

SULLA CURVA LUOGO DEI PUNTI DI CONTATTO DELLE SUPERFICIE D'UN FASCIO D'ORDINE n CON LE SUPERFICIE D'UN FASCIO D'ORDINE n' .

Nota di **Corradino Mineo**, in Palermo.

Adunanza del 10 maggio 1903.

Della curva luogo dei punti di contatto tra superficie di due fasci si occupa il prof. SEGRE, come mezzo per determinare un carattere delle varietà algebriche a tre dimensioni *). Nel suo lavoro egli trova una notevole relazione tra il genere di essa curva e il numero delle coppie di superficie dei due fasci che hanno contatto stazionario.

In questa Nota mi propongo di costruire il luogo anzidetto, ricavandolo come intersezione parziale di due superficie; il che, oltre che l'ordine, mi permette di determinarne il genere, onde, poi, con procedimento identico a quello adoperato dal prof. SEGRE per due fasci di curve piane, passo a calcolare il numero delle coppie di superficie dei due fasci che hanno tra loro contatto stazionario, o doppio contatto.

Per la costruzione della curva mi servo dei luoghi φ_p relativi a fasci di superficie, la cui teoria, stabilita dal prof. GUCCIA **), è feconda di importanti applicazioni.

1. Siano dati due fasci di superficie (F) e (F'), rispettivamente di ordini n e n' , affatto generali, le cui curve basi B e B' non hanno alcun

*) SEGRE, *Intorno a un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXI, 1896).

**) GUCCIA, *Teoria delle superficie φ_p e delle curve gobbe A_E relative a un fascio di superficie, e sue applicazioni* (Carte litografate del 1895).

punto comune. Sia R una retta qualunque dello spazio, P un punto generico di essa; denotiamo con φ_P e ψ_P le superficie luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da P rispettivamente alle superficie dei fasci (F) e (F') : come è noto, φ_P e ψ_P sono di ordine $2n - 1$ e $2n' - 1$, e hanno un punto semplice in P *). Al variare del punto P sulla retta R , le due superficie φ_P e ψ_P , come è facile dimostrare, generano due fasci (φ_P) e (ψ_P) , proiettivi. La curva base del fascio (φ_P) è costituita dalla curva B e dalla curva A_R , luogo dei punti di contatto dei piani tangenti condotti per R a superficie del fascio (F) **). Similmente la curva base del fascio (ψ_P) è formata da B' e dalla curva A'_R , relativa al fascio (F') . I due fasci proiettivi (φ_P) e (ψ_P) generano una superficie, luogo delle curve comuni a due superficie corrispondenti φ_P e ψ_P , e che indicheremo con Σ_R .

La superficie Σ_R è di ordine $2(n + n' - 1)$, passa semplicemente per la retta R e per le curve B , B' , A_R e A'_R , e si può anche definire come il luogo d'un punto M tale, che la tangente ivi comune alle due superficie dei due fasci dati (F) e (F') , passanti per M , si appoggia alla retta R .

Sia R' un'altra retta dello spazio, che, dapprima, per maggiore generalità, supporremo non incontri R , e costruiamo analogamente la superficie $\Sigma_{R'}$, relativa ai due fasci (F) e (F') e corrispondente alla retta R' . Le due superficie Σ_R e $\Sigma_{R'}$ hanno in comune le due curve B , B' , basi dei due fasci dati (F) e (F') : dimostreremo che la residua loro intersezione si scinde ancora in due curve.

Infatti, tutte le rette che hanno la proprietà di toccare in uno stesso punto due superficie appartenenti rispettivamente ai due fasci (F) e (F') (o, in altri termini, che sono tangenti in quel punto alla loro comune intersezione) formano un complesso: se O è un punto qualunque dello spazio, il cono del complesso di vertice O si ottiene proiettando da O la curva comune alle due superficie φ_O e ψ_O , relative ai due fasci (F) e (F') e corrispondenti al punto O ; e poichè tale curva è dell'ordine

$$(2n - 1)(2n' - 1)$$

e passa per O , il complesso è del grado

$$(2n - 1)(2n' - 1) - 1.$$

*) Cfr. GUCCIA, loco citato.

**) Cfr. GUCCIA, loco citato.

Le rette del complesso che si appoggiano alla retta R danno origine, naturalmente, a una congruenza, d'ordine

$$(2n - 1)(2n' - 1) - 1;$$

quelle che si appoggiano contemporaneamente alle rette R e R' formano una rigata, per la quale ciascuna delle rette R e R' è una direttrice di molteplicità

$$(2n - 1)(2n' - 1) - 1,$$

e che quindi è dell'ordine

$$2(2n - 1)(2n' - 1) - 2.$$

Se G è una generatrice di essa rigata, vi sarà, su G , uno e un sol punto M , tale che le superficie dei due fasci (F) e (F') , che vi passano, toccano in M la retta G : ora il luogo di questi punti M sarà una curva gobba K , la quale, evidentemente, appartiene tanto alla superficie Σ_R quanto alla superficie $\Sigma_{R'}$.

Determiniamo l'ordine di K . Essa incontra in un solo punto ogni generatrice della rigata anzidetta; inoltre si vede facilmente che incontra una qualunque delle due direttrici, p. es. R , in $2(n + n' - 1)$ punti, che sono i punti in cui R incontra la superficie $\Sigma_{R'}$.

Poichè un piano qualunque per R contiene $(2n - 1)(2n' - 1) - 1$ generatrici della rigata, segue che esso incontra la curva K in

$$(2n - 1)(2n' - 1) - 1 + 2(n + n' - 1) = 2(2nn' - 1)$$

punti. Dunque K è di ordine $2(2nn' - 1)$.

La residua intersezione, quindi, delle due superficie Σ_R e $\Sigma_{R'}$, oltre le curve B , B' e K , è una curva Θ di ordine

$$4(n + n' - 1)^2 - n^2 - n'^2 - 2(2nn' - 1) = 3(n^2 + n'^2 + 2) + 4(nn' - 2n - 2n'),$$

in ogni punto della quale le superficie dei due fasci, che vi passano, hanno manifestamente lo stesso piano tangente.

2. Vediamo in quanti punti la curva Θ si appoggia rispettivamente alle due curve B e B' .

Poichè le due superficie Σ_R e $\Sigma_{R'}$ hanno in comune la curva B , di ordine n^2 e di rango $2n^2(n - 1)$, la loro residuale intersezione, per un noto teorema, incontra B in

$$n^2[4(n + n' - 1) - 2] - 2n^2(n - 1) = 2n^2(n + 2n' - 2)$$

punti *). Tanti sono, dunque, i punti in cui l'insieme delle curve B' , K e Θ incontrano B : di esse, B' non incontra B , K l'incontra in un numero di punti, che è facile determinare. La curva K sta sulla rigata, costituita dalle rette del complesso, pocanzi accennato, che si appoggiano contemporaneamente alle rette R e R' : ora, se b è un punto comune a K e B , per b passa una generatrice della detta rigata, che è toccata in b dalla superficie del fascio (F') che passa per b , e da una superficie del fascio (F) . Consideriamo la particolare congruenza costituita dalle rette che si appoggiano alla curva B e sono, in ciascun punto di B stessa, tangenti alla superficie del fascio (F') che vi passa, e a una superficie del fascio (F) ; talchè, essendo b un punto di B , tutte le rette di tale congruenza passanti per b , sono quelle situate nel piano tangente in b alla superficie del fascio (F') passante per b . Le rette della detta congruenza incontranti R formano una rigata: ora è evidente che il numero delle generatrici di quest'ultima incontranti R' , cioè l'ordine della rigata stessa, eguaglia il numero dei punti comuni a K e B . La curva B è evidentemente una direttrice semplice per la rigata. Vediamo quale è la molteplicità di R , cioè quante generatrici della rigata escono da un punto P di R : basta calcolare il numero dei punti comuni alla curva B e alla curva intersezione dei luoghi φ_P e ψ_P , il qual numero è evidentemente eguale a $(2n' - 1)n^2$.

Giacchè la curva B è direttrice semplice per la rigata, mentre R è direttrice multipla secondo $(2n' - 1)n^2$, segue che l'ordine della rigata, e quindi il numero dei punti comuni a K e B , è

$$(2n' - 1)n^2 + n^2 = 2n^2n'.$$

Segue pertanto che la curva Θ incontra B in

$$2n^2(n + 2n' - 2) - 2n^2n' = 2n^2(n + n' - 2)$$

punti.

Similmente si trova che la curva Θ incontra B' in

$$2n'^2(n + n' - 2)$$

punti.

3. Osserviamo che se le due rette R e R' s'incontrano in un punto Q , la curva K ($n^\circ 1$), parziale intersezione delle due superficie Σ_R e $\Sigma_{R'}$, si viene a scindere evidentemente nella curva Δ , d'ordine $(2n-1)(2n'-1)$,

*) Vedi, p. es., SALMON, *Geometry of three dimensions*, pag. 280.

comune ai due luoghi φ_Q e ψ_Q , e nella curva Ω d'ordine $2n + 2n' - 3$, che, sul piano delle due rette R e R' , è il luogo dei punti di contatto tra le curve dei due fasci segati dai fasci di superficie (F) e (F') .

L'insieme di queste due curve costituisce appunto una curva composta d'ordine

$$(2n - 1)(2n' - 1) + (2n + 2n' - 3) = 2(2nn' - 1),$$

la quale incontra la curva B , p. es., negli n^2 punti comuni a Ω e B , e negli $n^2(2n' - 1)$ punti comuni a Δ e B , cioè, in tutto, in

$$n^2 + n^2(2n' - 1) = 2n^2n'$$

punti ($n^\circ 2$).

4. È ovvio che i $2n^2(n + n' - 2)$ punti in cui la curva Θ incontra la curva B sono i punti in cui superficie del fascio (F') toccano la curva B stessa; così pure i $2n'^2(n + n' - 2)$ punti comuni a Θ e B' , sono i punti di contatto di superficie del fascio (F) con la curva B' . Segue quindi che *in un fascio generale d'ordine n' vi sono $2n^2(n + n' - 2)$ superficie che toccano la curva gobba intersezione di due superficie generali d'ordine n* . Risultato che è caso particolare [per $i = n^2n'$, $p = n^2(n - 2) + 1$] del seguente teorema generale, che più innanzi avremo occasione di applicare, cioè: *una serie lineare g_i^1 situata sopra un ente algebrico ∞^1 di genere p , ha $2i + 2(p - 1)$ punti doppi*.

Notiamo ancora che se b è un punto comune alla curva Θ e alla curva B , la superficie del fascio (F') passante per b non solo tocca in b la curva B , ma tocca anche Θ . Infatti, come è noto dalla teoria dei fasci proiettivi, la superficie Σ_R , per es., tocca in un punto b della curva base del fascio (φ_P) quella superficie di quest'ultimo fascio che corrisponde, nella proiettività, alla superficie del fascio (ψ_P) passante per b . Ora la superficie del fascio (ψ_P) passante per b è la superficie ψ_{P^*} , corrispondente al punto P^* in cui il piano tangente τ nel punto b , alla superficie di (F') che vi passa, incontra la retta R ; ma poichè b è comune a Θ e B , ci deve essere nel fascio (F) una superficie che tocca τ , talchè τ deve contenere la tangente T alla curva B nel punto b ; d'altra parte il luogo φ_{P^*} , corrispondente a ψ_{P^*} , ha per piano tangente in b il piano formato dalle rette P^*b e T^*), cioè τ : ma allora τ , essendo tangente in b alla superficie Σ_R , contiene la tangente in b alla curva Θ , il che

*) Cfr. GUCCIA, loco citato, pag. 10.

val quanto dire che la superficie di (F') , passante per b , tocca ivi la curva Θ .

Similmente si vede che in ciascuno dei $2n'^2(n + n' - 2)$ punti comuni a Θ e B' , la curva Θ è toccata dalla superficie del fascio (F) , che vi passa.

5. La curva Θ passa evidentemente per i $4(n - 1)^3$ punti doppi del fascio (F) e per i $4(n' - 1)^3$ punti doppi del fascio (F') . Infatti, sia O punto doppio per una superficie del fascio (F) e sia T una trasversale qualunque condotta per O . Il luogo ϕ_P relativo al fascio (F) e corrispondente a un punto qualunque P della retta R , passa semplicemente per O ; talchè dei $2n + 2n' - 2$ punti comuni alle due involuzioni proiettive I_{2n-1}^1 e $I_{2n'-1}^1$, segate su T dai fasci proiettivi (ϕ_P) e (ψ_P) , uno cade in O , che è perciò punto semplice per la superficie Σ_R . Così pure si prova che O è punto semplice per la superficie $\Sigma_{R'}$; dunque la curva Θ passa semplicemente per O .

6. Dal sin qui esposto, si ricava il seguente teorema:

Il luogo dei punti di contatto delle superficie d'un fascio (F) generale d'ordine n con le superficie d'un fascio (F') generale d'ordine n' , è una curva gobba Θ d'ordine

$$3(n^2 + n'^2 + 2) + 4(nn' - 2n - 2n'),$$

la quale incontra la curva base B del fascio (F) in

$$2n^2(n + n' - 2)$$

punti, in cui tanto la curva B quanto la curva Θ sono toccate dalle superficie del fascio (F') che vi passano, e similmente incontra la curva base B' del fascio (F') in

$$2n'^2(n + n' - 2)$$

punti, nei quali tanto B quanto Θ sono toccate dalle superficie del fascio (F) che vi passano. Inoltre la curva Θ passa semplicemente per i $4(n - 1)^3$ punti doppi del fascio (F) e per i $4(n' - 1)^3$ punti doppi del fascio (F') .

7. Se R , R' e R'' sono tre rette qualunque (a due a due sghembe), ci possiamo domandare quali sono i punti comuni alle tre superficie Σ_R , $\Sigma_{R'}$, e $\Sigma_{R''}$, relative ai due fasci dati e corrispondenti alle rette medesime.

L'intersezione completa delle due superficie Σ_R e $\Sigma_{R'}$, p. es., è costi-

tuita (n° 1) dalle curve B, B', K e Θ ; poichè la superficie $\Sigma_{R''}$ contiene le tre curve B, B' e Θ , i punti cercati sono quelli comuni a K e $\Sigma_{R''}$, che non cadano, s'intende, sulle tre curve B, B' e Θ . Di qui segue facilmente che se k è uno di questi punti, la generatrice, passante per k , della rigata, costituita dalle rette che toccano in uno stesso punto due superficie di (F) e di (F') e si appoggiano alle due rette R e R' (n° 1), incontra anche la retta R'' , e reciprocamente: talchè il numero dei punti k eguaglia l'ordine dell'anzidetta rigata, cioè (n° 1)

$$2(2n-1)(2n'-1)-2=4(2nn'-n-n').$$

In altri termini, i punti comuni alle tre superficie $\Sigma_R, \Sigma_{R'}$ e $\Sigma_{R''}$ sono situati ciascuno su ciascuna delle $4(2nn'-n-n')$ rette del complesso, costituito dalle tangenti alle ∞^3 curve comuni a due superficie di (F) e di (F') , che si appoggiano contemporaneamente alle tre rette R, R' e R'' .

8. La curva Θ incontra la superficie generica del fascio (F) in

$$\begin{aligned} n[3(n^2+n'^2+2)+4(nn'-2n-2n')]-2n^2(n+n'-2) \\ = n[(n-1)^2+3(n'-1)^2+2(n-1)(n'-1)] \end{aligned}$$

punti, fuori di B , che sono i punti di contatto di questa superficie con superficie del fascio (F') . Di qui il noto teorema:

In un fascio di superficie d'ordine n' vi sono in generale

$$n[(n-1)^2+3(n'-1)^2+2(n-1)(n'-1)]$$

superficie, che toccano una superficie fissa d'ordine n .

9. Nel caso $n' = 1$, cioè se il fascio (F') si riduce a un fascio di piani di asse E , notiamo che il complesso, di cui si è discusso nel n° 1, si riduce al complesso lineare formato da tutte le rette incontranti E ; la rigata delle rette del complesso incontranti R e R' non è che l'iperboloide determinato dalle tre rette E, R e R' ; la curva K , d'ordine $4n-2$, insieme con le rette R ed E , forma l'intersezione completa dell'anzidetto iperboloide con la superficie Σ_R , etc.

La curva Θ è allora il luogo dei punti di contatto dei piani per E tangenti alle superficie del fascio (F) , cioè la curva gobba A_E relativa al fascio (F) . Ponendo $n' = 1$, dal teorema del n° 6 si ricava questa proposizione dovuta al prof. GUCCIA:

Dato un fascio generale di superficie d'ordine n , la relativa curva

gobba A_E , corrispondente a una retta E dello spazio, è di ordine

$$n(3n - 4) + 1,$$

e incontra in $2(n - 1)$ punti la retta E e in $2n^2(n - 1)$ punti la curva d'ordine n^2 base del fascio dato.

10. Supponiamo in particolare che i due fasci di superficie dati appartengano a una stessa rete, cioè abbiano una superficie comune.

Siano essi (F, F') e (F, F'') . È facile dimostrare che allora la superficie Σ_R , relativa ai due fasci e corrispondente alla retta R , si compone della superficie F comune ai due fasci, e d'una superficie Σ'_R d'ordine $3n - 2$, essendo n l'ordine d'ognuno dei fasci. Infatti i due luoghi φ_P e ψ_P , relativi rispettivamente ai fasci (F, F') e (F, F'') e corrispondenti a un punto qualunque P della retta R , passano tutti e due per la curva di contatto del cono tangente alla superficie F di vertice P , la quale curva, al variare di P su R , genera la superficie F .

Se R' è un'altra retta che supporremo (per semplicità) incontri R nel punto Q , le due superficie Σ'_R e $\Sigma'_{R'}$, ciascuna di ordine $3n - 2$, hanno in comune: 1° la curva situata nel piano delle due rette R e R' e che è il luogo dei punti di contatto tra curve dei due fasci, tracce sul detto piano dei due fasci di superficie dati, ossia la Jacobiana delle rete di curve determinata dalla rete di superficie $[F, F', F'']$; 2° la curva residuale intersezione dei due luoghi φ_Q e ψ_Q , oltre la curva di contatto del cono tangente alla F di vertice Q , e che è quindi dell'ordine

$$(2n - 1)^2 - n(n - 1) = 3n^2 - 3n + 1;$$

3° la residuale curva Θ d'ordine

$$(3n - 2)^2 - 3(n - 1) - (3n^2 - 3n + 1) = 6(n - 1)^2,$$

luogo, cioè, dei punti di contatto tra superficie dei fasci (F, F') e (F, F'') , la quale non è altro se non la curva Jacobiana della rete $[F, F', F'']$.

11. Determiniamo il genere della curva Θ , nel caso generale.

Date due superficie luogo algebriche, d'ordini μ e ν (dotate di punti multipli ordinari e di curve multiple ordinarie), per le quali una curva C_i è rispettivamente multipla secondo i_1 e i_2 , e un punto P_i secondo l_1 e l_2 , la loro residua intersezione, come è noto, è segata in gruppi della serie canonica dalle superficie (aggiunte) d'ordine $\mu + \nu - 4$, per le quali ogni curva C_i è multipla secondo $i_1 + i_2 - 1$ e ogni punto P_i è multiplo secondo $l_1 + l_2 - 2$.

Consideriamo le due superficie Σ_R e $\Sigma_{R'}$, corrispondenti a due rette R e R' che s'incontrano in un punto Q : l'intersezione completa di esse si compone ($n+1$ e 3) delle curve B , B' , Ω , Δ e Θ .

Se denotiamo con π il genere di Θ , le intersezioni variabili d'una superficie d'ordine

$$2(n+n'-1) + 2(n+n'-1) - 4 = 4(n+n'-2),$$

la quale passi semplicemente per le curve B , B' , Ω e Δ , con la curva Θ , residua intersezione di Σ_R e $\Sigma_{R'}$, saranno, per il ricordato teorema, in numero di $2\pi - 2^*$.

Ora abbiamo già visto che Θ incontra B in $2n^2(n+n'-2)$ punti e B' in $2n'^2(n+n'-2)$ punti; inoltre Θ incontra la curva piana Ω evidentemente in $3(n^2+n'^2+2) + 4(nn'-2n-2n')$ punti: occorre ancora trovare il numero dei punti comuni a Θ e Δ .

Poichè Δ , intersezione completa delle due superficie φ_Q e ψ_Q , di ordini $2n-1$ e $2n'-1$, affatto generali, è di rango

$$(2n-1)(2n'-1)(2n+2n'-4) = 2(2n-1)(2n'-1)(n+n'-2),$$

segue, per un teorema già citato (n° 2), che l'intersezione residua di Σ_R e $\Sigma_{R'}$, oltre la curva Δ , cioè l'insieme delle curve B , B' , Ω e Θ , incontra Δ in

$$\begin{aligned} (2n-1)(2n'-1)[4(n+n'-1)-2] - 2(2n-1)(2n'-1)(n+n'-2) \\ = 2(2n-1)(2n'-1)(n+n'-1) \end{aligned}$$

punti. Tenendo conto che B incontra Δ in $(2n'-1)n^2$, B' in $(2n-1)n'^2$ punti e la curva piana Ω nei $(2n-1)(2n'-1)-1$ punti in cui il piano delle due rette R e R' è incontrato da Δ all'infuori

* Le superficie Σ_R e $\Sigma_{R'}$, in generale saranno prive di punti multipli.

Infatti, Σ_R , p. es., è generata dai due fasci proiettivi (φ_P) e (ψ_P) , le cui superficie generiche sono affatto generali, come si può dimostrare facilmente fondandosi sull'analoga proprietà dei luoghi piani Φ_P , dimostrata dal prof. GUCCIA (*Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane*, etc., Memoria II, n° 68).

I risultati dei n° 12, 13 e 14 provano inoltre che la curva Θ non ha punti doppi, cioè che le due superficie Σ_R e $\Sigma_{R'}$ non si toccano in punti, situati fuori delle curve B , B' , Ω e Δ .

del punto Q , si conclude che la curva Θ incontra Δ in

$$\begin{aligned} & 2(2n-1)(2n'-1)(n+n'-1) - (2n'-1)n^2 \\ & \quad - (2n-1)n'^2 - [(2n-1)(2n'-1) - 1] \\ & = (2n-1)(2n'-1)(2n+2n'-3) - (2n'-1)n^2 - (2n-1)n'^2 + 1 \end{aligned}$$

punti.

Si ricava pertanto che una superficie d'ordine $4(n+n'-2)$, passante semplicemente per le curve B , B' , Ω e Δ , incontra Θ in

$$\begin{aligned} & 4(n+n'-2)[3(n^2+n'^2+2) + 4(nn'-2n-2n')] \\ & \quad - 2n^2(n+n'-2) - 2n'^2(n+n'-2) \\ & \quad - [3(n^2+n'^2+2) + 4(nn'-2n-2n')] \\ & \quad - [(2n-1)(2n'-1)(2n+2n'-3) \\ & \quad - (2n'-1)n^2 - (2n-1)n'^2 + 1] = 2\pi - 2 \end{aligned}$$

punti; donde si deduce

$$\pi = (n+n'-2)[5(n^2+n'^2+nn') - 4(4n+4n'-3)] + 2nn' - 1.$$

Epperò:

La curva gobba Θ , luogo dei punti di contatto tra superficie di due fasci generali d'ordini n e n' , è del genere

$$(n+n'-2)[5(n^2+n'^2+nn') - 4(4n+4n'-3)] + 2nn' - 1.$$

12. Una importante conferma del precedente risultato si ha per $n' = 1$, cioè quando la curva Θ si riduce (n° 8) alla curva gobba A_E relativa al fascio (F) e corrispondente a una retta qualunque E dello spazio. Si ha dal n° 10, per $n' = 1$:

La curva gobba A_E , relativa al fascio (F) generale d'ordine n e corrispondente a una retta E , è di genere

$$(n-1)(5n^2 - 11n + 3) + 1.$$

Ora questo risultato si verifica facilmente, giacchè la curva gobba A_E , se P e Q sono due punti qualunque della retta E , è l'intersezione residua dei due luoghi φ_P e φ_Q , oltre la curva B , base del fascio (F) . Detto π il genere di A_E e tenuto conto che le due curve B e A_E s'incontrano in $2n^2(n-1)$ punti (n° 8), avremo dunque

$$[n(3n-4) + 1](4n-6) - 2n^2(n-1) = 2\pi - 2,$$

donde appunto

$$\pi = (n-1)(5n^2 - 11n + 3) + 1.$$

12. Nel caso del n° 9, si trova

$$\pi = 2(n-1)^2(7n-13) + 1,$$

cioè:

La Jacobiana d'una rete generale di superficie d'ordine n è di genere

$$2(n-1)^2(7n-13) + 1.$$

13. Conoscendo l'ordine e il genere di Θ , possiamo, sempre ammettendo come evidente che essa non abbia punti doppi, determinarne le altre caratteristiche. Ci limiteremo a calcolarne il rango, perchè esso ci dà un'altra importante conferma del fatto che la curva Θ è priva di punti doppi.

Essendo ν , π e ρ ordinatamente l'ordine, il genere e il rango della curva Θ , abbiamo dalle note relazioni di CAYLEY:

$$\rho = 2(\nu - 1) + 2\pi,$$

dalla quale, sostituendovi i valori noti di ν e di π , si trae:

$$\begin{aligned} \rho &= 6(n^2 + n'^2 + 2nn') - 8(2n + 2n' - 1) \\ &+ 2(n + n' - 2)[5(n^2 + n'^2 + nn') - 4(4n + 4n' - 3)]. \end{aligned}$$

Ciò posto, siamo ora in grado di calcolare il numero dei punti comuni a tre superficie Σ_R , $\Sigma_{R'}$ e $\Sigma_{R''}$, relative ai fasci dati e corrispondenti alle tre rette R , R' e R'' (a due a due sghembe), all'infuori delle curve B , B' e Θ a esse comuni.

Essendo noti gli ordini e i ranghi di B , B' e Θ , e conoscendo che Θ ha comuni con B e B' risp. $2n^2(n+n'-2)$ e $2n'^2(n+n'-2)$ punti, questo numero è *)

$$\begin{aligned} &8(n+n'-1)^3 - \{n^2[6(n+n'-1)-2] - 2n^2(n-1)\} \\ &\quad - \{n'^2[6(n+n'-1)-2] - 2n'^2(n'-1)\} \\ &- \{[3(n^2+n'^2+2) + 4(nn'-2n-2n')][6(n+n'-1)-2] \\ &\quad - \{6(n^2+n'^2+2nn') - 8(2n+2n'-1) \\ &\quad + 2(n+n'-2)[5(n^2+n'^2+nn') - 4(4n+4n'-3)]\}] \\ &- 4n^2(n+n'-2) - 4n'^2(n+n'-2) = 4(2nn' - n - n'), \end{aligned}$$

come appunto abbiamo trovato, per altra via, nel n° 7.

*) Vedi, p. es., NOETHER, *Sulle curve multiple di superficie algebriche* [Annali di Matematica, tomo V (serie II), 1871, pag. 163-177, n° 4].

14. La superficie generica del fascio (F) incontra la curva Θ in

$$N = n[(n-1)^2 + 3(n'-1)^2 + 2(n-1)(n'-1)]$$

punti variabili (n° 8), che sono i punti in cui superficie del fascio (F') toccano la stessa superficie; dunque il fascio (F) sega su Θ una serie lineare g_N^1 .

Similmente il fascio (F') sega su Θ una serie lineare $g_{N'}^1$, dove

$$N' = n'[(n'-1)^2 + 3(n-1)^2 + 2(n-1)(n'-1)].$$

Cerchiamo i punti doppi d'una di queste serie *), p. es. di g_N^1 , che, per un teorema citato (n° 4), sono in numero di $2N + 2(\pi - 1)$.

Anzitutto, tra i punti doppi della serie g_N^1 dobbiamo comprendere i

$$2n'^2(n + n' - 2)$$

punti comuni a Θ e B' , perchè (n° 4) la superficie di (F) passante per uno qualunque di questi punti tocca ivi la curva Θ . Dobbiamo inoltre comprendervi i $4(n-1)^3$ punti doppi del fascio (F), per i quali la curva Θ passa semplicemente (n° 5). Infatti, se O è punto doppio per una superficie del fascio (F), essa superficie è incontrata da Θ , fuori di O , in $N-2$ punti, dunque in O coincidono due degli N punti d'incontro d'una superficie di (F) con la curva Θ .

Infine, se M è un punto doppio di g_N^1 , senza che sia doppio per la superficie di (F) che vi passa, nè stia su B' , cioè se uno degli $N-1$ punti comuni a Θ e alla superficie di (F) passante per M diventa infinitamente vicino a M , si conclude subito che quest'ultima superficie e quella di (F') passante per M hanno ivi due punti di contatto infinitamente vicini, cioè un contatto stazionario, e reciprocamente.

Chiamando τ il numero dei punti che sono punti di contatto stazionario tra due superficie dei due fasci, abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} & 2n[(n-1)^2 + 3(n'-1)^2 + 2(n-1)(n'-1)] \\ & + 2(n + n' - 2)[5(n^2 + n'^2 + nn') - 4(4n + 4n' - 3)] \\ & + 4(nn' - 1) = 2n'^2(n + n' - 2) + 4(n-1)^3 + \tau; \end{aligned}$$

donde si deduce:

$$\begin{aligned} \tau &= 2(n + n' - 2)[5(n^2 + n'^2 + nn') - 4(4n + 4n' - 3)] \\ &+ 4nn'(n + n' - 3) - 2n^2(n-2) - 2n'^2(n'-2). \end{aligned}$$

*) Per questo procedimento, cfr. SEGRE, l. c., p. 497-99.

Pertanto :

In due fasci generali di superficie, di ordini n e n' , vi sono

$$2(n + n' - 2)[5(n^2 + n'^2 + nn') - 4(4n + 4n' - 3)] \\ + 4nn'(n + n' - 3) - 2n^2(n - 2) - 2n'^2(n' - 2)$$

coppie di superficie, che hanno un contatto stazionario.

Per $n' = 1$, cioè quando il fascio (F') è un fascio di piani, si ricava il numero dei piani tangenti stazionari a superficie del fascio (F) , passanti per una retta qualunque dello spazio, cioè la classe dell'involuppo dei piani tangenti stazionari alle superficie di (F) .

Dalla precedente formola risulta :

L'involuppo dei piani tangenti stazionari alle superficie d'un fascio generale d'ordine n è di classe

$$8n(n - 1)(n - 2) *).$$

15. Se calcoliamo il numero delle coppie di punti comuni alle due serie lineare g_N^I e $g_{N'}^I$, situate sulla curva Θ di genere π , questo numero ci rappresenterà evidentemente il numero delle coppie di superficie dei due fasci, che si toccano in due punti (a distanza finita o infinitesima).

Per una formola nota, questo numero è

$$(N - 1)(N' - 1) - \pi **).$$

Chiamando d il numero delle coppie di superficie dei due fasci che si toccano in due punti a distanza finita, avremo

$$d + \tau = (N - 1)(N' - 1) - \pi.$$

Ponendo in questa formola i valori già calcolati di τ e di π , risulta :

*) A questo risultato (per quanto io sappia, non noto) pervengo in un'altra Nota, che prossimamente pubblicherò.

**) Per il numero dei gruppi di $r + 1$ punti comuni a una g_n^r e a una g_m^r , vedi SEGRE: *Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Annali di Matematica, XXII₂, 1894), pag. 102, n° 53.

Più in generale, per il numero dei gruppi di $r + r'$ punti comuni a una g_n^r e a una $g_{n'}^{r'}$ vedi CASTELNUOVO: *Un'applicazione della Geometria enumerativa alle curve algebriche* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. III, 1889).

In due fasci generali di superficie, di ordini n e n' , vi sono

$$\begin{aligned} & \left\{ n[(n-1)^2 + 3(n'-1)^2 + 2(n-1)(n'-1)] - 1 \right\} \times \\ & \times \left\{ n'[(n'-1)^2 + 3(n-1)^2 + 2(n-1)(n'-1)] - 1 \right\} \\ & - 3(n+n'-2)[5(n^2 + n'^2 + nn') - 4(4n + 4n' - 3)] \\ & - 2nn'(2n + 2n' - 5) + 2n^2(n-2) + 2n'^2(n'-2) + 1 \end{aligned}$$

coppie di superficie, che hanno un doppio contatto.

Per $n' = 1$, segue:

La classe della superficie-inviluppo dei piani bitangenti alle superficie d'un fascio generale d'ordine n è uguale a

$$n(n-1)(n-2)(3n^2 - 3n + 11).$$

Palermo, 19 aprile 1903.

CORRADINO MINEO.