

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE M. FREDHOLM.

Par M. Émile Picard (Paris).

Adunanza dell'8 luglio 1906.

Les belles recherches de M. FREDHOLM sur l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \varphi(x) + \int_0^1 f(x, s) \varphi(s) ds = \psi(x),$$

où $f(x, s)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions données, et où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, sont rapidement devenues classiques *), et ont déjà fait l'objet d'un grand nombre de travaux, parmi lesquels il convient de citer ceux de M. HILBERT **), qui s'est particulièrement occupé de certains développements en séries associés à l'équation fonctionnelle précédente et a fait d'importantes applications à la théorie des fonctions. Ayant traité cette année dans mon cours de l'équation de FREDHOLM, je voudrais indiquer ici quelques remarques et certaines applications auxquelles j'ai été ainsi conduit, en donnant un résumé de quelques-unes de mes leçons. J'en ai déjà indiqué plusieurs points dans les Comptes Rendus (9 avril et 25 juin 1906).

I.

Rappel des résultats fondamentaux.

I. Il est nécessaire de rappeler d'abord les résultats essentiels de FREDHOLM, en considérant, au lieu de l'équation (1), l'équation

$$(2) \quad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s) \varphi(s) ds = \psi(x)$$

avec le paramètre λ .

Supposons d'abord que $f(x, s)$ reste finie, quand x et s restent entre 0 et 1.

*) Le mémoire fondamental de M. FREDHOLM se trouve dans les « Acta Mathematica » [t. XXVII (1903), pp. 365-390]. Il avait été précédé d'une Note dans les Comptes rendus de l'Académie de Stockholm (janvier 1900).

***) Les travaux de M. HILBERT ont paru dans les « Nachrichten » de Göttingen (1904 et 1905).

Introduisons, avec FREDHOLM, la fonction

$$f\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \dots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \dots & f(x_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \dots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

On forme la série *entière* en λ

$$D(\lambda) = 1 + \lambda \int_0^1 f(x_1, x_1) dx_1 + \dots + \frac{\lambda^n}{1.2 \dots n} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{matrix}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n + \dots;$$

puis la fonction de (ξ, η) , *entière* en λ , représentée par le développement

$$D_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + \lambda \int_0^1 f\left(\begin{matrix} \xi, x_1 \\ \eta, x_1 \end{matrix}\right) dx_1 + \dots + \frac{\lambda^n}{1.2 \dots n} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\begin{matrix} \xi, x_1, \dots, x_n \\ \eta, x_1, \dots, x_n \end{matrix}\right) dx_1 \dots dx_n + \dots$$

Avec les deux équations précédentes, on obtient la solution de l'équation (2), pour λ *non singulier*, au moyen de la formule

$$\varphi(x) = \psi(x) - \lambda \int_0^1 \frac{D_1(x, t)}{D(\lambda)} \psi(t) dt.$$

Les valeurs *singulières* de λ sont les racines de l'équation

$$(3) \quad D(\lambda) = 0.$$

Nous avons donc le résultat très remarquable que *la solution de l'équation (1) envisagée comme fonction de λ est une fonction méromorphe dans tout le plan.*

2. Une discussion approfondie des valeurs singulières a été faite par FREDHOLM. A chaque racine λ_0 de l'équation (3) correspond un nombre entier $n (n \geq 1)$, tel que l'équation sans second membre en Φ

$$(3) \quad \Phi(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x, s) \Phi(s) ds = 0$$

a n solutions linéairement indépendantes. [Si λ_0 est une racine simple de $D(\lambda)$, on a $n = 1$, et, d'une manière générale, si λ_0 est une racine multiple d'ordre ν , on a $n \leq \nu$].

Une autre question très intéressante a aussi été résolue par FREDHOLM; c'est de savoir à quelles conditions l'équation

$$(4) \quad \varphi(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x, s) \varphi(s) ds = \psi(x)$$

a une solution. Il est nécessaire et suffisant que la fonction $\psi(x)$ satisfasse aux conditions suivantes, différant un peu par la forme de celles de FREDHOLM.

Appelons équation *associée* d'une équation fonctionnelle du type qui nous occupe l'équation où la fonction $f(x, s)$ est remplacée par $f(s, x)$. Il résulte immédiatement de la loi de formation de la fonction entière $D(\lambda)$ et des fonctions analogues que *une équation et son associée ont les mêmes valeurs singulières avec le même nombre correspondant n .* Ceci posé, envisageons l'équation

$$(3)' \quad \Psi(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(s, x) \Psi(s) ds = 0.$$

Elle aura n solutions distinctes $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (4) ait une solution [$\varphi(x)$ étant toujours l'inconnue] s'expriment par les n égalités

$$\int_0^1 \Psi_i(x) \psi(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Il est clair que, si l'équation (4) a une solution, elle en aura une infinité que l'on obtiendra en ajoutant la solution générale de l'équation sans second membre.

3. Il a été supposé, dans ce qui précède, que la fonction $f(x, s)$ restait finie. L'intégrale, qui figure dans l'équation fonctionnelle, aura souvent un sens, même quand f devient infinie. FREDHOLM a aussi examiné ce cas dans son mémoire, et sa méthode revient au fond à substituer à l'équation proposée des équations équivalentes où il pourra arriver que la fonction jouant le rôle de $f(x, s)$ ne devienne plus infinie. Reprenons l'équation (1); en remplaçant sous le signe d'intégration $\varphi(x)$ par

$$\psi(x) - \lambda \int_0^1 f(x, s') \varphi(s') ds',$$

et posant

$$f_1(x, s') = \int_0^1 f(x, s) f(s, s') ds,$$

on obtient l'équation

$$(5) \quad \varphi(x) - \lambda^2 \int_0^1 f_1(x, s') \varphi(s') ds' = \psi(x) - \lambda \int_0^1 f(x, s) \psi(s) ds,$$

que l'on démontre facilement être équivalente à (1), et qui est du type de FREDHOLM.

Il pourra arriver que $f_1(x, s')$ reste finie; nous sommes alors ramené au cas précédent. S'il n'en est pas ainsi, on peut recommencer l'opération en partant cette fois de (5). On est ainsi conduit à envisager une suite de fonctions

$$f(x, s), f_1(x, s), \dots, f_n(x, s), \dots$$

où on a d'une manière générale

$$f_n(x, s) = \int_0^1 f_{n-1}(x, s') f(s', s) ds'.$$

Dans les applications les plus usuelles, il arrivera que, pour une certaine valeur de n , la fonction $f_n(x, s)$ restera finie, et alors la réduction cherchée se trouvera effectuée après n opérations.

Ainsi supposons que $f(x, s)$ devienne infinie seulement pour $x = s$, et comme $\frac{1}{|x-s|^\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$). Il est facile de voir que $f_n(x, s)$ restera finie à un certain moment. Si, par exemple, α est inférieur à $\frac{1}{2}$, $f_1(x, s)$ restera finie.

Le cas de $\alpha < \frac{1}{2}$ a été traité d'une manière extrêmement élégante par M. HILBERT, en se plaçant à un autre point de vue. Il montre que l'on peut, dans ce cas, conserver la solution de FREDHOLM pour f finie, à condition de remplacer par zéro dans tous les déterminants les termes des diagonales principales qui sont nécessairement infinis.

4. Il est évident que tous les résultats précédents sont susceptibles d'extensions au cas de deux variables. On aura alors l'équation

$$\varphi(x, y) + \lambda \int \int f(x, y; u, v) \varphi(u, v) du dv = \psi(x, y),$$

l'intégrale double étant étendue à une certaine aire du plan (u, v) , et la fonction inconnue étant $\varphi(x, y)$. Cette équation a une solution et une seule, sauf pour certaines valeurs singulières de λ .

Le cas où la fonction $f(x, y; u, v)$ devient infinie est très important pour les applications, et a été approfondi par M. PLEMELJ dans deux excellents mémoires *). Supposons, par exemple, que $f(x, y; u, v)$ devienne infinie seulement pour $x = u$ et $y = v$, et comme

$$\frac{1}{(\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2})^\alpha} \quad (\alpha < 2).$$

On pourra tirer parti de la formation de fonctions f_1, f_2, \dots, f_n analogues à celles qui ont été envisagées plus haut. Le cas de $\alpha = 1$ est particulièrement intéressant pour les problèmes de potentiels. Dans ce cas la fonction

$$f_1(x, y; u, v)$$

devient infinie comme

$$\log [(x-u)^2 + (y-v)^2]$$

et la fonction $f_2(x, y; u, v)$ reste finie.

5. Je terminerai ces généralités, en faisant une remarque sur le cas où la fonction $f(x, s)$ (pour nous borner à une variable) est *symétrique en x et s* . M. HILBERT a démontré que, dans ce cas, *les valeurs singulières de λ sont nécessairement réelles*. Il déduit ce résultat de la méthode même de FREDHOLM, où l'équation fonctionnelle intégrale est considérée comme la limite d'une équation fonctionnelle finie. On peut aussi le démontrer directement, comme il suit. Supposons que l'équation

$$\varphi(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad [f(x, y) \text{ symétrique}]$$

ait une solution différente de zéro pour $\lambda_0 = \lambda_1 + i\lambda_2$ ($\lambda_2 \neq 0$); on aura

$$\varphi(x) = \varphi_1 + i\varphi_2.$$

En substituant, on a de suite

$$\varphi_1(x) + \lambda_1 \int_0^1 f(x, y) \varphi_1(y) dy - \lambda_2 \int_0^1 f(x, y) \varphi_2(y) dy = 0,$$

$$\varphi_2(x) + \lambda_2 \int_0^1 f(x, y) \varphi_1(y) dy + \lambda_1 \int_0^1 f(x, y) \varphi_2(y) dy = 0.$$

En multipliant la première équation par $\varphi_1(x) dx$ et la seconde par $\varphi_2(x) dx$, puis ajoutant et intégrant, on aura

$$(\alpha) \int_0^1 [\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)] dx + \lambda_1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) [\varphi_1(x) \varphi_1(y) + \varphi_2(x) \varphi_2(y)] dx dy = 0.$$

*) J. PLEMELJ, Monatshefte für Mathematik und Physik, XV. Jahrgang (1904).

Multipliant ensuite les équations respectivement par $\varphi_2(x)dx$ et $\varphi_1(x)dx$, puis retranchant et intégrant, nous avons

$$(\beta) \quad \lambda_2 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) [\varphi_1(x)\varphi_1(y) + \varphi_2(x)\varphi_2(y)] dx dy = 0.$$

L'équation (α) montre que le multiplicateur de λ_2 dans (β) n'est pas nul. Nous aurions donc $\lambda_2 = 0$ contre l'hypothèse faite; la remarque est établie.

II.

Sur les potentiels de simple couche et de double couche.

6. Les potentiels de simple couche et de double couche conduisent aux applications les plus intéressantes, où se retrouve l'équation fonctionnelle de FREDHOLM.

Considérons d'abord une double couche, relative à une surface fermée S que, pour simplifier, nous supposons partout régulière; nous l'écrivons sous la forme

$$W = \iint \rho \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément de surface et ρ la densité. L'angle φ est l'angle que fait la direction allant de l'élément $d\sigma$ au point A (pour lequel on prend le potentiel) avec la normale intérieure à la surface; quant à r il représente la distance de $d\sigma$ au point A .

On sait que W est discontinu pour le passage par la surface; en désignant par W_0 le potentiel en un point de la surface, et par W_i et W_e les limites des potentiels intérieur et extérieur, il est bien connu que

$$(6) \quad \begin{cases} W_i = W_0 + 2\pi\rho, \\ W_e = W_0 - 2\pi\rho. \end{cases}$$

On dit aussi souvent que la dérivée normale d'un potentiel de double couche est continue pour le passage par la surface. Cet énoncé en lui-même est mauvais, car la dérivée normale en un point de la surface pourrait ne pas exister. Ce qui est exact sans restriction, c'est que si l'on prend sur une normale en un point A_0 de la surface, la dérivée suivant cette droite du potentiel W en deux points situés de part et d'autre de A_0 à la même distance ε , la différence des dérivées tend vers zéro avec ε *).

7. Le problème de DIRICHLET relatif aux fonctions harmoniques à l'intérieur d'une surface a été ramené par FREDHOLM à l'intégration d'une équation fonctionnelle. Ce problème se résout en effet par un potentiel de double couche, l'inconnue étant la densité ρ qui est donnée par la première des équations (6), où W_i est la fonction connue sur la surface. On peut écrire cette équation fonctionnelle sous la forme

$$(7) \quad \rho + \frac{1}{2\pi} \iint \rho \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma = F \quad (F = \text{fonction donnée sur la surface}).$$

*) Dans le mémoire cité plus haut, M. PLEMELJ donne une démonstration très précise de ce théorème important.

On démontre aisément que l'on ne se trouve pas dans un cas singulier en s'appuyant sur le théorème rappelé plus haut sur la dérivée normale.

Il importe de bien rappeler les notations. Nous appellerons dorénavant m le point variable de la surface pour lequel on prend le potentiel, l'angle φ est l'angle que fait avec la droite joignant $d\sigma$ à m la normale intérieure à la surface en $d\sigma$.

8. Si nous introduisons le paramètre λ , nous considérons au lieu de l'équation (7) l'équation

$$(8) \quad \rho + \lambda \iint \rho \cdot \frac{\cos \varphi}{2\pi r^2} d\sigma = F.$$

L'équation associée à l'équation (8) est également très intéressante et va se présenter dans une autre question. Pour l'obtenir, il faut faire une permutation de m et de $d\sigma$; on obtiendra donc l'équation

$$(8)' \quad \rho + \lambda \iint \rho \cdot \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} d\sigma = F,$$

où ψ (qu'il ne faut pas confondre avec φ) représente l'angle que fait la droite joignant m à $d\sigma$ avec la normale intérieure à la surface en m .

D'après ce que nous avons dit plus haut, les deux équations associées (8) et (8)' ont les mêmes valeurs singulières. Nous avons dit que $\lambda = 1$ n'était pas une valeur singulière; il est immédiat au contraire, sur l'équation (8), que $\lambda = -1$ est une valeur singulière, puisque l'équation

$$\rho - \frac{1}{2\pi} \iint \rho \cdot \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma = 0$$

est vérifiée pour $\rho = \text{constante}$.

M. PLEMELJ a établi (loc. cit.) que les pôles de la solution ρ de l'équation (8)' (envisagée comme fonction de λ) étaient tous simples, réels et au moins égaux à un en valeur absolue.

Il ne faudrait pas conclure du fait que les pôles λ_0 sont simples, que l'équation sans second membre

$$\rho + \lambda_0 \iint \rho \cdot \frac{\cos \varphi}{2\pi r^2} d\sigma = 0$$

n'a qu'une seule solution, c'est-à-dire que le nombre n du n° 2 est nécessairement égal à un . Il y a là une erreur que l'on serait tenté de commettre, mais il suffit de supposer que S se réduit à une sphère pour voir que les choses peuvent se passer tout autrement.

Supposons donc que la surface S soit une sphère de rayon un (dans ce cas $\varphi = \psi$). On montre aisément que les valeurs singulières sont

$$\lambda_0 = -(2n + 1),$$

n étant un entier positif ou nul. De plus, pour la valeur singulière $-(2n + 1)$ l'équation sans second membre

$$\rho - (2n + 1) \iint \rho \cdot \frac{\cos \varphi}{2\pi r^2} d\sigma = 0$$

a, comme solutions distinctes en ρ , les $2n + 1$ fonctions Y_n de LAPLACE correspondant à l'entier n .

D'une manière générale, on peut seulement affirmer que, pour la valeur singulière $\lambda = -1$, il y a une seule solution de l'équation sans second membre,

$$\rho - \frac{1}{2\pi} \iint \rho \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma = 0,$$

solution qui se réduit à une constante.

9. Considérons maintenant des potentiels de simple couche, que nous écrirons

$$V = \iint \frac{\rho}{r} d\sigma.$$

On sait que ce potentiel est continu dans tout l'espace. Les dérivées dans le sens de la normale jouissent de propriétés intéressantes. Reprenons le point m de la surface S et menons la normale en ce point. En désignant par n la direction de la normale intérieure, on peut considérer les valeurs limites, que nous désignerons par

$$\frac{dV}{dn} \quad \text{et} \quad \frac{dV'}{dn},$$

des dérivées de V prises suivant la direction n en un point *intérieur* et en un point *extérieur* de la surface infiniment voisins de m sur la normale.

On établit les deux formules *), dont la première est classique :

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn} \right] = 2\pi \rho_m, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{dV'}{dn} + \frac{dV}{dn} \right] = \iint \rho \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma. \end{cases}$$

On voit que l'intégrale où figure l'angle ψ se présente dans les questions où figure un potentiel de simple couche, tandis que nous avons l'intégrale avec l'angle φ dans le cas de la double couche. Les deux genres de potentiel sont ainsi *associés* l'un à l'autre, en entendant ce mot comme plus haut.

III.

Quelques applications des potentiels de simple couche.

10. On se rappelle que M. POINCARÉ dans son célèbre mémoire des Acta Mathematica (tome XX) sur la méthode de NEUMANN posa le problème, résolu depuis par plusieurs géomètres, de trouver sur une surface fermée un potentiel de simple couche,

*) M. PLEMELJ (loc. cit.) établit ces formules par un calcul assez long. Je les établis beaucoup plus rapidement en me servant avec un peu plus de précision d'un raisonnement analogue à celui qu'emploie ROBIN pour obtenir son équation fonctionnelle relative au problème de la distribution de l'électricité (voir le tome I de mon *Traité d'Analyse*, 2^e édition, page 203). L'équation de ROBIN se déduit des équations (9) en faisant $\frac{dV}{dn} = 0$ et éliminant $\frac{dV'}{dn}$.

pour lequel on ait (avec nos notations précédentes):

$$\frac{dV'}{dn} + \mu \frac{dV}{dn} = 0,$$

μ étant une constante convenablement choisie. En recourant aux relations (9), on voit que l'on a, pour la densité ρ , l'équation de FREDHOLM

$$\rho + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \iint \rho \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} d\sigma = 0;$$

les valeurs de μ sont donc liées simplement aux valeurs singulières de λ , considérées plus haut.

11. Le problème de l'aimantation par influence revient à la question précédente. Considérons un corps parfaitement doux limité par une surface S . Ce problème revient, d'après la théorie de POISSON, à trouver une fonction $V(x, y, z)$ de la nature d'un potentiel à l'infini, continue dans tout l'espace, harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de S , et telle que, pour tout point m de S , on ait

$$(1 + 4\pi k) \frac{dV}{dn} - \frac{dV'}{dn}$$

égale à une fonction connue du point m . Le nombre k représente le coefficient d'aimantation, positif si le corps doux est paramagnétique, et négatif pour un corps diamagnétique.

Or, nous pourrions représenter V par un potentiel de simple couche étendue sur S . En nous servant des équations (9), nous avons de suite pour la densité ρ de cette couche l'équation fonctionnelle

$$\rho - \frac{2\pi k}{1 + 2\pi k} \iint \rho \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} d\sigma = \text{fonction donnée sur } S.$$

Pour k positif, l'équation a certainement une solution et une seule, car nous avons vu que les valeurs singulières λ de l'équation (8)' (n° 8) étaient au moins égales à un en valeur absolue. Il peut en être autrement si k est négatif. Par exemple, si S est une surface sphérique de rayon un , on aura, d'après ce qui a été dit au n° 8, les valeurs singulières de k correspondant à

$$2\pi k = -\left(1 + \frac{1}{2n}\right),$$

où n est un entier positif. La théorie classique de l'aimantation n'est sans doute pas applicable à de tels corps diamagnétiques, s'il en existe.

12. Donnons maintenant un exemple qui conduise, pour un cas singulier, à une équation avec second membre. Il suffira de prendre le problème qui a pour objet de trouver une fonction harmonique V continue dans le volume limité par une surface S , avec des valeurs données F pour $\frac{dV}{dn}$ à la surface (en nous servant de la notation de plus haut).

En se servant toujours des formules (9), l'équation

$$\frac{dV}{dn} = F$$

devient

$$-2\pi\rho + \int \int \rho \frac{\cos\psi}{r^2} d\sigma = F,$$

c'est-à-dire

$$\rho - \int \int \rho \frac{\cos\psi}{2\pi r^2} d\sigma = -\frac{F}{2\pi}.$$

C'est donc une équation de la forme (8)', pour $\lambda = -1$, qui est une valeur singulière. Le problème n'est donc pas possible en général, et nous trouverons la condition en appliquant la règle du n° 2. Il faut prendre l'équation *associée*

$$\Psi - \int \int \Psi \frac{\cos\varphi}{2\pi r^2} d\sigma = 0,$$

qui, comme nous l'avons dit, a la seule solution $\Psi = \text{const.}$ On trouve donc la condition

$$(\alpha) \quad \int \int F d\sigma = 0,$$

comme il devait être.

Ces considérations trouvent leur application dans le problème de la distribution de l'électricité sur un conducteur, en présence de masses électriques *fixes* qui l'influencent. Soit U le potentiel dû aux masses électriques fixes, et soit V le potentiel dû à la couche électrique cherchée de densité ρ sur S ; on aura ici

$$F = -\frac{dU}{dn}$$

et la condition (α) est bien remplie. La solution dépendra d'une constante arbitraire, puisque l'on peut ajouter une solution de l'équation sans second membre

$$\rho - \int \int \rho \frac{\cos\psi}{2\pi r^2} d\sigma = 0,$$

qui est d'ailleurs l'équation fonctionnelle de ROBIN. Cette constante arbitraire correspond manifestement à la charge électrique donnée du conducteur.

13. La théorie analytique de la chaleur va nous fournir un exemple d'une nature différente. Considérons *un corps en équilibre de température avec rayonnement*. En désignant par V la température, cette fonction V est harmonique à l'intérieur du corps, et l'on a en chaque point m de sa surface S

$$-\frac{dV}{dn} = k(V_c - V),$$

k étant une fonction positive du point m de la surface, et V_c une fonction, donnée sur la surface, représentant en chaque point de celle-ci la température *extérieure*. Nous avons donc à trouver une fonction harmonique V telle que sur S

$$kV - \frac{dV}{dn}$$

soit égale à une fonction donnée.

Nous cherchons encore à exprimer V par un potentiel de simple couche de densité ρ , et nous trouvons de suite pour ρ l'équation fonctionnelle

$$\rho + \iint \rho \left[\frac{k}{2\pi r} - \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} \right] d\sigma = \text{fonction donnée sur } S.$$

C'est une équation du type de l'équation de FREDHOLM. On voit de suite que, la fonction k étant positive, nous ne sommes pas dans un cas singulier. En effet, dans ce cas l'équation sans second membre aurait une solution où ρ ne serait pas identiquement nul. Mais cela est impossible, car on ne peut avoir de fonction harmonique V pour laquelle

$$\frac{dV}{dn} - kV = 0 \quad \text{sur } S$$

sans que V ne soit identiquement nulle. On a en effet

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = - \iint V \frac{dV}{dn} d\sigma = - \iint k V^2 d\sigma,$$

d'où se déduit que V est identiquement nulle, k étant positif.

14. On peut encore faire servir l'analyse précédente à la résolution du problème suivant: *Trouver une fonction harmonique V telle que l'on ait sur S :*

$$aV + b \frac{dV}{dn} = \text{fonction donnée sur } S = F,$$

où a et b sont des fonctions du point de la surface.

On est ainsi conduit à l'équation fonctionnelle

$$a \iint \rho \frac{d\sigma}{r} + b \left[\iint \rho \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma - 2\pi \rho \right] = F.$$

Il n'y a aucune difficulté si b ne s'annule pas sur la surface, car on est ramené à l'équation

$$\rho - \iint \rho \left[\frac{a}{b} \frac{1}{2\pi r} + \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} \right] d\sigma = \text{fonction donnée},$$

qui est une équation de FREDHOLM. Il est clair que l'on pourra se trouver dans un cas singulier, si le signe de a est quelconque.

Je n'examine pas ici le cas où b pourrait s'annuler sur la surface, qui est plus compliqué.

IV.

Sur le problème généralisé de Dirichlet pour une équation linéaire du type elliptique.

15. Occupons-nous maintenant d'une question un peu différente, en envisageant le problème généralisé de DIRICHLET pour les équations linéaires du type elliptique

$$(10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f,$$

où a, b, c, f sont des fonctions de x et y . Je me suis autrefois beaucoup occupé de cette question *). Récemment, M. HILBERT et ses élèves ont rattaché ce problème à l'équation fonctionnelle de FREDHOLM. Ils partent à cet effet d'une certaine solution de l'équation différentielle devenant infinie en un point. Je voudrais montrer que la question peut être traitée très simplement sans introduire d'autre fonction que la fonction classique de GREEN pour un contour donné.

Il suffira de rappeler le résultat classique relatif à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(x, y).$$

L'intégrale de cette équation s'annulant sur un contour C est donnée par la formule

$$v = -\frac{1}{2\pi} \iint G(\xi, \eta; x, y) F(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

en désignant par $G(\xi, \eta; x, y)$ la fonction de GREEN relative au contour C , c'est-à-dire la fonction harmonique en (ξ, η) , s'annulant sur le bord et devenant infinie au point (x, y) comme $\log \frac{1}{r}$ [r étant la distance des deux points (ξ, η) et (x, y)]. Il est important de rappeler que, pour établir ce résultat, il n'est pas suffisant de supposer que la fonction $f(x, y)$ est continue. Il faut faire quelque autre hypothèse, dont la plus pratique est l'existence des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ à l'intérieur du contour.

16. Ceci posé, posons-nous la question de trouver l'intégrale de l'équation (10), continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres dans un contour C et s'annulant sur C ; c'est à ce problème que l'on se trouvera toujours ramené. Pour éviter quelques difficultés accessoires, je suppose que C est régulièrement analytique. Quant aux coefficients de l'équation, ils sont continus ainsi que leurs dérivées partielles qu'il peut être utile d'introduire dans les raisonnements.

En supposant l'existence de la solution, on déduit de (10)

$$(\alpha) \quad u(x, y) - \frac{1}{2\pi} \iint \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) u \right] G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta = \psi(x, y),$$

en posant

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint f(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta.$$

L'équation (α) n'est pas une équation de FREDHOLM, mais on peut facilement, au moyen d'intégrations par parties, passer de l'équation (α) à l'équation :

$$(\beta) \quad u(x, y) + \frac{1}{2\pi} \iint \left[\frac{\partial(aG)}{\partial \xi} + \frac{\partial(bG)}{\partial \eta} - cG \right] u(\xi, \eta) d\xi d\eta = \psi(x, y),$$

*) On trouvera une bibliographie de la question dans le dernier travail que j'ai publié sur ce sujet: *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de DIRICHLET* [Acta Mathematica, t. XXV (1902), pp. 121-137].

où l'intégrale double a un sens, et qui rentre dans le type de l'équation de FREDHOLM. On remarquera que le multiplicateur de u sous le signe d'intégration devient infini comme

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}},$$

et, à ce point de vue, l'équation est de même nature que les équations rencontrées dans la théorie du potentiel.

En général, c'est-à-dire si on ne se trouve pas dans un cas singulier, l'équation (β) aura une solution et une seule, mais il faut démontrer que la solution de (β) satisfait à l'équation (10), c'est-à-dire que l'on peut de l'équation (β) remonter à l'équation (α), et de celle-ci à l'équation différentielle (10).

17. On voit immédiatement que la chose sera possible, si la fonction $u(x, y)$ tirée de (β) a des dérivées partielles du premier ordre restant finies dans C et sur C , et si elle a à l'intérieur de C des dérivées partielles du second ordre; c'est ce qui résulte du résultat rappelé plus haut sur l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(x, y).$$

Il faut donc montrer, que la fonction $u(x, y)$ tirée de l'équation fonctionnelle (β) possède les dérivées indiquées. D'après ce que nous avons dit précédemment (par. 4), on peut substituer à l'équation (β) une autre équation fonctionnelle obtenue au moyen d'une certaine itération. Posons

$$f(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial(aG)}{\partial \xi} + \frac{\partial(bG)}{\partial \eta} - cG \right],$$

et ensuite

$$f_1(x, y; s, \sigma) = \iint f(x, y; u, v) f(u, v; s, \sigma) du dv.$$

Notre fonction $u(x, y)$ satisfera à l'équation

$$(\gamma) \quad u(x, y) - \iint f_1(x, y; s, \sigma) u(s, \sigma) ds d\sigma = \psi(x, y) - \iint f(x, y; s, \sigma) \psi(s, \sigma) ds d\sigma.$$

On aura montré que $u(x, y)$ a des dérivées premières, si on établit que

$$\iint f(x, y; s, \sigma) \psi(s, \sigma) ds d\sigma$$

a des dérivées premières, aucune difficulté ne se présentant pour les autres termes. Mais ceci revient à voir que l'intégrale

$$\iint \frac{\partial G}{\partial s} \psi(s, \sigma) ds d\sigma$$

a des dérivées premières, ce qui est évident en lui donnant la forme

$$- \iint G \frac{\partial \psi}{\partial s} ds d\sigma,$$

intégrale qui a des dérivées restant finies même sur le bord.

Il résulte des considérations que nous venons d'indiquer sommairement que u , déterminée par l'équation (β), a des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ déterminées dans C et sur C ; par suite de l'équation (β) on peut remonter à l'équation (α).

18. Pour achever, il faut montrer que $u(x, y)$ a des dérivées secondes à l'intérieur de C , ce qui permettra de passer de l'équation fonctionnelle (α) à l'équation différentielle (10). Nous considérons toujours l'équation (γ) équivalente à (β). Comme $u(s, \sigma)$ a des dérivées premières, on voit facilement que

$$\iint f_1(x, y; s, \sigma) u(s, \sigma) ds d\sigma,$$

assimilable, au point de vue qui nous occupe, à un potentiel logarithmique, a des dérivées secondes à l'intérieur de C . Dans le second membre de (γ), nous avons d'abord $\psi(x, y)$ qui a des dérivées secondes (si le coefficient f a des dérivées premières, comme nous le supposons). Enfin l'intégrale

$$\iint f(x, y; s, \sigma) \psi(s, \sigma) ds d\sigma$$

a aussi des dérivées secondes. En effet, elle est formée de termes comparables, au point de vue qui nous occupe, à

$$\iint \frac{\partial G}{\partial s} \psi(s, \sigma) ds d\sigma,$$

ou encore à

$$-\iint G \frac{\partial \psi}{\partial s} ds d\sigma;$$

et comme $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ a des dérivées premières (ψ ayant des dérivées secondes), cette dernière intégrale a des dérivées secondes à l'intérieur de l'aire. L'existence des dérivées, nécessaires pour la rigueur des raisonnements, est donc établie.

19. En résumé, nous avons établi par l'analyse précédente que, *en général*, il existe pour l'équation

$$(10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

(un contour C étant donné) *une intégrale, et une seule, continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres à l'intérieur de C et s'annulant sur le contour.*

Le mot *en général* sera complètement précisé si, au lieu de l'équation (10), on envisage l'équation où figure un paramètre arbitraire k

$$(11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu \right) = f.$$

De ce qui précède, il résulte que, pour cette dernière équation, il peut y avoir des valeurs singulières de k , pour lesquelles le théorème précédent n'est pas exact. Ces

valeurs sont les racines de la fonction entière en k associée à l'équation fonctionnelle

$$u(x, y) + \frac{k}{2\pi} \int \int \left[\frac{\partial(uG)}{\partial\xi} + \frac{\partial(bG)}{\partial\eta} - cG \right] u(\xi, \eta) d\xi d\eta = \psi(x, y),$$

qui est notre équation (9), où on a introduit le paramètre k .

Le cas *singulier* relatif à l'équation (10) est manifestement le cas où $k = 1$ serait une des valeurs singulières de l'équation (11).

Remarquons enfin que les valeurs singulières de l'équation (11) sont les valeurs de k pour lesquelles l'équation sans second membre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu \right) = 0$$

a une solution s'annulant sur C qui ne soit pas identiquement nulle.

V.

Sur l'équation de la vibration des membranes.

20. Parmi les équations de la forme (11) arrêtons-nous, en terminant, sur le cas de l'équation

$$(12) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + kcu = f,$$

en supposant que $c(x, y)$ soit toujours positif à l'intérieur de C .

On sait que M. POINCARÉ a démontré dans ce journal même [*Sur les équations de la Physique mathématique*, t. VIII (1894)] que l'intégrale de l'équation (12) prenant des valeurs données sur un contour C , envisagée comme fonction de k , était une fonction méromorphe de k ayant des pôles simples en nombre infini (d'ailleurs correspondant à des valeurs positives de k). L'existence de la première valeur singulière avait été établie auparavant par M. SCHWARZ (*Œuvres*, tome I, page 241) par une analyse extrêmement profonde, et j'avais montré qu'elle correspondait à un pôle, établissant en outre l'existence de la seconde valeur singulière (*Comptes Rendus*, 1893). Je dois aussi rappeler à ce sujet l'ancien mémoire de M. H. WEBER (*Math. Annalen*, tome I).

21. En rattachant l'équation (12) à l'équation fonctionnelle de FREDHOLM, la théorie devient extrêmement simple. Tout d'abord, le beau résultat de M. POINCARÉ, relatif à la nature de u considérée comme fonction de k , est intuitif. En prenant le problème de la section précédente, nous avons à envisager l'équation fonctionnelle

$$(13) \quad u(x, y) - \frac{k}{2\pi} \int \int c(\xi, \eta) u(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta = \psi(x, y)$$

et il est clair que $u(x, y)$ est une fonction méromorphe de k . Il est facile de voir que les pôles sont simples. Supposons en effet que $k = k_0$ soit un pôle d'ordre m ($m > 1$) de la solution de l'équation (13); soit donc

$$u = \frac{\varphi(x, y)}{(k - k_0)^m} + \frac{\mu(x, y)}{(k - k_0)^{m-1}} + \dots \quad (m > 1).$$

En substituant, et prenant les termes en

$$\frac{1}{(k - k_0)^m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(k - k_0)^{m-1}}$$

nous avons

$$(\alpha) \quad \varphi(x, y) - \frac{k_0}{2\pi} \int \int c(\xi, \eta). G. \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0,$$

$$(\beta) \quad \mu(x, y) - \frac{k_0}{2\pi} \int \int c(\xi, \eta). G. \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi} \int \int c. G. \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0.$$

De (α) et (β), il résulte que φ et μ s'annulent sur le contour C. Il résulte aussi de ces relations que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_0 c(x, y) \varphi = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + k_0 c(x, y) \mu + c(x, y) \varphi = 0.$$

En multipliant ces dernières équations respectivement par μ et φ et intégrant après multiplication par dx dy, il vient, en se servant de la formule de GREEN :

$$\int \int c(x, y) \varphi^2(x, y) dx dy = 0.$$

Donc φ devrait être identiquement nulle, ce qui est absurde. (Il est clair que le calcul précédent ne s'applique pas à m = 1).

22. Les pôles, s'ils existent, sont nécessairement positifs; c'est un point trop facile à établir pour que nous nous y arrêtons. Le point intéressant est de montrer qu'ils sont en nombre infini. Du moment que l'on sait, comme il nous arrive ici, que les seules singularités possibles sont des pôles simples, il n'y a aucune difficulté à établir ce résultat, en se servant des constantes introduites par M. SCHWARZ pour obtenir la première valeur singulière *).

Bornons-nous, avec M. SCHWARZ, à l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k c. u = 0,$$

prenant la valeur un sur le contour C. Elle est développable, pour k assez petit, en série

$$(\gamma) \quad u = u_0 + u_1 k + \dots + u_n k^n + \dots$$

et on a

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= 0 && (u_0 = 1 \text{ identiquement}) \\ \Delta u_1 + c u_0 &= 0 \\ \dots & \dots && (\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}), \\ \Delta u_n + c u_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

*) J'avais déjà suivi la marche qui va être indiquée, dans mon *Traité d'Analyse* (tome III, page 125) pour le cas d'une équation de même type à une seule variable.

tous les u (sauf u_0) s'annulant sur C . M. SCHWARZ considère la constante positive

$$W_{m+n} = \iint c(x, y) u_m u_n dx dy$$

qu'on voit facilement dépendre de $m + n$ seulement, et il établit que les constantes W satisfont aux inégalités

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \dots < \frac{W_n}{W_{n-1}} < \dots$$

Le quotient $\frac{W_n}{W_{n-1}}$, croissant avec n , a une limite ou augmente indéfiniment. Ce dernier cas est impossible, car la série

$$W_0 + W_1 k + \dots + W_n k^n + \dots$$

ne convergerait que pour $k = 0$, ce qui entraînerait que la série (γ) ne converge que pour $k = 0$, ce qui n'a pas lieu. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = c,$$

c étant une quantité finie et non nulle. M. SCHWARZ démontre ensuite, qu'on peut trouver un nombre fixe K tel que

$$u_n(x, y) < K \sqrt{W_{2n}},$$

d'où se déduit que le rayon du cercle de convergence de la série (γ) est $\frac{1}{c}$.

23. Nous savons *a priori* que le point $k_1 = \frac{1}{c}$ est un pôle simple de la fonction u définie par le développement (γ) et cette fonction a ce seul pôle sur le cercle de convergence. Tous les raisonnements sont alors bien simplifiés. Si nous posons

$$(14) \quad u = \frac{u'}{1 - \frac{k}{k_1}} + v_0 + v_1 k + \dots + v_n k^n + \dots,$$

$u'(x, y)$ sera la limite de

$$u_n k_1^n \quad \text{pour } (n = \infty),$$

et la série

$$v_0 + v_1 k + \dots + v_n k^n + \dots$$

aura un rayon de convergence supérieure à k_1 , cette convergence allant jusqu'au second pôle k_2 (s'il existe). Or c'est précisément l'existence d'une valeur finie de k_2 , que nous devons établir. Mais auparavant remarquons que $u'(x, y)$ s'annule sur le bord C et satisfait à l'équation

$$\Delta u' + k_1 c u' = 0,$$

comme on le voit en substituant (14) dans l'équation donnée; d'ailleurs il est clair que u' n'est pas identiquement nulle.

La substitution indiquée nous donne maintenant les équations

$$\begin{aligned} \Delta v_0 - k_1 c u' &= 0, \\ \Delta v_1 + c v_0 &= 0, \\ \dots & \\ \Delta v_n + c v_{n-1} &= 0; \end{aligned}$$

v_0 prend la valeur un sur C , tous les autres v sont nulles sur C .

La fonction v_0 , ainsi que les autres v , peuvent avoir un signe quelconque dans C , tandis que les u_i tout à l'heure étaient positifs. Cependant, on peut former les mêmes constantes positives avec les v qu'avec les u ; ce seront

$$W'_{m+n} = \iint c(x, y) v_m v_n dx dy.$$

On a encore les inégalités

$$\frac{W'_1}{W'_0} < \dots < \frac{W'_n}{W'_{n-1}} < \dots$$

et on en conclut que $\frac{W'_n}{W'_{n-1}}$ a une limite c' nécessairement finie, sans quoi la série

$$v_0 + v_1 k + \dots + v_n k^n + \dots$$

ne convergerait que pour $k = 0$, ce qui n'a pas lieu puisqu'elle converge au delà de k_1 . On peut aussi établir que

$$|v_n(x, y)| < K' \sqrt{W'_{2n}} \quad (K' \text{ étant un nombre fixe})$$

et enfin que les deux séries

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 k + \dots + v_n k^n + \dots, \\ W'_0 + W'_1 k + \dots + W'_n k^n + \dots \end{aligned}$$

ont même cercle de convergence. On arrive ainsi au second pôle $k_2 = \frac{1}{c'}$ ($k_2 > k_1$), et ainsi de suite aux pôles en nombre infini k_3, \dots, k_n, \dots

On remarquera que la grande facilité des raisonnements qui viennent d'être esquissés tient essentiellement à ce que nous savons à l'avance que la fonction u n'a que des pôles simples.

24. A chacune des valeurs singulières de l'équation

$$(15) \quad \Delta u + k c u = 0$$

correspond au moins une intégrale u de cette équation s'annulant sur le bord et non identiquement nulle. Nous ne considérons pas évidemment comme distinctes deux intégrales qui sont dans un rapport constant.

Quoique tous les pôles soient simples, il peut arriver qu'à un pôle correspondent plusieurs intégrales distinctes s'annulant sur le bord. J'ai eu autrefois l'occasion de remarquer que cette circonstance ne se présente pas pour le premier pôle, que nous avons appelé k_1 . En d'autres termes, l'équation

$$\Delta u + k_1 c u = 0$$

n'admet pas d'autre intégrale s'annulant sur le bord C que

$$\Gamma u' \quad (\Gamma = \text{constante}).$$

Rappelons d'abord qu'il résulte des travaux de M. SCHWARZ qu'il n'existe pas d'intégrale continue de l'équation (1), pour $k > k_1$, toujours positive et non nulle dans C et sur C ; quant à u' il est nul sur le bord, et positif à l'intérieur.

Ceci posé, indiquons la démonstration du résultat énoncé ci-dessus, en commençant par la remarque suivante. Relativement à l'équation

$$\Delta u + kcu = 0,$$

soit $k = k_1$ la première valeur singulière pour un contour C , et soit pareillement $k = k'_1$ la première valeur singulière pour un second contour C' , intérieur au premier (pouvant avoir avec lui un arc commun). Je dis que l'on a

$$k'_1 > k_1.$$

En effet, considérons la valeur de la fonction de GREEN $G(x, y; a, b)$ relative à C pour un point (a, b) intérieur à C' et par suite à C , et celle de la fonction de GREEN $G'(x, y; a, b)$ relative à C' pour le même point (a, b) . Il est immédiat que pour tout point (x, y) à l'intérieur de C' , on a

$$G' < G,$$

car $G' - G$ est régulier dans C' et est négatif sur C' .

Si maintenant on revient aux constantes W_n et W'_n pour C et C' relatives à notre équation différentielle, on aura

$$W_n > W'_n,$$

qui est une conséquence de l'inégalité précédente.

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{de } \sqrt[n]{W_n} = \frac{1}{k_1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{de } \sqrt[n]{W'_n} = \frac{1}{k'_1},$$

et par suite $k'_1 > k_1$, comme nous voulions le montrer.

25. Ce lemme établi, supposons qu'il y ait pour l'équation

$$(16) \quad \Delta u + k_1cu = 0$$

deux intégrales s'annulant sur le bord C , et qui ne soient pas dans un rapport constant. On pourra former, en choisissant convenablement la constante λ , une intégrale

$$U = u' - \lambda u''$$

s'annulant sur le bord, et en un point O de l'intérieur.

Je dis d'abord que ce point O ne pourra pas être un zéro isolé de U . En effet, dans le cas contraire, U serait positif (par exemple) et différent de zéro, tout autour de O (à l'exception de O). Donc sur une courbe C' entourant O , U serait positif et non nul; comme k_1 est inférieur à la valeur k'_1 , première valeur singulière relative à

C' , l'intégrale U , positive sur C' , est certainement positive et *non nulle* à l'intérieur, ce qui n'a pas lieu puisqu'elle est nulle en O .

L'intégrale U de (16) aura donc une courbe sur laquelle elle s'annulera, soit une courbe C' , qui pourra d'ailleurs avoir des parties communes avec le bord et à laquelle correspondra une première valeur singulière $k'_1 > k_1$. Alors, nous aurons une intégrale U de (16) s'annulant sur C' et non identiquement nulle, ce qui est impossible, car k_1 , étant plus petit que k'_1 correspondant à C' , la chose ne peut exister.

Il est donc bien établi que, à la première valeur singulière k_1 , correspond une seule solution s'annulant sur le bord (à un facteur près).

26. Il est facile de voir sur des exemples que, à une autre valeur singulière que la première, peuvent correspondre plusieurs intégrales *distinctes* s'annulant sur le bord.

Il suffit de considérer le cas d'une circonférence C de rayon R ayant l'origine pour centre, et de prendre l'équation :

$$(17) \quad \Delta u + k^2 u = 0.$$

En désignant par $J_n(x)$ la fonction de BESSEL correspondant à l'entier n , et prenant pour k une racine de l'équation

$$J_n(kR) = 0,$$

on aura les deux solutions

$$J_n(kr) \cos n\theta \quad \text{et} \quad J_n(kr) \sin n\theta$$

en se servant des coordonnées polaires r et θ . Ces deux solutions s'annulent sur la circonférence C , et elles ne sont pas dans un rapport constant.

27. D'une manière générale les solutions correspondant à une valeur singulière $k_i (i > 1)$, s'annulant sur le bord, ne restent pas de même signe à l'intérieur de C . En effet, dans le cas contraire, en prenant une courbe C' très voisine de C , on aurait une solution de

$$\Delta u + k_i^2 u = 0$$

qui resterait toujours positive, et non nulle, sur C' . Donc k_i serait moindre que la première valeur singulière correspondant à C' (qui est très voisine de la première valeur singulière k_1 correspondant à C); on aurait donc

$$k_i < k_1,$$

ce qui n'a pas lieu.

Paris, juin 1906.

ÉMILE PICARD.