10. *Zur Frage nach der freien Beweglichkeit der Elektronen;*
von Ludwig Silberstein.

In meiner ersten auf diesen Gegenstand bezüglichen Abhandlung[1]) wurden für die als Unstetigkeitsfläche erster Ordnung aufgefaßte Elektronenoberfläche die, dort so genannten, *elektrodynamischen Kompatibilitätsbedingungen* aufgestellt, deren Gültigkeit ich später[2]) für beliebig hohe Ordnung $\nu \geq 1$ bewiesen habe.

Sind e, m die beiden Sprungvektoren, n die Einheitsnormale der Elektronenoberfläche σ, ferner v die (dort mit X bezeichnete) resultierende Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes von σ, schließlich $\mathfrak{v} = v\,n$ und c die (skalare) kritische Geschwindigkeit, so lauteten die genannten Bedingungen

$$\text{(I)} \qquad (e\,n)\,v = \mathfrak{v}\,e + c\,V n\,m\,,$$

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{v}\,m = c\,V n\,e\,,$$

oder auch

$$\text{(III)} \qquad v = \frac{\mathfrak{v}^2 - c^2}{\mathfrak{v}\,e\,n}\,e + \frac{c^2}{\mathfrak{v}}\,n\,,$$

$$\text{(IV)} \qquad \mathfrak{v} = \frac{c}{m^2}\cdot n\,V e\,m\,.$$

Aus diesen Bedingungen glaubte ich damals den folgenden, gegen die Elektronisten gerichteten Schluß ziehen zu dürfen: „*Ist also die Elektronenoberfläche der Sitz von Unstetigkeiten von noch so hoher Ordnung, so ist die augenblickliche Geschwindigkeit v eines jeden ihrer Punkte durch die gleichzeitigen e, m vollständig bestimmt. Es läßt sich also bei gegebenem Anfangszustande des Feldes die Bewegung des Elektrons nicht willkürlich vorschreiben.*“

Inzwischen hatte mich aber Hr. Sommerfeld durch einen längeren, für mich äußerst lehrreichen Briefwechsel zur Überzeugung gebracht, daß meine soeben angeführte Behaup-

---

1) L. Silberstein, Ann. d. Phys. **28.** p. 308 ff. 1909.

2) l. c. **29.** p. 523 ff. 1909.

tung [trotz der Richtigkeit der Kompatibilitätsbedingungen (I) bis (IV)] ganz wesentlich, und zwar zugunsten der Elektronentheorie, wie folgt abzuändern ist:

Es seien für $t = t_0$ die Kräfte E, M für den ganzen Raum, also auch die Sprungvektoren e, m für die ganze Oberfläche σ des betrachteten Elektrons gegeben. Setzt man sie in meine Kompatibilitätsbedingungen (III), (IV) ein, so erhält man wohl die Geschwindigkeit v eines jeden Flächenelementes $d\sigma$. Dies ist aber *nicht die einzig mögliche* Bewegung; sie ist es nur, wenn man eben ausdrücklich fordert, daß Kompatibilität herrsche, d. h. daß sich von der Elektronenoberfläche im Augenblick t_0 keine Unstetigkeitsfläche oder (wie man sie bequem nennen kann) keine „Röntgenwelle" abspalte. Man könnte dies etwa die *ausgezeichnete* Bewegung nennen.[1] Außer ihr sind aber unendlich viele andere zulässig. Mit anderen Worten: Trotzdem das Anfangsfeld gegeben ist, kann man wohl, wie es die Elektronisten verlangen, die Bewegung des Elektrons *willkürlich vorschreiben,* — nur daß bei anderem v, als es der ausgezeichneten Lösung entsprechen würde, sich von der Elektronenoberfläche eine Röntgenwelle oder vielmehr ein Paar solcher Wellen abspaltet, von denen sich eine in der Richtung $+n$, die andere in der Richtung $-n$ fortpflanzt.

Diese Wellen sind zwar rein transversal, sie nehmen aber im allgemeinen *nicht die ganzen* tangentiellen Teile der gegebenen Sprünge e, m mit sich, sondern lassen davon an der Elektronenoberfläche etwas übrig, so daß in der Formel (III) auch ein tangentieller Teil stehen bleibt und das Elektron durchaus nicht normal nach allen Seiten hin anzuschwellen braucht[2], sondern sich eben als ein Ganzes mit der frei vorgeschriebenen Geschwindigkeit v bewegen kann.

Welcher Anteil der ganzen Diskontinuität e, m von den Röntgenwellen weggerafft wird und wie viel an dem Elektron

1) Ist etwa das Elektron, also auch seine Oberfläche, starr, so ist eine ausgezeichnete Bewegung offenbar *nur für ganz besondere* Verteilungen von e, m möglich, d. h. mit der Starrheit des Elektrons verträglich.

2) Wäre nämlich der Rest von e rein normal, d. h. gleich $(e\,n)\,n$, so hätte man sofort aus (III): $v = c\,.\,n$.

haften bleibt (e', m'), — kann man eben auf Grund meiner Bedingungen (I), (II) beurteilen, wohlbemerkt unter der ausdrücklichen Voraussetzung, daß die Abspaltung nur im betrachteten Augenblicke t_0, nicht aber auch in dem nächstfolgenden, stattfindet, so daß sofort *nach* t_0 Kompatibilität zu herrschen anfängt.

Handelt es sich etwa um ein Elektron mit homogener Volumladung (Dichte ϱ), so hat man

$$e n = [\operatorname{div} E] = -\varrho \quad \text{und} \quad e' n = -\varrho\,,$$

so daß $e'' = e - e'$ rein tangentiell oder transversal ist, ebenso wie $m'' = m - m'$, und hat man die Geschwindigkeit v, also auch $\mathfrak{v} = v n$ vorgeschrieben, so erhält man für e', m' aus (II) und (I) oder (III):

$$e' = \frac{\varrho}{c^2 - \mathfrak{v}^2}(\mathfrak{v}\, v - c^2 n)\,, \tag{1}$$

$$m' = \frac{c\,\varrho}{c^2 - \mathfrak{v}^2}\, V n v\,, \tag{2}$$

woraus man, bei gegebenem e, m, ohne weiteres auch die Summe der von den beiden Wellen im Augenblick t_0 fortgerafften Bestandteile herleiten kann. Ist z. B. das Elektron kugelförmig und v eine reine Translationsgeschwindigkeit in der Richtung i (Einheitsvektor), d. h.

$$v = i\,.\,c\,\beta\,,$$

und bezeichnet man die „Poldistanz“ (n, i) mit θ, so hat man $\mathfrak{v} = c\,\beta\,.\cos\theta$, und es folgt aus (1), (2):

$$e' = \frac{\varrho\,(i\,.\,\beta^2\cos\theta - n)}{1 - \beta^2\cos^2\theta}\,; \quad m' = \frac{\varrho\,\beta\, V n i}{1 - \beta^2\cos^2\theta}\,, \tag{3}$$

oder auch, wenn man den meridionalen Einheitsvektor s durch die Gleichung $i = n\,.\cos\theta + s\,.\sin\theta$ und den zum Parallelkreis tangentiellen Einheitsvektor $p = V n s$ einführt:

$$\left\{\begin{aligned} e' &= -\varrho\,.\,n + \frac{\frac{1}{2}\varrho\,\beta^2\sin 2\theta}{1 - \beta^2\cos^2\theta}\, s\,, \\ m' &= \frac{\varrho\,\beta\sin\theta}{1 - \beta^2\cos^2\theta}\, p\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

so daß die e'-Linien (nach Abzug des konstanten normalen oder radialen Teiles) lauter Meridiankreise und die m'-Linien lauter Parallelkreise sind.

Verharrte etwa das Elektron bis zum Augenblick t_0 im Ruhezustand, so daß das Feld in diesem Augenblicke ein rein elektrostatisches und also $m = 0$, $e = -\varrho n$ ist, so kann man aus den obigen Formeln auf die Beschaffenheit der Röntgenwellen schließen, die, bei einem plötzlichen Stoß des Elektrons in der i-Richtung, eben im Begriff sind, sich von seiner Oberfläche abzuschälen.

Beispiele dieser und ähnlicher Art behalte ich mir für zukünftige Mitteilungen vor.

Die soeben angedeutete Anwendung der Kompatibilitätsbedingungen (I), (II) kann uns über die Röntgenwellen offenbar nur im Augenblick ihrer Entstehung, d. h. Abspaltung vom Elektron, einigen Aufschluß geben, nicht aber über das weitere Schicksal dieser Wellen. Letzteres kann man nun eruieren, indem man einen von der eigentlichen Elektronentheorie gänzlich unabhängigen Weg einschlägt.

Nachdem sich nämlich eine Röntgenwelle vom Elektron losgelöst hat, gelten die von mir früher schon[1]) aufgestellten Bedingungen

$$\frac{\mathfrak{v}}{c} e = V m n, \quad \frac{\mathfrak{v}}{c} m = V n e, \text{ [2])} \tag{5}$$

und zwar wenn die Welle von der Ordnung $\nu \geq 1$ ist. Es gelten also auch sämtliche damals aus (5) gezogenen Schlüsse, und da die jetzt betrachtete Röntgenwelle rein transversal ist, erhält man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ als einzige Möglichkeit

$$\mathfrak{v} = c,$$

und es reduzieren sich (5) auf

$$e = V m n, \quad m = V n e. \tag{6}$$

Die Welle pflanzt sich also normal mit der kritischen Geschwindigkeit in der positiven Richtung des Vektors $V e m$ fort.

Hiermit kann man also ihre Lage und Gestalt für jedes t konstruieren. Dies genügt aber wohl nicht; denn es würde sich außerdem wesentlich um eine Kenntnis der zeitlichen

1) L. Silberstein, Ann. d. Phys. **26.** p. 751 ff. 1908, wo die Vorzeichen aus Versehen umgekehrt waren. Die Formeln (5) sind übrigens ein Spezialfall von (I), (II), die für jedes $\nu \geq 1$ aufgestellt wurden.

2) Ich schreibe hier wieder kurz e, m anstatt e'', m''.

Änderungen der beiden Vektoren e, m handeln, worüber uns die Bedingungen (6) offenbar nicht belehren können.

Diese Bedingungen sind, für eine Unstetigkeit von der Ordnung ν, außer den Feldgleichungen, aus den identischen und kinematischen Bedingungen *eben derselben Ordnung* ν hergeleitet. Nun bestehen aber bei einer solchen Unstetigkeit auch noch weitere Bedingungen von der Ordnung $\nu + 1$ usf., wie man sie in dem grundlegenden Werke von Hadamard finden kann.[1]) Aus diesen kann man, wiederum ohne jede Integration der Feldgleichungen, das Gewünschte erhalten.

Es sei beispielsweise $\nu = 1$ und $f = f(x, y, z, t) = 0$ die Gleichung der Röntgenwelle im Augenblick t. Alsdann ergeben die Bedingungen von der Ordnung $\nu = 2$, zusammen mit $\partial^2 E / \partial t^2 = c^2 \nabla^2 E$, wie ich in einer demnächst erscheinenden Abhandlung[2]) detailliert ausführte:

$$\frac{de}{dt} = e \cdot \left\{c^2 \nabla^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right\} : 2 \frac{\partial f}{\partial t} \tag{7}$$

und eine ganz analoge Gleichung für m. Dazu kommt wegen der Bedeutung von $c = \mathfrak{v}$ als Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial n} = 0. \tag{8}$$

Der Derivator d/dt bezieht sich auf ein „individuelles“ Element $d\sigma$ der Röntgenwelle, d. h. er drückt die zeitliche Änderung aus, wenn man dem $d\sigma$ in seiner Fortrückung längs seiner eigenen Normalen folgt.

Unter Benutzung von (8) läßt sich nun (wie ich l. c. ausführlich zeige) die differential-geometrische Bedeutung des Koeffizienten von e in (7) leicht ermitteln; bezeichnet man nämlich die Hauptkrümmungsradien der Welle mit r_1, r_2, so transformiert sich dieser Koeffizient in

$$c\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \text{oder in} \quad \frac{d\,(d\sigma)}{dt} : d\sigma.$$

1) J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes etc. p. 121 bis 128.

2) Im Januarhefte 1910 der Sitzungsber. der Societas Scientiarum Varsoviensis, unter dem Titel „Invarianten einer Röntgenwelle“.

Folglich erhält man anstatt (7):

$$\frac{de}{dt} + \frac{1}{2} e \cdot \frac{d}{dt} (\lg d\sigma) = 0$$

oder

$$\frac{d}{dt} (e \sqrt{d\sigma}) = 0$$

und genau dasselbe für den magnetischen Sprungvektor.

Es sind also die Ausdrücke

$$e \sqrt{d\sigma}\,, \quad m \sqrt{d\sigma} \tag{9}$$

Invarianten eines jeden Flächenelementes $d\sigma$ der Röntgenwelle, d. h. es bleibt bei der Fortpflanzung der Welle der Vektor e, und ebenso m, sich selbst immer parallel und ihre absoluten Beträge $\bar{e}$, $\bar{m}$ verändern sich umgekehrt proportional zu $\sqrt{d\sigma}$. (Ist z. B. die Röntgenwelle eine *Kugel*, so sind $\bar{e}$, $\bar{m}$ *der ersten Potenz* ihres augenblicklichen Radius umgekehrt proportional.)

Da nun die Kinematik einer solchen Unstetigkeitswelle bereits durch die Bedingungen erster Ordnung vollständig bestimmt war, so liefern diese aus den Bedingungen zweiter Ordnung fließenden Invarianten alles, was die zeitliche Geschichte der Welle betrifft.

Die soeben besprochene Welle war von der ersten Ordnung, so daß E, M selbst stetig waren und die physikalische Bedeutung von e, m durch $Vne = [\mathrm{curl}\, E]$, $ne = 0$, und analog für m, bestimmt war.

Handelt es sich nun um eine Röntgenwelle *nullter* Ordnung, wobei also E, M selbst Sprünge erleiden, so kommt man ebenso leicht zum Ziel, indem man die Potentiale einführt, von denen man vorauszusetzen hat, daß sie selbst stetig sind, in ihren ersten Derivaten aber bereits Sprünge erleiden. Durch Heranziehung der Bedingungen dieser und der zweiten Ordnung erhält man dann wiederum die Ausdrücke (9) als Invarianten eines jeden $d\sigma$, wobei aber diesmal

$$e = [E], \quad m = [M]$$

ist, übrigens aber wiederum $e = Vmn$, $m = Vne$, also die Welle rein transversal.

Will man in diesem Falle von der Invarianz der Ausdrücke $[E]\sqrt{d\sigma}$, $[M]\sqrt{d\sigma}$ ein einfaches physikalisches Bild erhalten, so hat man sich bloß auf der einen, sagen wir negativen Seite der Röntgenwelle $E = M = 0$ zu denken. Alsdann ist $[E] = E$, $[M] = M$, wo E, M die Feldvektoren dicht an der positiven Seite der Welle bedeuten, und es bleibt also ein jeder dieser Vektoren sich selbst parallel und der Wert von

$$E^2 d\sigma \quad \text{und} \quad M^2 d\sigma$$

mit der Zeit unveränderlich. Denkt man sich noch in der infinitesimalen Entfernung h von der ersten und parallel zu derselben eine zweite Unstetigkeitsfläche hinzu von derselben Beschaffenheit, nur mit umgekehrten e, m, so erhält man eine elektromagnetische *Schicht* von der Dicke h, außerhalb deren das Feld verschwindet. Da nun beide Flächen sich mit derselben Geschwindigkeit normal fortpflanzen, bleibt h und folglich auch $E^2 h\, d\sigma$ und $M^2 h\, d\sigma$, d. h. *die Energie eines jeden Stückes $d\sigma$ der Schicht mit der Zeit unveränderlich*, — ein Resultat, welches von vornherein zu erwarten war.

Warschau, im Dezember 1909.

(Eingegangen 12. Dezember 1909.)