

## 22.

## Théorème relatif à une certaine fonction transcendante.

(Par E. F. A. Minding.)

Parmi les cas les plus simples, qui peuvent servir à éclairer d'avance la théorie générale des intégrales à différentielles algébriques, — théorie dont l'immortel Abel a jeté les fondemens dans ce qu'on lit pag. 200. du quatrième volume de ce journal, — on doit compter celui de l'intégrale  $\int dx \sqrt[3]{(1 + \alpha x^3)}$ , dont je viens ici proposer la propriété fondamentale.

Pour abrégé je désignerai par  $\Delta x$  la fonction  $\sqrt[3]{(1 + \alpha x^3)}$ , dans laquelle  $\alpha$  représente une constante quelconque, qu'il est superflu d'indiquer sous le signe  $\Delta$ , attendu qu'elle restera la même dans le cours de cette note.

Déterminons d'abord les quantités variables  $a$  et  $b$ , que nous supposons être indépendantes entre elles, de manière que l'équation

$$(x^3 + a)^3 - b^3 x^3 (1 + \alpha x^3) = 0$$

ait parmi ses racines deux quantités variables quelconques, que nous désignerons par  $x_1$  et  $x_2$ .

Cela posé, on pourra égaler l'expression

$$(x^3 + a)^3 - b^3 x^3 (1 + \alpha x^3)$$

à un produit de trois facteurs  $x^3 - x_1^3$ ,  $x^3 - x_2^3$ ,  $x^3 - x_3^3$ , en représentant par  $x_3$  une troisième racine de l'équation proposée, dont la valeur dépendra des variables données  $x_1$  et  $x_2$ .

En effet en supposant

$$(x^3 + a)^3 - b^3 x^3 (1 + \alpha x^3) = (x^3 - x_1^3)(x^3 - x_2^3)(x^3 - x_3^3),$$

on aura

$$-3a + \alpha b^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

$$3a^2 - b^3 = x_1^3 x_2^3 + x_1^3 x_3^3 + x_2^3 x_3^3$$

$$-a^3 = x_1^3 x_2^3 x_3^3,$$

• ou bien, plus simplement,  $-a = x_1 x_2 x_3$ .

Pour déterminer  $a$  et  $b$  en fonctions de  $x_1$  et  $x_2$ , on pourra se servir des équations:

$$x_1^3 + a = b x_1 \Delta x_1$$

$$x_2^3 + a = b x_2 \Delta x_2.$$

On tire de là :

$$a = x_1 x_2 \frac{(x_1^3 \Delta x_2 - x_2^3 \Delta x_1)}{x_1 \Delta x_1 - x_2 \Delta x_2},$$

$$b = \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 \Delta x_1 - x_2 \Delta x_2},$$

$$x^3 = \frac{x_2^3 \Delta x_1 - x_1^3 \Delta x_2}{x_1 \Delta x_1 - x_2 \Delta x_2}.$$

Considérons maintenant la somme :

$$dx_1 \Delta x_1 + dx_2 \Delta x_2 + dx_3 \Delta x_3.$$

En substituant au lieu de  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$ ,  $\Delta x_3$  les expressions équivalentes  $\frac{x_1^3 + a}{b x_1}$ ,  $\frac{x_2^3 + a}{b x_2}$ ,  $\frac{x_3^3 + a}{b x_3}$ , on trouve que la somme proposée est égale à la suivante :

$$\frac{1}{b} [x_1^3 dx_1 + x_2^3 dx_2 + x_3^3 dx_3] + \frac{a}{b} \left[ \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \frac{dx_3}{x_3} \right],$$

qui revient à celle-ci :

$$\frac{1}{3b} d(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \frac{a}{b} \cdot \frac{d(x_1 x_2 x_3)}{x_1 x_2 x_3} = \frac{1}{3b} d(-3a + a b^3) + \frac{da}{b} = a b db.$$

Donc on a :  $dx_1 \Delta x_1 + dx_2 \Delta x_2 + dx_3 \Delta x_3 = a b db$ , ou bien, en intégrant et remplaçant  $b$  par sa valeur trouvée ci-dessus :

$$\int dx_1 \Delta x_1 + \int dx_2 \Delta x_2 + \int dx_3 \Delta x_3 = \frac{1}{2} a \left[ \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 \Delta x_1 - x_2 \Delta x_2} \right].$$

La quantité  $x_3$  est déterminée par l'équation :

$$x_3 = \frac{x_2^3 \Delta x_1 - x_1^3 \Delta x_2}{x_1 \Delta x_1 - x_2 \Delta x_2}.$$

On aurait pu, après l'intégration, ajouter une constante ; mais il est facile de se convaincre qu'en commençant les intégrations par des valeurs zéro de  $x_1$  et  $x_2$ , la constante s'évanouit.

En égalant entre elles les quantités arbitraires  $x_1$  et  $x_2$ , les résultats précédents se changent comme il suit :

$$2 \int dx_1 \Delta x_1 + \int dx_3 \Delta x_3 = \frac{1}{2} a \left[ \frac{3x_1^3 \Delta x_1^2}{1 + 2a x_1^3} \right],$$

$$x_3 = - \frac{x_1 (2 + a x_1^3)}{1 + 2a x_1^3}.$$

De là découle immédiatement ce que nous venons de dire par rapport à la constante d'intégration.