

Construction des regulären Sieben- und Dreizehn-Ecks.

VON FR. G. AFFOLTER ZU SOLOTHURN.

Die Construction der regulären 7- und 13-Ecke, überhaupt aller derjenigen regulären Vielecke, welche mittelst Construction von Gleichungen dritten Grades gefunden werden, lässt sich sehr leicht ausführen, sobald man die Construction der cubischen Gleichungen mittelst der Trisection des Winkels bewerkstelligt. Der übrige Theil der Construction ist wesentlich übereinstimmend mit der Construction der regulären Vielecke, welche sich mittelst des Zirkels und Lineals ausführen lassen. Da die Trisection eines Winkels*) mittelst der Fusspunkteurven des Kreises elegant und leicht ausgeführt werden kann, so halte ich die Construction der regulären Vielecke (dritten Grades) mittelst Trisection für die einfachste.

I.

Da unsere Constructionen auf der Construction der Gleichung dritten Grades mittelst Trisection beruhen, so gebe ich diese Construction zunächst an. Haben wir die cubische Gleichung mit drei reellen Wurzeln

$$(1) \quad x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

so erhalten wir durch Wegschaffen des zweiten Gliedes die neue Gleichung

$$(2) \quad x_1^3 - 3 p x_1 + 2 q = 0,$$

wo der Werth von p wesentlich positiv ist. Ersetzen wir x_1 durch $R \cos \alpha$, so ergeben sich bekanntlich R und α durch die Gleichungen

$$(3) \quad R = 2 \sqrt[3]{p}, \quad \cos 3 \alpha = - \frac{q}{p} \frac{1}{\sqrt[3]{p}}.$$

Die Werthe R und 3α lassen sich nun leicht geometrisch bestimmen. Wir theilen den Winkel 3α in drei gleiche Theile mittelst der Trisection und erhalten dann für x die drei Werthe

*) H. Hippauf, Lösung des Problems der Trisection. Leipzig, Teubner. 1872.

$$(4) \quad R \cos \alpha - \frac{a_1}{3}; \quad -R \cos (\alpha - 60) - \frac{a_1}{3}; \quad -R \cos (\alpha + 60) - \frac{a_1}{3}.$$

Die Wurzeln der Gleichung dritten Grades erhält man also, indem man die Gleichungen (3) und (4) constructiv ausführt. Da durch die speciellen Werthe von p und q in unseren späteren Fällen die Constructionen sich ändern, so unterlasse ich hier die weitere Angabe der Construction der Wurzeln.

II.

Trigonometrische Lösung der Construction des regulären 7- und 13-Ecks.

a. Das reguläre Siebeneck.

Setzen wir $\cos \left(h \cdot \frac{2\pi}{7} \right) = c_h$, so ergeben sich zwischen den drei Werthen $c_1; c_2; c_3$ die Relationen:

$$(1) \quad c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{1}{2}.$$

$$(2) \quad c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1 = -\frac{1}{4}.$$

$$(3) \quad c_1 c_2 c_3 = +\frac{1}{8}.$$

Die Werthe c_h bestimmen sich also aus der Gleichung

$$(4) \quad c^3 + \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{2} c - \frac{1}{8} = 0.$$

Setzen wir $2c = x$, und $x = y - \frac{1}{3}$, so ergibt sich die Gleichung

$$(5) \quad y^3 - \frac{7}{3} y - \frac{7}{27} = 0.$$

Wir haben somit

$$(6) \quad R = \frac{2}{3} \sqrt[7]{7}; \quad \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \sqrt[7]{7};$$

und daher schliesslich

$$(7) \quad \begin{aligned} 2c_1 &= R \cos \alpha - \frac{1}{3}; \\ 2c_2 &= -R \cos (\alpha - 60) - \frac{1}{3}; \\ 2c_3 &= -R \cos (\alpha + 60) - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b. Das reguläre Dreizehneck.

Setzen wir $\cos \left(h \cdot \frac{2\pi}{13} \right) = c_h$, so sind die sechs Hauptwerthe $c_1; c_2; c_3; c_4; c_5; c_6$ zu bestimmen.

Wir setzen

$$c_1 + c_5 = x_1; \quad c_2 + c_3 = x_2; \quad c_4 + c_6 = x_3.$$

Zwischen diesen Werthen existiren die folgenden für uns wesentlichen Relationen:

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{2}.$$

$$(2) \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -1.$$

$$(3) \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{1}{8}.$$

Die Werthe x ergeben sich also als die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(4) \quad x^3 + \frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{8} = 0.$$

Ersetzen wir $2x$ durch $y - \frac{1}{3}$, so folgt

$$(5) \quad y^3 - \frac{1}{3} y + \frac{5}{27} = 0.$$

Wir haben also:

$$(6) \quad R = \frac{2}{3} \sqrt{13}; \quad \cos 3\alpha = -\frac{5}{2} \sqrt{\frac{1}{13}}.$$

Es bestimmen sich somit die Werthe x durch die Gleichungen

$$(7) \quad \begin{aligned} 2x_1 &= R \cos \alpha - \frac{1}{3}; \\ 2x_2 &= -R \cos (\alpha - 60) - \frac{1}{3}; \\ 2x_3 &= -R \cos (\alpha + 60) - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Aus den Werthen $2x_k$ ergeben sich die Cosinuswerthe c_k durch die Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} 2(c_1 + c_3) = 2x_1 \\ 4c_1 \cdot c_3 = 2x_3; \end{cases} \quad (9) \quad \begin{cases} 2(c_2 + c_3) = 2x_2 \\ 4c_2 \cdot c_3 = 2x_1; \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} 2(c_4 + c_6) = 2x_3 \\ 4c_4 \cdot c_6 = 2x_2. \end{cases}$$

Die Werthe c_h folgen somit aus der quadratischen Gleichung

$$(11) \quad (2c)^2 - 2x_h \cdot (2c) + 2x_{h-1} = 0,$$

wo h die Werthe 1, 2, 3 annimmt.

III.

Geometrische Construction des regulären 7- und 13-Ecks.

Indem wir die obigen Gleichungen constructiv lösen, ergeben sich für das reguläre 7- und 13-Eck die folgenden Resultate.

a. Das reguläre Siebeneck.

1. Man errichte in dem Kreise O mit dem Radius r zwei zu einander normal stehende Durchmesser AB und CD . Man trage in der Richtung CD über D hinaus die Strecke DE gleich dem dreifachen Durchmesser ab .

2. Wir schlagen über CE als Durchmesser den Halbkreis, welcher den Durchmesser AB über B hinaus in dem Punkte F schneidet. Wir ziehen die Gerade CF und errichten zu ihr die Normale CG im Punkte G , welche AB in dem Punkte G schneidet, und bestimmen auf AB die Punkte H und J , so dass $OH = \frac{2}{3} OF$ und $OJ = \frac{1}{2} OG$.

3. Wir errichten in J die Normale zu AB , welche den Kreis in dem Punkte K schneidet. Wir theilen den Bogen AK nach der Methode der Trisection, wodurch wir die drei Punkte L_1, L_2, L_3 erhalten.

Es ist also $AL_1 = \frac{1}{3} AK < \frac{1}{2} \pi$, $AL_2 = AL_1 + \frac{2}{3} \pi$ und $AL_3 = AL_1 + \frac{4}{3} \pi$. Wir ziehen die Radien nach den Punkten L_1 ; L_2 ; L_3 .

4. Wir schlagen um O als Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius OH . Dieser Kreis schneide obige Radien in den Punkten L'_1 , L'_2 , L'_3 . Von diesen Punkten fällen wir auf AB die Normalen, deren Fusspunkte l_1 ; l_2 ; l_3 seien. In der Richtung AB tragen wir von diesen Punkten die Strecke $l_1 l'_1 = l_2 l'_2 = l_3 l'_3 = \frac{1}{3} r$ ab, wodurch die Punkte l'_1 ; l'_2 ; l'_3 festgestellt werden.

5. Wir bestimmen die Punkte p_1 ; p_2 ; p_3 , durch welche die Strecken Ol'_1 ; Ol'_2 ; Ol'_3 halbiert werden. Errichten wir nun in den Punkten p_1 , p_2 , p_3 die Normalen, so schneiden diese in 6 Punkten den Kreis O . Diese Punkte sind 6 Punkte des eingeschriebenen 7-Ecks. Der 7^{te} Eckpunkt liegt im Punkte A .

b. Das reguläre Dreizehneck.

1. Wir construiren im Kreise O zwei zu einander normal stehende Durchmesser AB und CD und ziehen in den beiden Punkten C und D die Tangenten. Wir unterscheiden die positiven und negativen Seiten der Durchmesser und Tangenten, und zwar sei die positive Richtung mit BA resp. DC und die negative mit AB resp. CD parallel.

3. Wir tragen auf dem Durchmesser DC die Strecke $+DE = 6$ Durchmesser ab und schlagen über der Strecke DE als Durchmesser den Halbkreis, welcher AB über A hinaus in dem Punkte F schneidet. Wir ziehen FD und errichten im Punkte D die Normale zu FD , welche AB auf der negativen Seite OB im Punkte G schneidet.

3. Wir bestimmen die Punkte H und J , so dass $OH = \frac{2}{3} OF$ und $OJ = \frac{2}{3} OG$ wird, und errichten in dem Punkte J die Normale zu AB , welche den Kreis O in dem Punkte K schneide. Den Bogen AK theilen wir nach der Trisection in den Punkten L_1 ; L_2 ; L_3 und ziehen die Radien OL_1 ; OL_2 ; OL_3 in genügender Verlängerung.

4. Wir schlagen um O als Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius OH , welcher jene Radien in den Punkten L'_1 ; L'_2 ; L'_3 schneide. Wir füllen von diesen Punkten zur Tangente in dem Punkte D die Normalen, deren Fusspunkte bezüglich l_1 ; l_2 ; l_3 seien. Wir tragen von diesen Punkten in negativer Richtung je $\frac{1}{3}$ Radius ab, so dass wir die Punkte e_1 ; e_2 ; e_3 erhalten. Es ist also $l_1 e_1 = l_2 e_2 = l_3 e_3 = -\frac{1}{3} r$.

5. Wir verbinden die Punkte e_1 ; e_2 ; e_3 mit dem Punkte C durch Gerade. Diese schneiden den Kreis O zum zweiten Male in den Punkten e'_1 ; e'_2 ; e'_3 . Wir ziehen die Geraden De'_1 ; De'_2 ; De'_3 , welche die Tangente im Punkte C in den Punkten e_1 ; e_2 ; e_3 schneiden. Wir tragen in positiver Richtung $C\gamma = 4r$ ab und verbinden den Punkt γ mit den Punkten e_1 , e_2 , e_3 durch Gerade. Diese schneiden den

Durchmesser CD in den Punkten $n_1; n_2; n_3$. Wir ziehen die Strahlen $c_1n_3; c_2n_1; c_3n_2$. Diese schneiden den Kreis O in den Punkten

$$N_1', N_1''; N_2', N_2''; N_3', N_3'',$$

und zwar liegen alle Punkte auf demselben Halbkreise, wo der Punkt D selbst liegt. Wir ziehen die Strahlen $CN_x^{(g)}$, welche den Durchmesser AB in den Punkten

$$m_1', m_1''; m_2', m_2''; m_3', m_3''$$

schneiden. Errichten wir in diesen Punkten $m_x^{(g)}$ die Normalen zu AB , so schneiden diese den Kreis O in 12 Punkten. Diese sind 12 Eckpunkte des eingeschriebenen regulären 13-Ecks. Der 13^{te} Punkt liegt in dem Punkte A selbst.

Bemerkung. Es hält nun nicht schwer, das Constructionsverfahren für alle regulären Vielecke (dritten Grades) herzuleiten. Die Constructionen der nächstfolgenden Vielecke (z. B. für 19, 37) sind aber schon so weitläufig, dass ich mich enthalte, dieselben hier anzugeben. Das Verfahren bei diesen wie bei allen andern, also im allgemeinen Falle aufzustellen, bietet keine Schwierigkeiten mehr.

Pisa, den 20. Januar 1873.
