

RECTIFICATION A LA NOTE "SUR LES SERIES DE DIRICHLET",.

Par M. J. Hadamard (Paris).

Adunanza del 23 febbrajo 1908.

Je dois à l'obligeance de M. LANDAU l'indication d'une erreur qui entache la seconde partie de ma Note *Sur les séries de DIRICHLET* ¹⁾. Cette erreur a pour origine une faute que nous avons commise, M. CAHEN et moi, dans l'intégration de l'expression

$$(II) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{f(s)e^{ws}}{s} ds$$

par rapport à w . Si l'on fait cette intégration (après multiplication par $\zeta e^{-w\zeta} dw$) entre les limites 0 et W , on trouve

$$\frac{-\zeta}{2i\pi} \left[\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{f(s)ds}{s(s-\zeta)} - \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{f(s)e^{W(s-\zeta)}}{s(s-\zeta)} ds \right] = \sum_1^N \alpha_n e^{-\lambda_n} - e^{-W\zeta} \sum_1^N \alpha_n$$

(λ_N et λ_{N+1} étant les deux valeurs de λ_n qui comprennent entre elles W).

Le terme $-e^{-W\zeta} \sum_1^N \alpha_n$ est celui que j'avais oublié dans mon précédent calcul.

Il faut donc adjoindre la condition que $\left| \sum_1^N \alpha_n \cdot e^{-W\zeta} \right|$ tende vers zéro avec $\frac{1}{W}$.

Comme me l'a également fait remarquer M. LANDAU, cette condition était évidente à priori, en vertu de l'expression donnée par M. CAHEN (dans le travail cité) pour l'abscisse d de la droite de convergence.

En vertu de l'expression obtenue pour $\sum_1^N \alpha_n$, elle peut s'énoncer:

(V). a' étant un nombre déterminé quelconque supérieur à d , l'intégrale (II) est, pour w suffisamment grand, inférieure en valeur absolue à $e^{wa'}$.

M. LANDAU m'a démontré par un exemple que cette condition est certainement distincte des précédentes.

Par contre, une fois cette condition admise, les raisonnements de ma deuxième partie deviennent valables sans qu'on ait à se servir de la condition (I).

Mais on peut aussi, si l'on veut, en gardant la condition (I) se passer de la con-

¹⁾ Ces Rendiconti, tome XXV (1^{er} semestre 1908), pp. 326-330.

dition (II), pourvu qu'alors l'abscisse a de la droite le long de laquelle on prend l'intégrale (11) soit supérieure à $d + \delta$.

Les conditions (I), (III), (IV), (V) entraînent, en effet :

1° (en vertu du calcul de la droite de convergence donné par M. CAHEN) que la série converge pour $\Re(s) > d$;

2° qu'elle coïncide avec la fonction pour $\Re(s) > d + \delta$.

D'après les propriétés des fonctions analytiques, cette coïncidence a dès lors lieu dans toute la région où il y a convergence.

Quant aux résultats de la première partie de ma Note précédente, ils subsistent sans modification.

Ainsi :

Les conditions (I), (II), (III), (IV) restent nécessaires.

Les conditions (II), (III), (IV), (V) forment un système de conditions nécessaires et suffisantes.

Il en est de même (moyennant la restriction indiquée plus haut pour le choix de a) du système des conditions (I), (III), (IV), (V).

Paris, 17 février 1908.

J. HADAMARD.
