

SUL PRINCIPIO DI DIRICHLET.

Nota di **Guido Fubini** (Genova).

(Da una lettera al Prof. **BEPPLO LEVI**).

Adunanza dell'11 novembre 1906.

.....
Ella giunge così a dimostrare nella prima parte della Sua Memoria *) (n° 36-37) il seguente :

TEOREMA I. — Sia Γ un campo il cui contorno c sia convesso rispetto ai punti di un campo R interno a Γ . Sia data su c una qualsiasi catena, di valori, che possiede derivate prime rispetto all'arco di c . Si può allora affermare l'esistenza di una serie di funzioni v_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) continue e derivabili in Γ , che su c assumono i valori assegnati e sono di più tali che:

1° Per $n = \infty$ le funzioni v_n tendono uniformemente in Γ e su c a una funzione limite v , che sarà quindi continua in Γ e assumerà su c i valori assegnati.

2° Se x, y indicano coordinate cartesiane ortogonali, allora esiste il

$$\lim_{n=\infty} \int \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

E precisamente il valore d di questo limite è uguale al limite inferiore dei valori, che può assumere l'integrale $\int \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$, di DIRICHLET, quando u è una funzione finita e continua in Γ con derivate prime finite e continue, la quale su c assume i valori prefissati.

Dimostrata la proposizione precedente, Ella, per risolvere il problema di DIRICHLET, ossia per dimostrare l'esistenza di una funzione armonica in Γ , che su c assume i valori assegnati, deve verificare che v ammette derivate prime e seconde, fa assumere all'integrale di DIRICHLET il valore minimo, ed è perciò armonica in Γ .

Per conseguire questo risultato, Ella stabilisce in sostanza il seguente :

TEOREMA II. — Se la v è la funzione limite di una successione di funzioni v_n , la quale gode delle due proprietà ricordate nell'enunciato del Teorema I, e se inoltre le derivate prime delle v_n sono continue in ogni punto del campo, fatta eccezione per quelli di

*) **BEPPLO LEVI**, Sul principio di DIRICHLET [questi Rendiconti, t. XXII (1906), pp. 293-360], § 8.

un aggregato, la cui misura tende a zero per $n = \infty$, allora v è funzione, che ammette derivate prime e seconde, fa assumere all'integrale di DIRICHLET il valore minimo, ed è quindi armonica.

Però questa seconda parte della questione si può studiare più brevemente da un altro punto di vista, simile a quello adottato dal sig. HILBERT nella sua Memoria dei Math. Ann. (tomo 59). Se cioè noi riuscissimo a dimostrare *direttamente* che la v è armonica, senza altrimenti preoccuparci del valore dell'integrale di DIRICHLET, ne risulterebbe senz'altro che questa v fa assumere a tale integrale il valore minimo pei valori, che la v assume al contorno.

Ora per il Suo Teorema I questa v assume al contorno gli stessi valori che le v_n . Quindi risulterà in tal modo dimostrato che essa risolve pure il problema di minimo proposto.

Io riesco a ciò col seguente artificio, analogo e anzi ancora più semplice dell'artificio usato da HILBERT, e che conduce, com'Ella vedrà, a una dimostrazione affatto semplice ed elementare del seguente:

TEOREMA. — Se v è la funzione limite di una successione di funzioni $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$, la quale gode delle due proprietà (prima e seconda), ricordate nell'enunciato del Teorema I, allora v è armonica in Γ .

Occorre ricordare che la seconda condizione del Teorema I, si traduce, come Ella ha già notato (n° 30), e come del resto aveva osservato anche HILBERT, nella seguente:

Esiste ed è uguale a zero il

$$\lim_{n=\infty} \int \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy,$$

se L è una qualsiasi funzione finita e continua in Γ , con derivate prime finite e continue, la quale è nulla su c .

Sia S un qualsiasi rettangolo interno a Γ . Sia L una qualsiasi funzione nulla al contorno di S , e in tutti i punti di Γ , che sono esterni a S , la quale possenga in S derivate prime finite e continue, e abbia una derivata normale nulla sul contorno di S . Per semplicità di notazione sieno $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b) le coordinate (x, y) dei quattro vertici di S , e sia $a > 0$, $b > 0$. Ricordando che fuori di S è $L = 0$, e integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Gamma} \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial x} dx dy &= \int \int_S \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial x} dx dy = - \int_0^b dy \int_0^a v_n \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx \\ &= \int_0^a dx \int_0^b \left[\frac{\partial^3 L}{\partial x^2 \partial y} \int_0^y v_n dy \right] dy = - \int_0^a dx \int_0^b \left[\frac{\partial^4 L}{\partial x^2 \partial y^2} \int_0^y dy \int_0^y v_n dy \right] dy. \end{aligned}$$

Scambiando x, y , e sommando si trova:

$$\int \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial v_n}{\partial y} \right) dx dy = - \int_S \frac{\partial^4 L}{\partial x^2 \partial y^2} \left[\int_0^x dx \int_0^x v_n dx + \int_0^y dy \int_0^y v_n dy \right] dx dy.$$

E, poichè per $n = \infty$ il limite del primo membro è zero, e le v_n tendono uni-

formemente alla funzione limite v , si ha, posto

$$w = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^y dy \int_0^y v dy, \quad \Delta = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

che $\int \int_s \Delta \frac{\partial^4 L}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = 0$. Poniamo ora $L = \xi \eta$, dove $\xi(\eta)$ è una funzione della sola $x(y)$. La L soddisferà alle condizioni volute, se $\xi(\eta)$ esiste nell'intervallo $0 \leq x \leq a$ ($0 \leq y \leq b$), possiede in questo intervallo derivata prima finita e continua, e si annulla insieme a questa derivata per $x = 0$, $x = a$ ($y = 0$, $y = b$). Posto

$M(x) = \int_0^b \Delta \eta'' dy$ avremo dall'uguaglianza testè dimostrata che

$$\int_0^a M(x) \xi'' dx = 0.$$

Siano ora $1, \sigma, \alpha', \alpha''$ quattro costanti tali che

$$0 < s < s + \sigma < a, \quad 0 < s + \theta_1 \sigma + \theta_2 \alpha' + \theta_3 \alpha'' < a$$

se $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ hanno uno qualsiasi dei due valori 0, 1.

Poniamo

$$\varphi(x) = 0 \text{ per } -\infty < x \leq s \text{ e per } +\infty > x \geq s + \sigma,$$

$$\varphi(x) = (x - s)(s + \sigma - x) \text{ per } s \leq x \leq s + \sigma.$$

La funzione $\varphi(x)$ così definita è una funzione continua in tutto l'intervallo $-\infty < x < +\infty$.

E la funzione

$$\xi(x) = \int_0^x dx \int_0^x [\varphi(x - \alpha' - \alpha'') - \varphi(x - \alpha') - \varphi(x - \alpha'') + \varphi(x)] dx$$

soddisfa alle condizioni richieste più sopra per la ξ .

Quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^a M(x) \xi'' dx = \int_0^a M(x) [\varphi(x - \alpha' - \alpha'') - \varphi(x - \alpha') - \varphi(x - \alpha'') + \varphi(x)] dx \\ &= \int_0^a [M(x + \alpha' + \alpha'') - M(x + \alpha') - M(x + \alpha'') + M(x)] \varphi(x) dx \\ &= \int_s^{s+\sigma} [M(x + \alpha' + \alpha'') - M(x + \alpha') - M(x + \alpha'') + M(x)] \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Per il Teorema della media esisterà un numero θ tale che $0 < \theta < 1$ e che $M(s + \theta \sigma + \alpha' + \alpha'') - M(s + \theta \sigma + \alpha') - M(s + \alpha'' + \theta \sigma) + M(\theta \sigma + s) = 0$.

Facendo tendere σ a zero e ponendo $s = x$ si trova:

$$M(x + \alpha' + \alpha'') - M(x + \alpha') - M(x + \alpha'') + M(x) = 0,$$

dove α', α'' sono costanti qualunque (purchè non troppo grandi).

Da questa equazione si deduce, com'è noto, che $M(x)$ è una funzione lineare della x .

Ma ora la precedente equazione si può anche scrivere:

$$\int_0^b [\Lambda(x + \alpha' + \alpha'', y) - \Lambda(x + \alpha', y) - \Lambda(x + \alpha'', y) + \Lambda(x, y)] \eta'' dy = 0.$$

Con metodi affatto simili ai precedenti si deduce che

$$\Lambda(x + \alpha' + \alpha'', y) - \Lambda(x + \alpha', y) - \Lambda(x + \alpha'', y) + \Lambda(x, y)$$

è una funzione lineare della y , ossia è una funzione del tipo $A(x, \alpha', \alpha'') + yB(x, \alpha', \alpha'')$, dove A e B sono funzioni soltanto di x, α', α'' .

Se noi indichiamo con y_1, y_2 due valori *costanti*, distinti, compresi tra 0, b , e, posto

$$(\alpha) \quad N(x, y) = \Lambda(x, y) + \frac{y_1 \Lambda(x, y_2) - y_2 \Lambda(x, y_1)}{y_2 - y_1} + y \frac{\Lambda(x, y_1) - \Lambda(x, y_2)}{y_2 - y_1},$$

ricordiamo il risultato testè conseguito per la funzione Λ , otteniamo:

$$N(x + \alpha' + \alpha'') - N(x + \alpha') - N(x + \alpha'') + N(x) = 0,$$

dalla quale, al solito, si deduce che $N(x, y)$ è una funzione lineare della x , che indicheremo con $Y_1 + xY_2$ (dove Y_1 e Y_2 sono funzioni della sola y); quindi per (α)

$$\Lambda(x, y) = N + X_1 + yX_2 = Y_1 + xY_2 + X_1 + yX_2,$$

dove X_1, X_2 sono funzioni della sola x .

Posto $\zeta = w - \int_0^x dx \int_0^x [X_1 + yX_2] dx - \int_0^y dy \int_0^y [Y_1 + xY_2] dy$, si trova che in tutto S si ha

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0.$$

Quindi ζ , e perciò anche ogni sua derivata parziale, è armonica in S . In particolare la $v = \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2}$ è funzione armonica in S . Ma S è un *qualsiasi* rettangolo interno a Γ . Dunque v è armonica in tutto Γ .

Tanto basta, perchè sia dimostrato completamente il *teorema di esistenza* per il problema di DIRICHLET.

Cavoretto (Torino), li 30 settembre 1906.

GUIDO FUBINI.