

24.

Einige geometrische Sätze.

(Von dem Königl. Pr. Lieutenant Herrn Gerwien zu Berlin.)

I. Umkehrung des Ptolomäischen Lehrsatzes.

1. **Lehrsatz.** Nimmt man in einer Kreislinie um O (Taf. IV. Fig. 1.) drei Punkte A, B, C an, und construirt die drei Kreisörter um H, I und K , welche sich mittelst des Verhältnisses der Entfernungen je zwei der Punkte A, B und C von einem vierten in der Kreislinie um O angenommenen Punkt D bestimmen, so berühren sich alle drei Kreisörter in diesem vierten Punkt D , und ihre Centrale HIK bildet eine gleichfalls zu diesem Punkt D gehörende Tangente für den Kreis um O .

Construction. Halbire die von D mit A, B und C gebildeten Winkel ADB, BDC und ADC , verlängere die Halbierungslinien bis zu den Seiten des $\triangle ABC$, und zeichne Winkel $HDE = DEH, IDF = DFI, KDG = DGK$, so bilden die um H, I und K mit HD, ID und KD beschriebenen Kreislinien die in dem Lehrsatz näher bezeichneten Örter.

Beweis. Zunächst ist darzuthun, dafs jede von den drei gezeichneten Kreislinien die in dem Lehrsatz vorausgesetzten Eigenschaften hat, dafs also bei der Kreislinie um I z. B. für jeden beliebig in derselben angenommenen Punkt $X, XB : XC = DB : DC$ ist. Winkel IFD oder $FBD + BDF$ ist $= FDC + CDI$, und Winkel $BDF = FDC$ construirt, folglich ergibt sich durch Subtraction $IBD = CDI$, weshalb $\triangle BID$ ähnlich $\triangle ICD$, also $BI : ID = ID : IC$, oder $BI : IX = IX : IC$ sein mufs. Daher ist auch $\triangle BIX$ ähnlich $\triangle CIX$ (Winkel $CIX = BIX$), und deshalb Winkel $IXC = IBX$. Nun hat man aber zugleich IPX , oder $IBX + FXB = IXC + CXF$; demnach ergibt sich durch Subtraction $BXF = FXC$, also $XB : XC = FB : FC$, und da Winkel $BDF = FDC$ gezeichnet ist, auch $DB : DC = FB : FC$, woraus endlich $XB : XC = DB : DC$ hervorgeht. Derselbe Beweis paßt für die Kreise um H und K , da beide in gleicher Art wie der Kreis um I construirt sind; folglich haben die drei um I ,

H und K beschriebenen Kreise wirklich die in dem Lehrsatz vorausgesetzten Eigenschaften. Aus diesen ergibt sich nun die eigentliche Behauptung folgendergestalt.

Aus der Construction des Orts um I folgt, wie vorher gezeigt wurde, die Gleichheit der Winkel IDC und DBC ; DC ist aber eine Sehne des Kreises um O , also bildet DI für den Punct D eine zu demselben Kreise gehörende Tangente. Dasselbe ergibt sich auch für die Örter um H und K aus der Gleichheit von HDA mit ABD , und von KDC mit DAC ; folglich bilden die drei Linien HD , ID und KD eine einzige, den Kreis um O in D tangirende Linie, und es müssen sich auch, wie es in dem Lehrsatz behauptet wurde, alle drei Kreise um I , H und K in demselben Puncte D berühren, da in diesem ihre Begegnung statt findet, und die alle drei Mittelpuncte verbindende Linie HIK zugleich denselben Punct D durchläuft.

Anmerkung. Ist zur Bestimmung des im Vorhergehenden wiederholt construirten Orts, z. B. um I , kein Punct desselben gegeben, sondern kennt man nur das Verhältniß $DB:DC$, und die Lage der zu den Linien desselben gehörenden Endpuncte B und C , so kann man sich einen solchen Punct D leicht verschaffen, indem man über BC , mittelst der beiden gegebenen Verhältnißlinien, ein \triangle beschreibt, u. s. w.

2. Lehrsatz. Wenn in einem Viereck das Rechteck aus den Diagonalen eben so groß ist, als die Summe der beiden Rechtecke, von denen jedes durch ein Paar Gegenseiten gebildet wird, so läßt sich um das Viereck ein Kreis beschreiben.

Beweis. a, b, c, d sollen die Seiten, p und q die Diagonalen des gegebenen Vierecks, und zwar so bezeichnen, daß p die Enden von a und b , und q die von a und d verbindet. Zeichnet man aus den Linien a, b, p des gegebenen Vierecks ein $\triangle ABC$ (Fig. 1.), und bestimmt L so in p , daß $bd = q \times LC$ wird, so ergibt sich, da $ac + bd = p \cdot q$ oder $= q \times AL + q \times LC$ vorausgesetzt ist, durch Subtraction, auch $ac = q \times AL$. Es muß also zugleich $c:q = AL:a$, und $d:q = LC:b$ sein. Wird jetzt um das $\triangle ABC$ ein Kreis (um O) beschrieben, und (nach der Anmerkung des Lehrsatzes 1.) ein Kreisort (um I) mit der Eigenschaft bestimmt, daß sich die Entfernungen jedes Punctes desselben von C und B , z. B. $DC:DB = AL:a$, oder $c:q$ verhalten; so ergibt sich, wenn

man den Schnidungspunct D beider Kreislinien mit A , B und C verbindet, nach dem Ptolomäischen Lehrsatz $a \times CD + b \times AD = BD \times AL + BD \times LC$. Nach der Construction des Orts um I ist aber $DC : DB = AL : a$, oder $a \times DC = BD \times AL$; also erhält man durch Subtraction $b \times AD = BD \times LC$, oder $AD : BD = LC : b$. Es war aber früher $d : q = LC : b$ bestimmt; folglich ist zugleich $DC : DB = c : q$, und $DA : DB = d : q$. Construirt man daher einen zweiten Kreisort (um H) mit der Eigenschaft, daß sich die Entfernungen jedes Punctes desselben von A und B wie $d : q$ verhalten, so ergibt sich die Lage des Punctes D zugleich in dem Ort um I und in dem Ort um H . Hieraus folgt, wenn man das gegebene Viereck so auf das construirte $ABCD$ legt, daß das von den Seiten a , b , p bestimmte Dreieck mit dem congruent gezeichneten $\triangle ABC$ zusammenfällt, der vierte Punct des gegebenen Vierecks sowohl in der Kreislinie um I als in der Kreislinie um H zu liegen kommen muß, da sich die Entfernungen dieses Puncts von C und B wie $c : q$ und von A und B wie $d : q$ verhalten. Beide Kreislinien haben aber nach dem in I. bewiesenen Lehrsatz nur den Punct D gemein; folglich ist das gezeichnete Viereck $ABCD$ dem gegebenen congruent, und es muß deshalb dieses wie jenes einem Kreise eingeschrieben sein.

II. Beweis eines von Herrn Steiner verallgemeinerten Lehrsatzes des Archimedes. Siehe Band III. S. 210. d. J.

Lehrsatz. Es seien M_2 , M_1 (Fig. 2.) irgend zwei Kreise (deren Durchmesser AB , CD), EF sei ihre Linie der gleichen Potenzen (siehe Bd. I. S. 165. d. J.), und M sei die Mitte ihrer größten Entfernung AD von einander. Beschreibt man irgend einen Kreis M , d. h. GHI , und hierauf zwei andere Kreise m_2 , m_1 so, daß beide zugleich innerhalb oder außerhalb des Kreises M liegen und ihn berühren, und daß sie überdies die Gerade EF und respective die gegebenen Kreise M_2 , M_1 berühren, so sind die zwei Kreise m_2 , m_1 allemal einander gleich.

Beweis. 1. (S. Bd. I. S. 173. und 174. d. J.)

Der Punct $\left\{ \begin{matrix} A \\ D \\ G \\ I \end{matrix} \right\}$ bildet den äußeren Ähnlichkeitspunct für die Linie $\left\{ \begin{matrix} M_2 \\ M_1 \\ M \\ M \end{matrix} \right\}$ EF und den Kreis um

z. B. KL trifft A : denn m_2K und AE sind beide senkrecht FE , bilden also die gleichen Winkel Km_2M_2 und AM_2m_2 , weshalb auch $KLm_2 = M_2LA$ ist, und folglich KL durch A läuft.

2. (S. Bd. I. S. 175. d. J.)

Das Rechteck $\begin{pmatrix} AE \times AB \\ DE \times DC \\ GI \times GE \\ IG \times IE \end{pmatrix}$ bildet die gemeinschaftliche Potenz der $\begin{pmatrix} M_2 \\ M_1 \\ M \\ M \end{pmatrix}$ Linie EF und des Kreises um . . .

z. B. $AE \times AB$ ist $= AK \times AL = (\text{Tangente}) AO^2$, da $\triangle BAL$ ähnlich $\triangle AEK$ ist. ($BLA = KEA = R$.)

Da ferner EF die Linie der gleichen Potenzen für die Kreise um M_1 und M_2 ist (s. Bd. I. S. 165. d. Journ.), so muß $EM_1^2 - M_1D^2 = EM_2^2 - M_2A^2$ sein. Hieraus folgt, daß auch

$$(EM_1 + M_1D)(EM_1 - M_1D) = (EM_2 + M_2A)(EM_2 - M_2A), \text{ d. h.}$$

3. $ED \times EC = EA \times EB$ ist.

Aus 2. folgt, wenn m_2O mit r_2 , und m_1N mit r_1 bezeichnet wird, daß

$$r_2^2 = Am_2^2 - AE \times AB, \quad \text{und}$$

$$Dm_1^2 - DE \times DC = r_1^2, \quad \text{also auch}$$

$Dm_1^2 - DE \times DC + r_2^2 = Am_2^2 - AE \times BB + r_1^2$ sein muß. Nun ist nach 3.

$$\frac{DE \times EC}{Dm_1^2 - DE^2} = \frac{AE \times EB}{Am_2^2 - AE^2}, \quad \text{folglich erhält man durch Subtr.}$$

$$Dm_1^2 - DE^2 + r_2^2 = Am_2^2 - AE^2 + r_1^2, \quad \text{oder, da } r_1 \text{ und } r_2 \text{ die Projectionen von } Em_1 \text{ und } Em_2 \text{ auf } DA \text{ sind,}$$

4. $m_1E^2 - 2r_1DE + r_2^2 = m_2E^2 - 2r_2AE + r_1^2$.

Zugleich folgt aus 2., daß

$$r_2^2 = Im_2^2 - GI \times IE, \quad \text{und}$$

$$Gm_1^2 - GI \times GE = r_1^2, \quad \text{also auch}$$

$Gm_1^2 - GI \times GE + r_2^2 = Im_2^2 - GI \times IE + r_1^2$ sein muß. Addirt man hiezu

$$\frac{EI \times GE}{Gm_1^2 - GE^2} = \frac{GE \times IE}{Im_2^2 - IE^2}, \quad \text{so erhält man}$$

$$Gm_1^2 - GE^2 + r_2^2 = Im_2^2 - IE^2 + r_1^2, \quad \text{oder, da } r_1 \text{ und } r_2 \text{ die Projectionen von } Em_1 \text{ und } Em_2 \text{ auf } DA \text{ sind,}$$

5. $m_1E^2 - 2r_1EG + r_2^2 = m_2E^2 - 2r_2IE + r_1^2$. Nach 4. ist aber

$$m_1E^2 - 2r_1DE + r_2^2 = m_2E^2 - 2r_2AE + r_1^2, \quad \text{demnach ergibt sich durch Subtr.}$$

$$2r_1DE - 2r_1EG = 2r_2AE - 2r_2IE, \quad \text{oder}$$

Rechteck $r_1(DE - EG) = r_2(AE - IE)$.

$DE - EG$ ist aber $= AE - IE$, denn $ED + IE$ oder $MD + MI$ muß $= AE + EG$ oder $AM + MG$ sein, da M nach der Voraussetzung AD

halbirt; folglich sind auch die Grundlinien r_1 und r_2 der zuletzt genannten Rechtecke einander gleich, was zu beweisen war.

III. Beweise der im III. Bande S. 209. und 210. d. J. Nr. 17. und 18. von Herrn Steiner aufgestellten Lehrsätze.

Lehrsatz 17. Sind A, B, C diejenigen drei Kreise, von denen jeder eine Seite eines gegebenen Dreiecks, und die Verlängerung der beiden übrigen (Seiten) berührt, und man beschreibt drei andere Kreise a, b, c so, daß jeder zwei der drei ersten äußerlich und den dritten innerlich (einschließend) berührt, so schneiden die drei letzteren einander in einem bestimmten Punkte, und die Geraden, welche diesen Punkt mit den Mittelpunkten der Kreise a, b, c verbinden, sind respective zu den Seiten des Dreiecks senkrecht.

Beweis. Fällt man aus dem Punkte P der gleichen Potenzen der Kreise A, B, C (siehe Bd. I. S. 166. d. J.) Perpendikel p, p', p'' auf die Seiten l, l', l'' des gegebenen Dreiecks, verlängert dieselben so um die Stücke v, v', v'' , daß sich die Rechtecke $p(p+v), p'(p'+v'), p''(p''+v'')$ eben so groß als die zu P gehörende Potenz ergeben, und beschreibt um die Mitten von $p+v, p'+v', p''+v''$ Kreise a, b, c mit den Hälften der zuletzt genannten Linien, so bildet P zugleich den Ähnlichkeitspunkt sowohl für l und a , als für l' und b , und für l'' und c . (Siehe Band I. S. 170. d. J.) Da nun die gemeinschaftliche Potenz für l und a in Bezug auf P nach der Construction eben so groß ist, als die Potenzen von A, B und C in Bezug auf P , zwei dieser Kreise aber l auf der einen und der dritte auf der andern Seite berühren, so folgt daraus, daß a die Kreise A, B, C ungleichartig berührt. Dasselbe ergibt sich auf gleichem Wege für die Kreise b und c ; demnach zeigt sich, wenn man noch die Construction der Kreise a, b und c berücksichtigt, daß wirklich sämtliche Behauptungen des aufgestellten Lehrsatzes Statt finden.

Zum Beweise des Lehrsatzes 18. S. 210. d. J. sind die folgenden Vorbereitungen erforderlich.

I. Die Potenz einer Kugel in Bezug auf einen Punkt, und umgekehrt, soll (im Folgenden) das unveränderliche Rechteck hei-

fsen, welches jede aus diesem Punkte nach der Kugel führende Secante mit ihrem äusseren Abschnitte bildet.

2. Die Potenz einer Kugel in Bezug auf einen Punkt ist dem Quadrate jeder aus dem Punkte nach der Kugel führenden Tangente gleich.

3. Verbreitet man die Central-Ebene $MM, M,,$ dreier Kugeln, deren Radien r, r', r'' sind, so bestimmen sich in jeder Ebene 3 Kreise. Der in dem Punkte P der gleichen Potenzen dieser Kreise auf die Ebene $MM' M''$ errichtete Perpendikel PX bildet einen Ort für alle Punkte, deren Potenzen in Bezug auf die 3 Kugeln gleiche Grösse haben. Dieser Ort soll die Linie der gleichen Potenzen für die 3 Kugeln um $M, M,, M,,$ heissen.

Beweis. Nach der Construction ist

$$\begin{aligned} PM^2 - r^2 &= PM',^2 - r',^2 = PM'',^2 - r'',^2, & \text{also auch} \\ PM^2 + PX^2 - r^2 &= PM',^2 + PX^2 - r',^2 = PM'',^2 + PX^2 - r'',^2, & \text{oder} \\ MX^2 - r^2 &= M',X^2 - r',^2 = M'',X^2 - r'',^2, \end{aligned}$$

welche Differenzen mit den Quadraten der aus X nach den 3 Kugeln führenden Tangenten gleiche Grösse haben.

4. Die vier Linien der gleichen Potenzen, welche durch vier Kugeln nach 3. bestimmt werden, schneiden sich in einem Punkte. Im Folgenden soll derselbe der zu vier Kugeln gehörende Punkt der gleichen Potenzen genannt werden.

Beweis. Zieht man die zur Construction der 4 Punkte der gleichen Kreis-Potenzen in den 4 Central-Ebenen erforderlichen Linien der gleichen Potenzen, so bilden je zwei die Schenkel des Neigungswinkels von 2 der genannten Ebenen, da sie, von denselben 2 Kreisen bestimmt, auch von demselben Punkte der beiden Ebenen gemeinschaftlichen Centrale winkelrecht auslaufen. Nun liegen aber je zwei Linien der Kugelpotenzen mit einem solchen Neigungswinkel in derselben Ebene, da beide auf den Central-Ebenen senkrecht stehen etc.; folglich müssen sich wirklich alle 4 Linien der Kugel-Potenzen in demselben Punkte durchschneiden.

5. Liegt eine Kugel K und eine Ebene E im Raume fest, so lassen sich stets in K zwei Punkte A und A' von der Eigenschaft bestimmen, daß jedes Rechteck, welches eine Linie zwischen A und einem beliebig in E gewählten Punkte X mit der in diese Linie fallenden Sehne AY bildet, dieselbe Grösse hat. Ein solcher Punkt soll im Folgenden der Ähnlichkeitspunkt der Ebene und der Kugel, und das zugehö-

rige Rechteck die gemeinschaftliche Potenz der Ebene und der Kugel heißen.

Construction und Beweis. Wegen des Folgenden wollen wir setzen, daß E und K sich schneiden. Construirt man einen den Mittelpunkt M von K durchlaufenden Perpendikel auf E , so ergeben sich in K zwei Durchschnittspuncte A und A' . Dies sind die beiden Ähnlichkeitspuncte, und ihre Entfernungen von E mit dem Kugel-Durchmesser bilden die gemeinschaftliche Potenz für E und K : denn AX bildet mit dem auf E gefällten Perpendikel ein rechtwinkliges Dreieck, die Sehne AY erzeugt mit dem Kugeldurchmesser gleichfalls ein rechtwinkliges Dreieck, und beide Dreiecke haben einen Winkel gemein; folglich muß die Behauptung Statt finden.

6. Wenn die gemeinschaftliche Potenz einer Ebene E und einer Kugel K eben so groß ist, als die Potenz einer zweiten Kugel k in Bezug auf den Ähnlichkeitspunct für E und K , k aber E berührt, so muß k auch K berühren.

Beweis. Construirt man nach 5. den Ähnlichkeitspunct A für E und K , und verlängert die Verbindungslinie zwischen A und dem zu E und k gehörenden Berührungspuncte X , bis eine von beiden Kugeln in Y geschnitten wird, so muß dieser Punct nach 1. und 5. zugleich in K und E liegen, da nach der Voraussetzung die Potenz von k in Bezug auf A eben so groß ist, als die gemeinschaftliche Potenz für E und K . Hieraus folgt, wenn man Y mit dem Endpuncte A' des A durchlaufenden Diameters von K , und X mit dem Schneidungspuncte C jenes Durchmessers in E verbindet, daß $\triangle AYA'$ ähnlich $\triangle AXC$ ist, also Winkel $AYA' =$ Winkel ACX sein muß, folglich YA' den Endpunct des X treffenden Diameters der Kugel k durchläuft. Die Durchmesser beider Kugeln sind aber parallel, nach der Voraussetzung; demnach wird die Y und den Mittelpunkt von K durchlaufende Linie auch den Mittelpunkt von K treffen, woraus hervorgeht, daß sich beide Kugeln in Y berühren.

Mittelst dieser 6 Sätze ergibt sich der Beweis des Lehrsatzes 18, Bd. III. S. 210. d. J., analog mit dem bereits entwickelten Beweise des Lehrsatzes 17., folgendergestalt.

Lehrsatz 18. Sind A, B, C, D diejenigen vier Kugeln, von denen jede eine Seitenfläche einer gegebenen dreiseitigen Pyramide und die Verlängerungen der drei übrigen

berührt, und man beschreibt vier andere Kugeln a, b, c, d so, daß jede drei der vier ersten äußerlich und die vierte innerlich berührt: so schneiden die vier letzteren einander in einem bestimmten Punkte, und die Geraden, welche diesen Punkt mit den Mittelpunkten der vier Kugeln a, b, c, d verbinden, sind respective zu den Seitenflächen der Pyramide senkrecht.

Beweis. Fällt man aus dem Punkte P der gleichen Potenzen der Kugeln A, B, C, D (siehe 4.) Perpendikel p, p', p'', p''' auf die Seitenflächen E, E', E'', E''' der gegebenen Pyramide, und verlängert dieselben so um die Stücke v, v', v'', v''' , daß sich die Rechtecke $p(p+v), p'(p'+v'), p''(p''+v''), p'''(p'''+v''')$ eben so groß als die zu P gehörende Kugel-Potenz ergeben, und beschreibt um die Mitten von $p+v, p'+v', p''+v'', p'''+v'''$ Kugeln a, b, c, d mit den Hälften der zuletzt genannten Linien: so bildet P (siehe 5.) zugleich den Ähnlichkeitspunkt sowohl für E und a , als auch für E' und b , ferner für E'' und c , und endlich für E''' und d . Da nun die gemeinschaftliche Potenz für E und a in Bezug auf P (siehe 5.), nach der Construction, eben so groß ist, als die Potenzen von A, B, C und D in Bezug auf P , drei dieser Kugeln aber E auf der einen und die vierte auf der anderen Seite berühren; so folgt daraus (siehe 6.), daß a die Kugeln A, B, C, D ungleichartig berührt. Dasselbe ergibt sich auf gleichem Wege für die Kugeln b, c und d ; demnach zeigt sich, wenn man noch die Construction der Kugeln a, b, c und d berücksichtigt, daß wirklich sämtliche Behauptungen des aufgestellten Lehrsatzes statt finden.

Schließlich ist noch anzuführen, daß sich die vorher abgehandelten Haupt-Lehrsätze (17. und 18.) bei Dreiecken und Pyramiden wiederholt ergeben, wenn man nicht allein die Kreise am Dreieck und die Kugeln an der Pyramide, sondern auch den Kreis im Dreieck und die Kugel in der Pyramide mit unter die Voraussetzungen aufnimmt.