{n}},$$

daher, gleichmässig für alle unsere Functionen φ, um beliebig wenig, oder die Differenz $S-\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ nähert sich für alle φ in gleichem Grade der Null.

Indem man (*Dirichlet*, S. 167 u. 168) diesen Satz auf den Fall anwendet, dass φ in den Integrationsgrenzen constant bleibt, wo $S-\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ wie $\frac{g}{\pi\sqrt{n}}$ zu Null convergirt, ferner auf die Function $\varphi(\beta)+g$, wenn $\varphi(\beta)$ auch negative Werthe annimmt, endlich auf $-\varphi(\beta)$, wenn φ nie abnimmt, findet man das Resultat, dass $S-\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ gleichmässig für alle x zu Null convergirt, wenn die im §. 7 definirte Function $\varphi(\beta)$ im Intervalle von $\beta=0$ bis $\beta=h$ nicht vom Wachsen in's Abnehmen übergeht oder umgekehrt, und stetig bleibt.

Um die Function φ auch noch von dieser Bedingung zu befreien, betrachte man

$$\sigma=\int_c^h\varphi(\beta)\frac{\sin(k\beta)}{\sin\beta}\,d\beta,\qquad \left(0<c<h\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

wenn $\varphi(\beta)$ noch derselben Bedingung in den Integrationsgrenzen g und h unterworfen ist. War $\varphi(\beta)=f(x+2\beta)$, so bleibt diese Function für $\beta=0$ eindeutig, weil sie sich in $f(x)$ verwandelt und x nur solche Werthe ertheilt wurden, die nicht in kritische Stellen fallen. Die untere Grenze c ist also schon in dieser Beziehung von der früheren 0 zu unterscheiden, dass ihr zwei Ordinaten angehören können. Man weiss, wie *Dirichlet* S. 169 die Grenze von σ aus der von S durch Zerlegung des Integrales von c bis h in zwei findet, in eines von 0 bis h und eines von 0 bis c; er setzt dazu die Function φ von c bis 0 so fort, dass sie dort constant gleich $\varphi(c+0)$ bleibt. Man hat also den Satz über das Integral S zweimal hintereinander anzuwenden, beide Male auf eine Function $\psi(\beta)$, die so beschaffen ist, wie in S die Function $\varphi(\beta)$, und zwar wie dort im zweiten Falle am Schlusse unseres §. 7; d. h. die Function ist für kleine Werthe von β constant, und der Unterschied eines jeden S von $\frac{\pi}{2}\psi(0)$ oder $\frac{\pi}{2}\varphi(c+0)$ ist daher (Formel γ.) $<\frac{g}{\pi\sqrt{n}}$, folglich $\sigma<\frac{2g}{\pi\sqrt{n}}$ also gleichmässig beliebig klein.

Hieraus folgt, dass $S-\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ auch dann noch gleichmässig beliebig klein für wachsende n wird, wenn φ von allen Bedingungen dieses Paragraphen befreit ist und nur denen des §. 7 unterworfen bleibt.

§. 9. Nach Angabe des §. 7 hat man zu untersuchen, *wie* die Summe der ersten n Glieder der Reihe (α.) sich $f(x)$ nähert. Diese Summe lässt sich (*Dirichlet,* S. 170) durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

darstellen. Die Untersuchung desselben für irgend einen einzelnen bestimmten Werth von x, hat für uns keine Bedeutung, da man aus *Dirichlets* Arbeit den Grenzwerth der Integrale sogar in dem Falle kennt, wo x einen der Werthe vorstellen würde, die wir ausgeschlossen haben; dass für jeden einzelnen Punkt die Reihe convergirt, weiss man, und wie schnell sie in diesem convergirt, kann zwar an und für sich von Interesse sein, aber nicht bei der Frage, ob die Reihe in gleichem Grade convergirt. Deshalb hat man nicht nöthig, hier die Fälle $x=\pm\pi$ zu betrachten, wenn auch die betreffende Abscisse nicht von selbst schon ausgeschlossen sein sollte.

Es sei nun $x<\pi$ und positiv, ein negatives x würde nicht eine wesentlich verschiedene Behandlung erfordern. Alsdann bleibt $\frac{\pi-x}{2}$ unter $\frac{\pi}{2}$ und das erstere Integral, welches von der Form S ist, nähert sich, für alle x gleichmässig, dem Werthe $\frac{1}{2}f(x)$.

Das zweite Integral lässt sich in eines von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zerlegen, welches sich in gleicher Weise $\frac{1}{2}f(x)$ nähert, und in eines von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi+x}{2}$, welches, wenn man $\pi-\beta$ für β als Veränderliche einführt, in

$$(2.)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi-x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(2\beta+x-2\pi)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

übergeht. Man behandelt dies in ähnlicher Art, wie σ im §. 8, zerfällt es also in die Differenz zweier Integrale, die 0 zur unteren Grenze haben, indem man die Function f von $\beta=\frac{\pi-x}{2}$ bis $\beta=0$ so fortsetzt, dass sie dort constant $f(-\pi+0)$ bleibt, und erkennt dann sofort, dass der Werth von (2.) mit wachsendem n sich für alle x in gleichem Grade der Null nähert, wodurch der Satz bewiesen ist.

Halle, im Februar 1870.