
DISTINCTION DE DEUX RÉGIMES DANS LE MOUVEMENT DES FLUIDES ;

PAR M. M. COUETTE.

1. D'après les formules établies par *de Prony* (1), en 1804, et les autres hydrauliciens, pour les tuyaux de conduite, la perte de charge par unité de longueur y est à peu près proportionnelle au carré de la vitesse moyenne de l'eau. D'après les expériences de *Girard* (2) et celles de *Poiseuille*, elle est, dans les tubes fins, proportionnelle à cette vitesse même. Il y a donc deux lois différentes, l'une pour les tuyaux, l'autre pour les tubes fins. Ces lois sont-elles des formes limites d'une même expression plus générale, ou bien sont-elles essentiellement différentes ?

La question pouvait paraître douteuse au commencement de la seconde moitié de ce siècle ; car la loi des tubes fins semblait s'altérer graduellement dans les secondes séries d'expériences de *Girard* et de *Poiseuille*, et l'on n'avait pas encore trouvé la cause de cette altération dans la dépense de charge qui se produit à l'entrée du tube. En éliminant cette circonstance perturbatrice, par l'emploi de tubes piézométriques implantés sur le tuyau assez loin des extrémités, *Darcy* (3), en 1857, reconnut que les deux lois se succédaient sans continuité dans un même tuyau, mais ne poussa pas plus loin l'étude de ce fait.

M. *Osborne Reynolds* (4), en 1883, reprenant des expériences semblables à celles de *Darcy*, avec des tuyaux de plomb de 0^m, 00615 et de 0^m, 0127 de diamètre, constata aussi que la proportionnalité de la résistance à la vitesse se maintenait rigoureuse

(1) *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes* ; 1804.

(2) *Mémoires de l'Institut* ; 1813, 1814, 1815.

(3) *Mémoires des Savants étrangers*, t. XV, p. 215 et 354.

(4) *Proceedings of the Royal Society of London*, t. XXXV, p. 84.

tant que celle-ci restait inférieure à une certaine limite, et cessait brusquement dès que cette limite était dépassée. Il distingua très nettement deux régimes, qu'il appelle mouvement *direct* et mouvement *sinueux*, et rendit visible le passage de l'un à l'autre par une expérience élégante. Il introduisit dans l'axe d'un tube de verre, traversé par un courant d'eau incolore, un mince filet d'eau colorée; ce filet reste parfaitement cylindrique tant que la vitesse du liquide est inférieure à la limite pour laquelle la loi de la résistance change, et, à partir de ce moment, se disperse en tourbillons. Enfin M. O. Reynolds a trouvé que la vitesse limite était inversement proportionnelle au diamètre du tube.

2. Je suis parvenu, par des méthodes expérimentales différentes, aux mêmes conclusions que Darcy et M. O. Reynolds avaient déjà posées à *mon insu*; car mon travail était terminé depuis deux mois, quand une communication bienveillante de M. Boussinesq m'a fait connaître le Mémoire du second et les observations du premier relatives au changement de régime. J'ai complété ces conclusions en insistant sur la discontinuité des deux régimes, et en signalant la phase où ils se produisent alternativement.

J'ai employé trois méthodes distinctes : 1° mesure du frottement exercé sur la paroi d'un cylindre par un fluide entraîné par la rotation d'un second cylindre coaxial au premier; 2° mesure de la perte de charge qui se produit dans l'écoulement d'un liquide à travers un tube; 3° observation de la veine qui jaillit d'un long tube.

3. En appliquant les équations de Navier au mouvement d'un fluide compris entre deux cylindres coaxiaux; en les intégrant dans l'hypothèse la plus simple possible, celle de la division du fluide en couches concentriques indéformables; en supposant enfin une adhérence parfaite entre le fluide et les parois, on obtient la formule

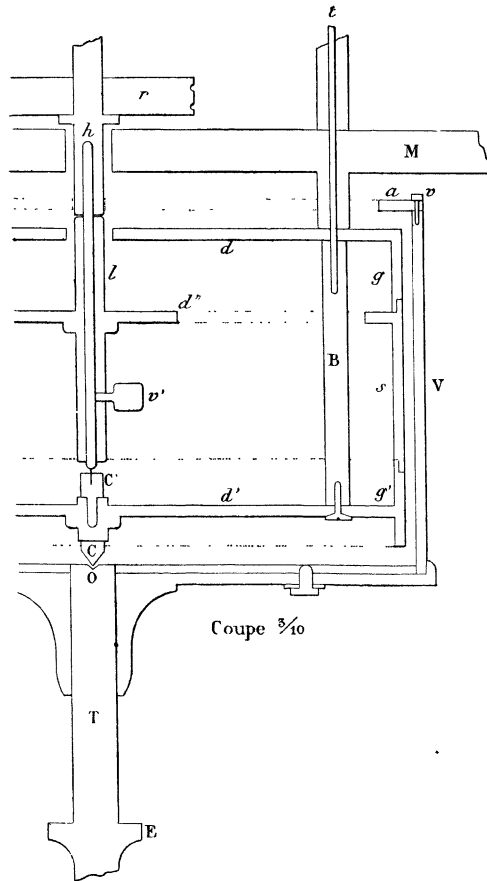
$$(1) \quad M = \frac{4\pi\Omega R_1^2 R_2^0 h\varepsilon}{R_1^2 - R_0^2},$$

dans laquelle Ω est la vitesse angulaire du cylindre extérieur

tournant de rayon R_1 ; M le moment, par rapport à l'axe, du frottement exercé par le fluide sur une tranche de hauteur h découpée dans le cylindre intérieur fixe de rayon R_0 ; ε le *coefficient de frottement intérieur*.

4. Je ne puis donner ici qu'une description très sommaire de mon appareil. Un vase cylindrique de laiton V (*fig. 1*) tourne autour

Fig. 1.



de son axe, qui est vertical; il est mû par une machine Gramme; ses tours s'inscrivent électriquement sur un enregistreur Marey. Un cylindre de laiton s , de rayon un peu plus petit, est suspendu

à un fil d'acier. Sa surface est prolongée par des anneaux de garde g et g' . Le pivot c' et un petit tube fixe, à travers lequel passe la partie inférieure du fil d'acier, empêchent les ballottements du cylindre s , tout en lui laissant une grande mobilité autour de son axe.

Pour mesurer le frottement exercé par le fluide sur le cylindre s , on l'équilibre par la torsion du fil ou par des poids qui agissent, au moyen de cordons et de poulies de renvoi, sur la poulie r liée à ce cylindre, et dont j'appellerai le rayon r .

Les dimensions principales de l'appareil sont

$$\begin{aligned} R_1 &= 14^{\text{cm}}, 6305, & R_0 &= 14^{\text{cm}}, 3930, \\ h &= 7^{\text{cm}}, 9053, & r &= 3^{\text{cm}}, 8412. \end{aligned}$$

Des expériences préalables permettaient de traduire en poids les mesures faites en angles de torsion.

§. Soient N le nombre de tours par minute du cylindre V , P le poids qui équilibre le frottement; on a

$$\Omega = \frac{2N\pi}{60}, \quad M = Pgr,$$

et, en portant ces expressions dans la formule (1), on en conclut

$$\frac{P}{N} = \frac{2\pi^2 R_1^2 R_0^2 h \varepsilon}{15(R_1^2 - R_0^2)gr} = \text{const.}$$

Or, cette constance du rapport $\frac{P}{N}$ se vérifie parfaitement dans nos expériences, tant que $N < 56$. Mais quand N varie entre 55 et 59, $\frac{P}{N}$ augmente brusquement dans la proportion de 3 à 4. Ce rapport continue ensuite à augmenter en même temps que la vitesse.

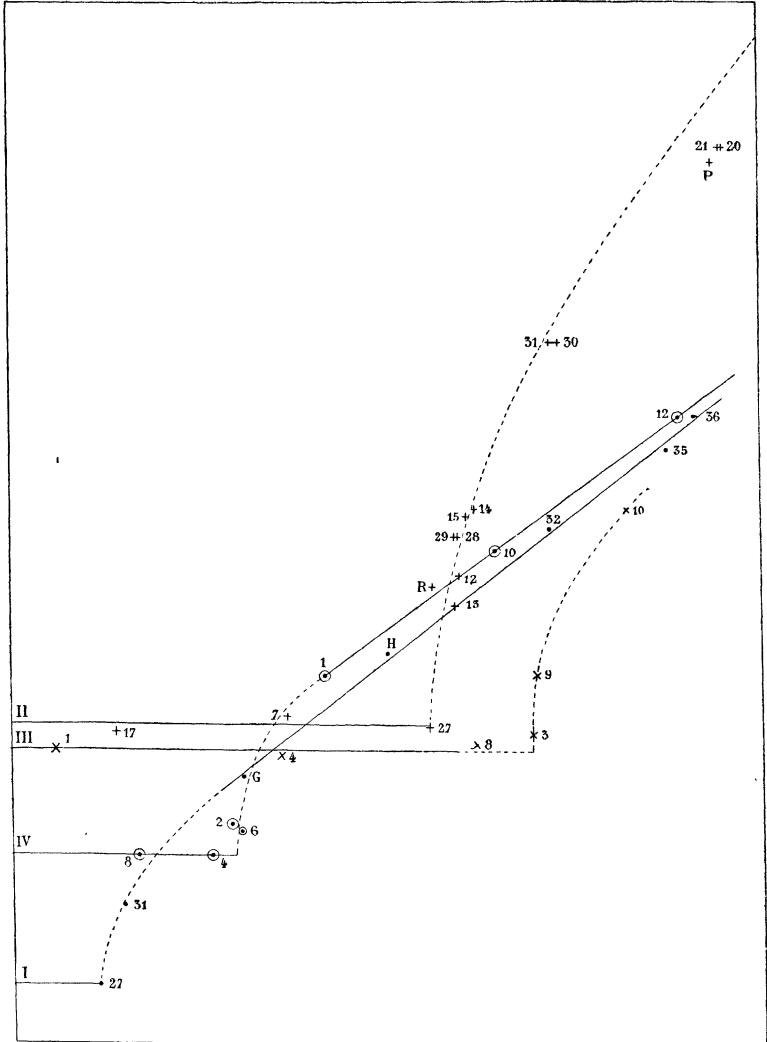
La ligne I (*fig. 2*) représente l'ensemble de ces expériences; la ligne II reproduit à une échelle quintuple la région où se manifeste la discontinuité.

Les dix-neuf expériences du premier groupe se serrent étroitement autour de la droite AB :

$$\frac{P}{N} = 0, 2151;$$

aussi n'ai-je figuré que les deux (17 et 7) qui s'en écartent le plus,

Fig. 2.



	I.	II.	III.	IV.	
Abscisses.....	$0,2N$	N	$30q$	$8q$	} mm
Ordonnées.....	$40 \frac{P}{N}$	$200 \frac{P}{N}$	3000ε	2000ε	

et la dernière (27) qui, conjointement avec la première (R) du second groupe, marque d'une manière très précise l'abscisse de la discontinuité. Pour mettre celle-ci hors de doute, j'ai, on le voit, multiplié les expériences. Elles sont difficiles dans cette région. L'aiguille, au lieu d'osciller tranquillement autour d'une position d'équilibre, comme elle le fait pour les vitesses inférieures à 56 tours par minute, éprouve, sans cause apparente, des déplacements brusques qui la font sortir de l'arc divisé, et, pour la ramener aux environs du zéro, il faut souvent modifier de 2^{es} ou 3^{es} la charge des plateaux, qui est alors seulement d'une quinzaine de grammes. En recommençant bien des fois, on réussit enfin à voir l'aiguille à peu près fixe pendant la minute nécessaire à l'inscription des tours. Les points ainsi obtenus sont disposés assez irrégulièrement.

Ces perturbations disparaissent quand on augmente encore la vitesse. On ne les observe plus à partir de 127 tours. Au delà de cette limite, les expériences sont aussi faciles que celles du premier groupe, et les points figuratifs se resserrent autour d'une droite dont l'équation, formée par la méthode d'interpolation de Cauchy, à l'aide des douze expériences de cette région, est

$$\frac{P}{N} = 0,03260 + 0,0038832N.$$

La plus grande valeur réalisée pour N a été 450.

6. La loi du frottement de l'air, étudiée dans le même appareil avec l'emploi exclusif du fil de torsion, présente, comme celle de l'eau, une discontinuité; mais celle-ci ne se manifeste nettement que vers 750 tours.

Au-dessous de 300 tours, le rapport $\frac{T}{N}$ (T étant l'angle de torsion), corrigé de l'influence de la température, reste constant, à 0,01 près de sa valeur moyenne, qui est 0,2915.

Entre 300 et 800 tours, il augmente lentement d'environ 0,1 de sa valeur; mais, à partir de 800 tours, son augmentation devient très rapide, et la disposition des points représentatifs des expériences suivantes reproduit celle de la région troublée pour l'eau. Je n'ai pas réalisé d'assez grandes vitesses pour retrouver la

seconde région régulière qui, d'après le graphique, paraît devoir commencer peu au delà de 1300 tours.

7. Les phénomènes observés dans les tubes présentent un parallélisme parfait avec ceux que nous venons d'exposer.

Soit un tube cylindrique à base circulaire, de rayon R et de longueur indéfinie, traversé par un courant permanent de liquide. En supposant : 1° que les vitesses sont parallèles à l'axe du tube; 2° qu'elles sont nulles au contact de la paroi, on obtient, par l'intégration des équations de *Navier*, la formule

$$(1) \quad q = \frac{\pi R^4 C}{8 l \varepsilon},$$

dans laquelle q est le débit, c'est-à-dire le volume du liquide qui traverse pendant l'unité de temps chaque section droite du tube; c est la différence de charge exprimée en unités de poids par unité de surface, entre deux sections droites dont la distance est l ; ε est le coefficient de viscosité.

L'application de cette formule à un tube de longueur finie exige quelque précaution.

Il serait généralement incorrect de mettre à la place de C la différence de charge C_1 qu'on mesure entre les deux réservoirs réunis par le tube, et à la place de l la longueur totale l_1 de celui-ci. Mais on peut penser qu'entre deux sections, suffisamment éloignées des extrémités, le mouvement est le même que dans un tube indéfini. Soient $l_1 - \lambda$ la distance de ces deux sections, $C_1 - \gamma$ la différence de charge entre elles; nous écrirons la formule (1) sous la forme

$$q = \frac{\pi R^4}{8 \varepsilon} \frac{C_1 - \gamma}{l_1 - \lambda}.$$

Prenons deux tubes de même rayon et de longueurs différentes l_1 et l_2 , embouchés de la même manière.

Faisons-y couler le même liquide en donnant aux différences de charge C_1 et C_2 des valeurs telles que le débit q des deux tubes soit le même. Retranchons par la pensée, des deux tubes, des longueurs λ égales entre elles et suffisantes pour que, dans les régions moyennes restantes, le mouvement soit le même que dans un tube indéfini. Les corrections γ qu'il faudra retrancher de C_1 et de C_2 pour ob-

tenir les différences de charge entre les sections qui limitent les régions moyennes seront égales entre elles; car elles ne peuvent évidemment dépendre que de R , ε , ρ , q et λ (ρ est la densité du liquide), toutes choses qui sont ici égales pour les deux tubes. Nous aurons donc à la fois

$$q = \frac{\pi R^4}{8\varepsilon} \frac{C_1 - \gamma}{l_1 - \lambda} = \frac{\pi R^4}{8\varepsilon} \frac{C_2 - \gamma}{l_2 - \lambda},$$

d'où nous tirons

$$(2) \quad q = \frac{\pi R^4}{8\varepsilon} \frac{C_1 - C_2}{l_1 - l_2},$$

formule qui ne contient plus les quantités inconnues γ et λ .

8. Pour donner exactement le même débit aux deux tubes T_1 et T_2 , je les ai disposés à la suite l'un de l'autre entre trois larges réservoirs M, N, P (*fig.* 3). L'eau partait d'un très grand vase de Mariotte (en cuivre) A, traversait les réservoirs et les tubes, et sortait par l'orifice B. Le tube du vase de Mariotte communiquait avec un réservoir d'air comprimé C.

Pour mesurer le débit, on recueillait et l'on pesait le liquide sorti en B pendant un temps connu.

Les différences de charge entre les réservoirs M, N et P se mesuraient sur un manomètre H formé de trois tubes de verre communiquant entre eux inférieurement et réunis par des tubes de plomb l , respectivement aux trois réservoirs. La partie inférieure des tubes manométriques contenait du mercure; leur partie supérieure et les tubes de plomb étaient remplis d'eau.

9. Les lignes III et IV de la *fig.* 2 représentent les résultats obtenus avec deux couples de tubes ayant pour rayons respectifs

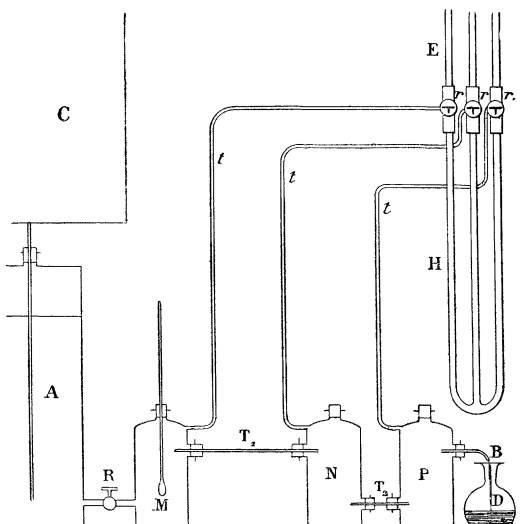
$$0^{\text{cm}},0500 \quad \text{et} \quad 0^{\text{cm}},0906.$$

Leur comparaison avec la ligne I, qui représente les résultats de l'appareil à cylindre, rend évidente la similitude des phénomènes; et l'accord entre deux méthodes expérimentales aussi différentes ne permet pas d'attribuer aux défauts des appareils ou aux erreurs d'observations la discontinuité trouvée, dont l'ordre de grandeur rend, du reste, une pareille explication bien peu vraisemblable.

La valeur du *coefficient de frottement intérieur* ε , tirée des ex-

périences où cette valeur reste constante, concorde d'ailleurs avec celle qu'on déduit des expériences de *Poiseuille*.

Fig. 3.



Nous pouvons donc poser les conclusions suivantes :

1° Le mouvement des fluides peut se faire suivant deux régimes différents ;

2° Le premier régime est conforme aux intégrales les plus simples des équations de *Navier* ;

3° Le second régime n'est pas conforme à ces intégrales, et quand on lui applique les mêmes formules qu'au premier, on trouve pour le coefficient de viscosité des valeurs qui croissent avec la vitesse du cylindre tournant, ou le débit dans un même tube, suivant une fonction linéaire ;

4° Quand on augmente progressivement la vitesse ou le débit, le premier régime se produit seul jusqu'à une certaine limite ; le second régime se produit seul au delà d'une autre limite, plus reculée que la première ; entre les deux limites l'accroissement de la résistance est très rapide, les expériences de mesure sont difficiles et parfois discordantes.

10. L'observation de la veine jaillissant dans l'air d'un long tube cylindrique horizontal va nous révéler ce qui se passe dans cette région troublée.

Cette veine présente deux aspects bien distincts. Elle est constamment lisse quand le débit est inférieur à une certaine limite q_0 , constamment rugueuse quand il est supérieur à une autre limite q_1 plus reculée; et dans ces deux cas son amplitude reste constante pour une charge constante. Mais quand le débit est compris entre q_0 et q_1 , la veine éprouve, sous une charge constante, des variations brusques et sans régularité apparente, dans son aspect et dans son amplitude, celle-ci étant toujours plus grande pour la veine lisse que pour la veine rugueuse.

La comparaison de l'observation de la veine avec les expériences décrites plus haut m'a permis de constater que la veine lisse se produit pendant le premier régime, et la veine rugueuse pendant le second. Les soubresauts et les changements d'aspect de la veine nous apprennent qu'entre les deux limites q_0 et q_1 les deux régimes sont possibles et se produisent alternativement.

Le débit q_0 , limite inférieure des oscillations de la veine, est indépendant de la longueur du tube ⁽¹⁾, et proportionnel à son rayon, le liquide restant le même; cette loi, qui ressort de mes expériences, avait déjà été énoncée par M. O. Reynolds, sous la forme suivante : La vitesse moyenne pour laquelle les tourbillons commencent est en raison inverse du rayon du tube.

Le savant anglais a déduit, sur des considérations théoriques peu rigoureuses, une seconde loi relative à l'influence de la nature du liquide; c'est que *la vitesse moyenne pour laquelle les tourbillons commencent dans un même tube est proportionnelle à $\frac{\epsilon}{\rho}$* . Il ne l'a vérifiée expérimentalement que pour l'eau à diverses températures. Nos expériences sur l'eau et sur l'air, faites avec l'appareil à cylindres, apportent une certaine confirmation à cette loi. En effet,

(1) Mais quand celle-ci devient trop petite, les oscillations ne sont plus observables.

elle se traduit ici par la formule

$$(1) \quad \frac{m}{m'} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)}{\left(\frac{\varepsilon'}{\rho'}\right)},$$

m et m' représentant les nombres de tours par minute pour lesquels la discontinuité apparaît avec deux fluides différents.

Or, pour l'eau à 16°, 7, on a

$$\varepsilon' = 0,01096, \quad \rho' = 1, \quad m' = 56;$$

pour l'air à 20°, et sous la pression de 76^{cm},

$$\varepsilon = 0,00018, \quad \rho = 0,0012.$$

La formule (1) donne donc $m = 760$ tours, ce qui s'accorde bien avec nos expériences.
