

SISTEMI CONIUGATI SULLE SUPERFICIE DEGLI IPERSPAZI.

Memoria di **Enrico Bompiani** (Roma).

Adunanza del 27 novembre 1921.

§ 1.

Introduzione.

Lo studio delle curve definite sopra una superficie da proprietà proiettivo-differenziali ha soprattutto lo scopo di fornire una interpretazione geometrica delle equazioni lineari ed omogenee a derivate parziali. In questo senso è stata già ampiamente studiata l'equazione di LAPLACE ¹⁾

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + a(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + b(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial x}{\partial \tau_2} + c(\tau_1, \tau_2)x = 0,$$

le cui soluzioni (in numero qualsiasi) possono venir interpretate come coordinate proiettive omogenee dei punti di una superficie che possiede un doppio sistema coniugato di curve nel senso ordinario. Della necessità di introdurre un modello iperspaziale nello studio di quella equazione ci si rende facilmente conto se si ricorda che, mentre nello spazio ordinario ogni superficie ammette infiniti sistemi coniugati, una superficie dello S_4 ammette un solo sistema coniugato, e una superficie di uno spazio di dimensione superiore non ne ammette alcuno in generale: quindi le superficie che ne posseggono uno, rappresentano un'eccezione dotata di proprietà sue peculiari. E sono queste proprietà geometriche che vengono interpretate a vantaggio della teoria analitica dell'equazione di LAPLACE.

Però questo stesso vantaggio menoma in un certo senso l'interesse di quei sistemi di curve; perchè non esistendo sopra una superficie generale di un iperspazio non ci

¹⁾ Può vedersi in proposito la mia Memoria: *Sull'equazione di LAPLACE* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXIV (2° semestre 1921), pp. 383-407].

informano affatto sulla sua natura. Occorre perciò ricercare altri sistemi di curve definiti da proprietà simile a quella che definisce i sistemi coniugati; e su di essi si potrà costruire una teoria analoga a quella cui si è precedentemente accennato. Questi sistemi esistono realmente e ne ho già mostrato incidentalmente l'interesse in un problema di natura metrica ²⁾; questa Nota è destinata soprattutto a mettere in evidenza le analogie e le differenze dal punto di vista proiettivo, con i sistemi coniugati ordinari.

I sistemi di curve qui studiati (come altri che si possono immaginare, per es. quelli di quasi-asintotiche ai quali ho dedicato altri lavori) essendo invarianti per trasformazioni proiettive forniscono lo strumento naturale, e verranno certamente utili, per approfondire la bella teoria dell'applicabilità proiettive per le superficie iperspaziali che dobbiamo al prof. G. FUBINI.

§ 2.

Posizione congiunta dei piani tangenti ad una superficie di S_n .

Due piani tangenti ad una superficie V_2 di S_n in due punti infinitamente vicini hanno sempre un punto comune: questo fatto si esprime dicendo che i due piani sono in posizione congiunta (*vereinigte Lage* secondo LIE). La dimostrazione è immediata. Ne segue che se si considera un elemento E_s di una curva su V_2 (cioè un punto di V_2 e gli elementi della curva contenuti nell'intorno d'ordine s del punto) i piani tangenti a V_2 nei punti di E_s appartengono a uno spazio di dimensione $\leq 2s + 2$ e varrà necessariamente il segno di disuguaglianza se $2s + 2 > n$.

§ 3.

Definizione dei sistemi coniugati di specie ν sulle superficie di $S_{2\nu+1}$.

Sopra una V_2 di $S_{2\nu+1}$ consideriamo un elemento E_ν di curva C passante regolarmente per un suo punto $P \equiv E_0$; i piani tangenti a V_2 nei punti di E_ν successivi a P determinano un $S_{2\nu}$ che taglia il piano tangente in P lungo una retta uscente da P . Questa tangente (E_1) in P si dirà *tangente coniugata di specie ν dell'elemento E_ν* .

Se consideriamo poi un sistema ∞^1 di curve C arbitrariamente date su V_2 , e per ogni punto P costruiamo la tangente coniugata (nel senso ora specificato) all'elemento

²⁾ E. BOMPIANI, *Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, vol XXIV (1° semestre 1915), pp. 1193-1199].

E_v di curva C che vi passa, le tangenti costruite inviluppano su V_2 un nuovo sistema ∞^1 di curve che diremo *sistema coniugato di specie v al sistema delle C* .

Indicheremo una curva di questo nuovo sistema con K , e per ricordare che del primo sistema occorre considerare gli elementi E_v , del secondo gli elementi E_1 , adottiamo la notazione $C^{(v)}$ e $K^{(1)}$.

I due sistemi insieme formano il *doppio sistema coniugato di specie v* ($C^{(v)}$, $K^{(1)}$).

Per $v = 1$ si hanno i sistemi coniugati ordinari sulle V_2 di S_3 ; per $v > 1$ si perde in generale il carattere involutorio, non essendo lecito lo scambio delle $C^{(v)}$ con le $K^{(1)}$.

§ 4.

Proprietà caratteristica della rigata delle tangenti coniugate agli elementi E_v di una curva.

Ho già introdotto, per la classificazione proiettiva delle rigate di un S_r , la nozione di (primo) indice di sviluppabilità ³⁾: esso è il massimo numero di generatrici consecutive linearmente indipendenti e raggiunge per una rigata generale di S_r , i valori $\frac{r}{2}$ o $\frac{r+1}{2}$ secondo la parità di r .

La proprietà caratteristica della rigata indicata è la seguente: *Le tangenti coniugate di specie v agli elementi E_v di una curva di V_2 formano una rigata d'indice di sviluppabilità v (invece che $v+1$) e viceversa.*

La parte diretta del teorema segue senz'altro dalla costruzione delle tangenti coniugate; l'inversa dal fatto che se la rigata è d'indice v , lo S_{2v} di $v+1$ generatrici consecutive contiene i piani tangenti in v punti successivi delle curve di contatto ⁴⁾.

Limitero d'ora innanzi lo studio ai sistemi coniugati di 2^a specie.

³⁾ E. BOMPIANI, *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVII (1^o semestre 1914), pp. 305-331].

⁴⁾ Si può domandare se, e in qual modo, si possa estendere ai sistemi coniugati con $v > 1$ il teorema di KOENIGS che fornisce ∞^4 sistemi coniugati sopra una superficie di S_3 . Si prevede che qualora ciò sia possibile per una superficie σ di S_{2v+1} , lo sarà in due modi diversi in ragione del diverso comportamento delle curve C e K nel coniugio per $v > 1$.

E si hanno infatti i due risultati seguenti:

Se i piani tangenti a σ incontrano tutti uno stesso S_v si conoscono su di essa i sistemi ($C^{(v)}$, $K^{(1)}$) costituiti:

1^o) dalle ∞^1 curve K (certo esistenti su σ) in ∞^1 S_{v+1} passanti per S_v ;

2^o) da ∞^1 fra le ∞^v curve C di contatto delle rigate circoscritte a σ e aventi ciascuna un S_{v-1} direttore (cioè con generatrici incidenti un S_{v-1}) contenuto in S_v .

Il procedimento indicato, valido per σ particolari appena $v > 1$, fornisce tutte le C che associate

§ 5.

Equazione differenziale dei sistemi coniugati di 2^a specie.

Sulla superficie V_2 descritta dal punto $x(\tau_1, \tau_2)$ [cioè di coordinate proiettive omogenee $x_i(\tau_1, \tau_2)$ con $i = 0, 1, \dots, 5$] sia definito il sistema ∞^1 , di curve $C^{(2)}$ (anche differenzialmente): sarà noto per ogni punto il valore di $d\tau_1/d\tau_2$, relativo alla $C^{(2)}$ che vi passa. Indichiamo con δ le caratteristiche dei differenziali relativi alle curve $K^{(1)}$ del sistema coniugato.

La condizione di coniugio è data dall'equazione determinante (di cui si indica una colonna generica omettendo l'indice i delle x):

$$(I) \quad \begin{vmatrix} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{20} d\tau_1 + x^{11} d\tau_2 \\ x^{11} d\tau_1 + x^{02} d\tau_2 \\ (M + x^{20} d^2 \tau_1 + x^{11} d^2 \tau_2) \delta \tau_1 + (N + x^{11} d^2 \tau_1 + x^{02} d^2 \tau_2) \delta \tau_2 \end{vmatrix} = 0$$

ove

$$x^{rs} = \frac{\partial^{r+s} x}{\partial \tau_1^r \partial \tau_2^s}$$

$$M = x^{30} d\tau_1^2 + 2x^{21} d\tau_1 d\tau_2 + x^{12} d\tau_2^2$$

$$N = x^{21} d\tau_1^2 + 2x^{12} d\tau_1 d\tau_2 + x^{03} d\tau_2^2.$$

Se i sistemi $K^{(1)}$ e $C^{(2)}$ sono distinti con opportuna scelta delle linee coordinate (cioè facendo $d\tau_2 = 0$ su $C^{(2)}$ e $\delta\tau_1 = 0$ su $K^{(1)}$), il coniugio di 2^a specie equivale

alle $\infty^1 K$ danno sistemi $(C^{(v)}, K^{(1)})$ d'accordo col fatto che, date le K , l'equazione differenziale che determina le C è d'ordine v .

Per una σ generica si ha l'altro risultato:

Si consideri, insieme a σ di S_{2v+1} , la superficie $\bar{\sigma}$ luogo delle traccie dei suoi piani tangenti sopra un S_{2v-1} : si ha così una corrispondenza fra punti (generici) di σ e $\bar{\sigma}$. Al sistema delle ∞^1 sezioni C prodotte su σ dagli iperpiani per S_{2v-1} corrisponde un sistema ∞^1 di curve \bar{C} su $\bar{\sigma}$; sia \bar{K} il sistema coniugato di specie $v-1$ su $\bar{\sigma}$ alle \bar{C} in modo da avere un doppio sistema $(\bar{C}^{(v-1)}, \bar{K}^{(1)})$. Le curve K di σ che corrispondono alle \bar{K} di $\bar{\sigma}$ formano con le C un doppio sistema coniugato di specie v $(C^{(v)}, K^{(1)})$.

Si sanno così costruire ∞^{4v} sistemi coniugati di specie v appena si sappiano costruire i sistemi coniugati di specie $v-1$ per una superficie di S_{2v-1} : si ha cioè una riduzione, per essi, della difficoltà d'integrazione (come nel teorema di KOENIGS); però il procedimento non è applicabile in modo ricorrente, perchè le \bar{C} su $\bar{\sigma}$ non presentano la particolarità che presentavano le C su σ .

all'esistenza di un'equazione a derivate parziali

$$x^{21} + ax^{20} + bx^{11} + cx^{10} + dx^{01} + ex = 0$$

(a, \dots, e funzioni di τ_1, τ_2) soddisfatta da tutte le x_i : questa equazione è, per il coniugio di 2^a specie, l'analogia dell'equazione di LAPLACE, ricordata per il coniugio ordinario.

Se invece i sistemi $C^{(2)}$ e $K^{(1)}$ coincidono, quindi $d = \delta$ la (I) diviene:

$$\begin{vmatrix} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{20}d\tau_1 + x^{11}d\tau_2 \\ x^{11}d\tau_1 + x^{02}d\tau_2 \\ x^{30}d\tau_1^2 + 3x^{21}d\tau_1^2d\tau_2 + 3x^{12}d\tau_1d\tau_2^2 + x^{03}d\tau_2^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione definisce in ciascun punto le cinque *tangenti principali*, e sulla superficie le *linee principali* ⁵⁾: esse appariscono qui come *linee autoconiugate di 2^a specie*; è questa una loro nuova proprietà caratteristica.

§ 6.

Influenza di un sistema coniugato ordinario sopra quelli di specie superiore.

Una superficie di S_5 non possiede *in generale* un doppio sistema coniugato ordinario ($\nu = 1$) nè un sistema semplice di asintotiche.

⁵⁾ C. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXX (2^o semestre 1910), pp. 87-121].

Per un'altra proprietà di esse vedi la mia Nota *Sopra alcune estensioni dei teoremi di MEUSNIER e di EULERO* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XLVIII (1912-1913), pp. 393-410]: secondo la denominazione ivi introdotta, esse costituiscono una (particolare) famiglia di quasi-asintotiche $\gamma_{2,3}$, perchè lo S_3 osculatore ad una di esse in un punto coincide con lo S_3 2-osculatore alla superficie secondo la tangente ivi alla curva stessa.

Il Prof SEGRE ha poi trovato recentemente che l'indeterminazione delle linee principali è proprietà caratteristica delle superficie di VERONESE. Vedi SEGRE, *Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di VERONESE* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, vol. XXX (1^o semestre 1921), pp. 200-203, 227-231]. Una proprietà caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane di dato ordine, dipendente dell'esistenza di linee quasi-asintotiche si trova nella mia Nota: *Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (1^o semestre 1921), in corso di stampa].

Vogliamo cercare come l'esistenza di uno di questi sistemi modifichi i risultati relativi al coniugio di 2^a specie.

Questi due fatti possono raccogliersi dicendo semplicemente che lo spazio 2-osculatore in un punto generico x ⁶⁾, individuato dai punti $x, x^{10}, x^{01}, x^{20}, x^{11}, x^{02}$ è uno S_4 . Esiste in tal caso un'equazione lineare omogenea a derivate parziali, del 2° ordine, cui soddisfano le coordinate x_i . In forza di essa l'equazione (1) che esprime il coniugio di 2^a specie si riduce al tipo

$$\left| \begin{array}{c} S_4 \\ (x^{30} d\tau_1^2 + 2x^{21} d\tau_1 d\tau_2 + x^{12} d\tau_2^2) \delta\tau_1 + (x^{21} d\tau_1^2 + 2x^{12} d\tau_1 d\tau_2 + x^{03} d\tau_2^2) \delta\tau_2 \end{array} \right| = 0$$

avendo globalmente indicato con S_4 le prime 5 linee costruite con le coordinate dei punti che individuano lo S_4 .

Apparisce da questa equazione una differenza essenziale fra questo caso e quello generale: perchè fissata la tangente d (relativa a una C) rimane fissata una tangente δ , ma fissata δ si hanno due direzioni d ; cioè mentre nel caso generale dato un sistema $K^{(1)}$ si possono costruire ∞^2 C tali che ∞^1 di esse formino con $K^{(1)}$ un doppio sistema coniugato, nel caso attuale dato un sistema $K^{(1)}$ esistono due soli sistemi C ad esso coniugati.

La proprietà rilevata s'inverte. Supponiamo che ad ogni sistema di curve $K^{(1)}$ si possa far corrispondere un numero finito di sistemi C : dico che lo $S(2)$ osculatore generico alla superficie è un S_4 .

Infatti in questa ipotesi l'equazione (1) deve essere di 1° ordine nei differenziali, cioè qualunque sia $d\tau_1/d\tau_2$, devono essere nulli i coefficienti di $d^2\tau_1, d^2\tau_2$. Se si scrive questo si ottiene appunto un'equazione a derivate parziali del 2° ordine, lin. ed omog., cioè $S(2) \equiv S_4$. Si può osservare che lo stesso ragionamento vale qualunque sia l'ambiente della superficie (purchè questa possenga doppi sistemi coniugati di 2^a specie); sicchè:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie di S_n ($n \geq 5$) abbia come spazio 2-osculatore generico uno S_4 (e non S_5) è che ad ogni sistema $K^{(1)}$ di curve si possa associare un numero finito (necessariamente 1 o 2) di sistemi di curve in modo da formare un doppio sistema coniugato di 2^a specie.

Se chiamiamo ancora *principali* le tangenti autoconiugate (per le quali $d = \delta$) troviamo che da ogni punto della superficie ne escono tre; le superficie a tangenti principali indeterminate stanno in S_4 .

⁶⁾ Per la definizione degli spazi v -osculatori, $S(v)$, può vedersi la mia Nota: *Sopra alcune estensioni*, etc. già citata in ⁵⁾.

§ 7.

**Superficie che posseggono un sistema di curve
per le quali è indeterminato il sistema coniugato.**

Se $\nu = 1$ si hanno le sviluppabili (in particolare il piano).

Se $\nu = 2$ bisogna distinguere due tipi di superficie, secondo che su di essa:

1°) Esiste un sistema C per il quale è indeterminato il sistema K .

2°) Esiste un sistema K per il quale è indeterminato il sistema C .

Nel 1° caso: assumiamo le C date come curve τ_i ($\tau_i = \text{cost.}$). L'equazione (1) che si riduce alla seguente

$$\begin{vmatrix} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{11} \\ x^{02} \\ x^{12} \delta \tau_1 + x^{03} \delta \tau_2 \end{vmatrix} = 0$$

deve dare un valore indeterminato per il rapporto $\delta \tau_1 / \delta \tau_2$, sicchè esistono due equazioni del tipo

$$x^{12} = [x^{11}, x^{02}, x^{10}, x^{01}, x]$$

$$x^{03} = [x^{11}, x^{02}, x^{10}, x^{01}, x]$$

intendendo con la notazione a 2° membro una combinazione lineare omogenea delle quantità indicate, i cui coefficienti sono funzioni (che non interessa di considerare) di τ_1, τ_2 . Le coordinate dei punti della superficie soddisfano a queste equazioni e alle loro conseguenze differenziali. Possiamo anche dire che i punti indicati nei primi membri stanno nello S_4 dei punti indicati nei 2° membri.

Derivando rispetto a τ_2 la seconda equazione ricaviamo che tutti i punti derivati x^{or} con $r \geq 3$ stanno nello S_4 indicato, cioè ogni curva C sta in S_4 . Ma dalla prima risulta pure che tutti i punti x^{1r} ($r \geq 2$) stanno nello S_4 il quale contiene quindi due curve C infinitamente vicine. Se non tutta la superficie sta in S_4 , caso che poco interessa, le curve C apparterranno al più ad S_3 e due S_3 infinitamente vicini stanno in uno S_4 cioè si tagliano in S_2 .

Rimane solo da esaminare il caso in cui valga una relazione del tipo

$$[x^{11}, x^{02}, x^{10}, x^{01}, x] = 0;$$

con una trasformazione di variabili l'equazione precedente è sempre riducibile ad una delle due forme (senza alterare le linee $d\tau_i = 0$)

$$x^{11} = [x^{10}, x^{01}, x]; \quad x^{02} = [x^{10}, x^{01}, x]$$

quindi le C o fanno parte di un sistema coniugato ordinario o sono asintotiche. Osservando che nulla cambia se la superficie sta in S_n ($n \geq 5$) purchè possenga la proprietà voluta, abbiamo:

Se una superficie di S_n possiede un sistema di curve C di cui sia indeterminato il sistema coniugato di 2^a specie K si presenta necessariamente uno dei casi seguenti:

- 1) *La superficie sta in S_4 .*
- 2) *Il sistema C appartiene ad un doppio sistema coniugato ordinario o è composto di asintotiche.*
- 3) *Le curve C sono in S_3 di cui due infinitamente vicini s'incidono in un piano; sicchè o questi S_3 inviluppano una curva (caso generale) oppure (casi particolari) sono tangenti ad un cono di 2^a specie (con retta-vertice) o osculatori a un cono di 1^a specie (cioè contenenti tre generatrici successive) o infine passano tutti per uno stesso piano.*

Esaminiamo ora l'altro caso: esiste sulla superficie un sistema di linee K (che assumeremo come $\delta\tau_2 = 0$) di cui è indeterminato il sistema coniugato di 2^a specie C .

Ciò significa che posto nella (1) $\delta\tau_2 = 0$, l'equazione è identicamente soddisfatta quali si siano i valori attribuiti ai differenziali primi e secondi di caratteristica d delle τ .

Dall'annullarsi i coefficienti dei differenziali secondi si trae un'equazione del tipo:

$$(\alpha) \quad [x^{20}, x^{11}, x^{02}; x^{10}, x^{01}, x] = 0$$

sicchè lo spazio 2-osculatore in un punto generico della superficie è uno S_4 (e non S_5).

Ciò fatto rimane da esprimere che è

$$\left| \begin{array}{c} S_4 \\ x^{30} d\tau_1^2 + 2x^{21} d\tau_1 d\tau_2 + x^{12} d\tau_2^2 \end{array} \right| \equiv 0$$

cioè

$$(\beta) \quad \begin{cases} x^{30} = [S_4] \\ x^{21} = [S_4] \\ x^{12} = [S_4] \end{cases}$$

indicando con questa notazione, già usata, che i punti x^{30} , x^{21} , x^{12} stanno nello S_4 2-osculatore in x .

Osserviamo che se la superficie non sta tutta in uno S_4 , caso senza interesse, non possono valere altre equazioni a deriv. parz. terze indipendenti da quelle scritte; in particolare non vi può essere un'equazione che leghi x^{03} ai punti dello S_4 , e le conseguenze differenziali dell'equazione (α) del 2° ordine devono essere conseguenze algebriche delle tre ultime.

Derivando (α) rispetto a τ_2 e sostituendovi le espressioni delle 3 derivate terze date dalle (β) si avrebbe un'equazione in x^{03} se (α) contenesse x^{02} ; poichè ciò non può essere manca x^{02} in (α) ; cioè

$$(\alpha) \quad [x^{20}, x^{11}, x^{10}, x^{01}, x] = 0.$$

Analogamente derivando le (β) e scrivendo le condizioni d'integrabilità si scorge subito che x^{02} manca anche nelle due prime (β) , cioè

$$(\beta) \quad \begin{cases} x^{30} = [x^{20}, x^{11}, x^{10}, x^{01}, x] \\ x^{21} = [x^{20}, x^{11}, x^{10}, x^{01}, x] \\ x^{12} = [S_4]. \end{cases}$$

Se (α) contiene x^{11} , le (β) si scrivono anche

$$(\beta) \quad \begin{cases} x^{30} = [x^{20}, x^{10}, x^{01}, x] \\ x^{21} = [x^{20}, x^{10}, x^{01}, x] \\ x^{12} = [S_4]. \end{cases}$$

e confrontando ancora le due espressioni di x^{11} si ottiene una equazione del 2° ordine che contiene x^{02} se x^{30} contiene x^{01} . Ora se questa non coincide con (α) la superficie sta in S_3 o è sviluppabile; se invece coincide con (α) x^{30} non può contenere x^{01} e si ha

$$x^{30} = [x^{20}, x^{10}, x]$$

cioè le curve date K sono piane, e per la seconda delle (β) , due piani successivi stanno in S_3 (e per la 3ª, tre stanno in S_4).

Se al contrario (α) non contiene x^{11} , si riconosce che non può contenere x^{01} , cioè $x^{20} = [x^{10}, x]$ cioè le K sono rette e tre successive stanno in un S_4 , cioè la superficie è rigata d'indice di sviluppabilità $= 2$: ed è noto ⁷⁾ che le generatrici di una tale rigata si possono considerare tracciate sopra un sistema ∞^1 di piani, di cui due successivi si tagliano in una retta. Enunciamo la conclusione per S_n .

Se una superficie di S_n possiede un sistema di curve K di cui sia indeterminato il sistema coniugato di 2ª specie C , o la superficie sta in S_4 oppure le curve K sono piane (in particolare rette) e due piani infinitamente vicini si tagliano in una retta (cioè o sono osculatori ad una curva, o sono tangenti ad un cono di 1ª specie, o infine passano per una retta fissa).

Ometto di enunciare i risultati, del tutto simili, per il coniugio di specie v .

§ 8.

Sistemi coniugati di specie v sopra una superficie di S_{2v+2} .

Data una superficie di S_{2v+2} e su di essa un sistema ∞^1 di curve C è chiaro che non si può in generale associarvi un sistema di curve K in modo da ottenere un doppio sistema coniugato di specie v .

⁷⁾ Cfr. la mia Nota: *Alcune proprietà*, etc.; già citata in ³⁾.

Infatti, riferendosi per es. al caso $v = 2$, invece dell'equazione-determinante (1), si avrà da annullare una matrice, cioè si hanno due equazioni (in S_6) alle quali non si può più soddisfare assegnando ad arbitrio uno dei due sistemi di curve (cioè i differenziali d o δ). Considerate le due equazioni lineari in $\delta\tau_1/\delta\tau_2$ per la loro compatibilità deve essere (fatto $d^2\tau_1 = 0$):

$$\begin{vmatrix} x & & & & & \\ & x^{10} & & & & \\ & & x^{01} & & & \\ & & & x^{20}d\tau_1 + x^{11}d\tau_2 & & \\ & & & x^{11}d\tau_1 + x^{02}d\tau_2 & & \\ & & & & x^{30}d\tau_1^2 + 2x^{21}d\tau_1d\tau_2 + x^{12}d\tau_2^2 + x^{11}d^2\tau_2 \\ & & & & x^{21}d\tau_1^2 + 2x^{12}d\tau_1d\tau_2 + x^{03}d\tau_2^2 + x^{02}d^2\tau_2 & \end{vmatrix} = 0;$$

cioè le ∞^1 linee C vanno scelte fra le ∞^2 definite da questa equazione. Poichè il coefficiente di $(d^2\tau_2)^2$ è $\equiv 0$, si ha:

Sopra una superficie di S_6 esistono ∞^2 curve C tali che ad ∞^1 di esse scelte come curve $C^{(2)}$ ci può associare un sistema ∞^1 di curve K formanti con le prime un doppio sistema coniugato di 2^a specie ($C^{(2)}$, $K^{(1)}$): una curva C è univocamente determinata da un suo punto e dalla tangente ivi.

Così si prova che non esistono sistemi coniugati di 2^a specie sopra una generica superficie di S_7 . Risultato analogo per $v > 2$.

§ 9.

Caratterizzazione di superficie in base al coniugio.

Invertiamo le proprietà trovate per le superficie di S_5 e di S_6 proponendoci i due problemi seguenti ⁸⁾:

- 1) Determinare le V_2 (di S_n) tali che ad ogni sistema ∞^1 di curve C si possa associare un sistema ∞^1 di curve K formanti con le prime un doppio sistema ($K^{(1)}$, $C^{(2)}$).
- 2) Determinare le V_2 (di S_n) che posseggono ∞^2 curve tali che assunte ∞^1 come

⁸⁾ Il problema analogo per il coniugio di 1^a specie porta al teorema di SEGRE: la superficie sta in S_3 o è sviluppabile (in S_n , $n \geq 3$). Alla caratterizzazione dello spazio ambiente o della natura della superficie partendo da proprietà proiettivo differenziali ho già dedicato altri lavori: *Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo; vol. XLVII (1^o semestre 1914, pp. 177-192)]; *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee* [ibidem; vol. LII (2^o semestre 1919), pp. 610-636]; *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici* [Memorie della R. Accademia dei Lincei (2^o semestre 1921), in corso di stampa].

C esista sempre un sistema ∞^1 di curve K formanti con le prime un doppio sistema $(C^{(2)}, K^{(1)})$.

Troveremo oltre alle superficie di S_5 per 1) e di S_6 per 2) altre classi di superficie che costituiscono una generalizzazione in senso proiettivo ⁹⁾ delle ordinarie sviluppabili (cfr. § 7).

Per il problema 1) dobbiamo esprimere che è possibile soddisfare alle equazioni compendiate in

$$(1') \quad \left\| \begin{array}{c} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{20} d\tau_1 + x^{11} d\tau_2 \\ x^{11} d\tau_1 + x^{02} d\tau_2 \\ (M + x^{11} d^2 \tau_2) \delta \tau_1 + (N + x^{02} d^2 \tau_2) \delta \tau_2 \end{array} \right\| = 0$$

(il cui numero dipende dalla dimensione n dell'ambiente S_n , per ora incognita) qualunque siano le C ; e quindi anche, qualunque siano $d\tau_2/d\tau_1$, $d^2\tau_2/d\tau_1^2$, deve essere identicamente:

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{c} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{20} d\tau_1 + x^{11} d\tau_2 \\ x^{11} d\tau_1 + x^{02} d\tau_2 \\ M + x^{11} d^2 \tau_2 \\ N + x^{02} d^2 \tau_2 \end{array} \right\| = 0.$$

In particolare, osservando il coefficiente di $d^2\tau_2$, deve risultare

$$\left\| \begin{array}{c} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{20} \\ x^{11} \\ x^{02} \\ Md\tau_1 + Nd\tau_2 \end{array} \right\| = 0$$

per qualsiasi valore di $d\tau_2/d\tau_1$.

Se lo spazio 2-osculatore $S(2)$ in un punto generico x (individuato dai punti scritti nelle prime 6 righe della matrice) è uno S_5 (cioè ha dimensione regolare) tenendo presenti le espressioni di M ed N e l'arbitrarietà di $d\tau_2/d\tau_1$ si ricava che tutti i punti derivati terzi (x^{30} , x^{21} , ...) stanno in S_5 ; quindi tutta la superficie sta in S_5 .

⁹⁾ E anche nel senso metrico, per le applicabilità di specie superiore, specificato nella mia Nota: *Problemi nuovi*, etc. [già citato in. ²⁾]; ved. n° 5] da cui ha avuto origine questa ricerca.

Rimane a discutere l'ipotesi opposta: lo $S(2)$ osculatore è un S_4 , o un S_3 [scartando però le superficie di S_4 e di S_3 per le quali si perde la nozione di coniugio di 2^a specie; si può scartare anche il caso $S(2) \equiv S_3$ che porta alle ordinarie sviluppabili]. Quando $S(2) \equiv S_4$ esiste (sulla superficie un doppio sistema coniugato ordinario o un sistema semplice di asintotiche, quindi) una equazione a derivate parziali del 2° ordine (soddisfatta dalle x_i) in forza della quale la penultima condizione (non l'ultima, che è identicamente soddisfatta) dà luogo ad una equazione a derivate parziali lineare ed omogenea del 3° ordine: a questa vanno associate le due equazioni pure del 3° ordine ottenute derivando quella del 2°; le tre equazioni così ottenute sono linearmente indipendenti, come si verifica subito (perchè contengono derivate terze differenti).

Altre equazioni del 3° ordine non possono esistere altrimenti la superficie starebbe in S_4 . Sicchè per le superficie in esame in un punto x generico $S(2) \equiv S_4$ e $S(3) \equiv S_5$. Le uniche superficie di questo tipo sono ¹⁰⁾: le superficie di S_3 (con doppio sistema coniugato ordinario, o con un sistema di asintotiche); le superficie di S_n ($n \geq 5$) con ∞^1 curve piane (eventualmente rette) in ∞^1 piani tali che due infinitamente vicini stanno in uno S_3 . Quindi:

Le superficie tali che ad ogni loro sistema ∞^1 di curve (C) si può associare un sistema ∞^1 di curve (K) formanti con quelle un doppio sistema coniugato di 2^a specie sono:

- 1) le superficie di S_3 ;
- 2) le superficie di S_n ($n \geq 5$) con ∞^1 curve piane (eventualmente rette) in modo che due piani successivi si taglino lungo una retta, cioè situate:
 - α) nei piani osculatori ad una curva;
 - β) nei piani tangenti ad un cono di 1^a specie;
 - γ) in ∞^1 piani per una retta fissa (S_1 -cono).

Passiamo ora a determinare le superficie di S_n (n per ora incognito) contenenti ∞^2 curve C tali che ad ∞^1 di esse si possa sempre associare un sistema ∞^1 di curve K formanti con le prime un doppio sistema ($C^{(2)}, K^{(1)}$).

Seguendo il ragionamento di prima si è ancora condotti a scrivere la (2), ma non si esige che sia identicamente soddisfatta: s'impone soltanto che, qualunque sia $d\tau_2/d\tau_1$, sia possibile ricavare $d^2\tau_2/d\tau_1^2$ (il che è evidentemente possibile in S_6 perchè si ha una sola equazione).

¹⁰⁾ Cfr. *Determinazione delle superficie integrali*, etc. citata in ⁸⁾; § 3, Lemma. Il teorema generale è questo: Se per un punto generico di una V_2 si ha $S(v) \equiv S_\rho$ e $S(v+1) \equiv S_{\rho+1}$ o la V_2 sta in $S_{\rho+1}$ o contiene ∞^1 curve in $S_{\rho-v}$ e due $S_{\rho-v}$ successivi si tagliano in uno $S_{\rho-v-1}$.

Del resto nel caso attuale si ritrova facilmente il risultato scrivendo l'equazione del 2° ordine che rappresenta il doppio sistema coniugato o il sistema semplice di asintotiche, ed esaminando (alcune del-) le condizioni d'integrabilità fra questa e la nuova equazione del 3° ordine.

Delle due ipotesi $S(2) \equiv S_5$ e $S(2) \equiv S_4$ scartiamo subito la seconda perchè, come facilmente si verifica, riconduce sui casi precedenti (i quali naturalmente, imponendo più condizioni di quelle in esame ora, si ripresentano come soluzioni particolari; e vanno scartate).

È dunque \neq o la matrice formata con le coordinate del punto x e dei suoi punti derivati primi e secondi. La condizione di compatibilità delle equazioni precedenti in $d^2 \tau_2$ si scrive

$$\left\| \begin{array}{c} S(2) \\ x^{30} d\tau_1^2 + 2x^{21} d\tau_1 d\tau_2 + x^{12} d\tau_2^2 \\ x^{21} d\tau_1^2 + 2x^{12} d\tau_1 d\tau_2 + x^{03} d\tau_2^2 \end{array} \right\| = 0$$

[ove $S(2)$ sta in luogo della matrice ora accennata]. Scegliamo le linee coordinate (fino ad ora arbitrarie) come quelle di un doppio sistema coniugato di 2^a specie (per ipotesi esistente sulla superficie); varrà un'equazione del tipo

$$x^{21} = [x^{20}, x^{11}, x^{10}, x^{01}, x]$$

in forza della quale la precedente condizione si scrive

$$\left\| \begin{array}{c} S(2) \\ x^{30} d\tau_1^2 + x^{12} d\tau_2^2 \\ 2x^{12} d\tau_1 d\tau_2 + x^{03} d\tau_2^2 \end{array} \right\| = 0.$$

Per l'arbitrarietà di $d\tau_2/d\tau_1$, se ne traggono tre equazioni del tipo

$$[x^{30}, x^{12}, S(2)] = 0$$

$$[x^{30}, x^{03}, S(2)] = 0$$

$$[x^{12}, x^{03}, S(2)] = 0.$$

Queste non sono certo linearmente indipendenti; se lo fossero la superficie starebbe in S_5 , caso già escluso.

Due di esse però devono necessariamente essere indipendenti altrimenti la matrice precedente non riuscirebbe $\equiv 0$.

Sicchè per le nostre superficie $S(2) \equiv S_5$ e $S(3) \equiv S_6$ [mentre $S(4) \equiv S_6$ o S_7]; per il teorema già ricordato in ¹⁰⁾ concludiamo:

Le superficie con ∞^2 curve C tali che ad ∞^1 di esse si possono associare ∞^1 curve K formanti con le prime un doppio sistema coniugato $(C^{(2)}, K^{(1)})$ sono:

1) le superficie di S_6 ;

2) le superficie di S_n ($n \geq 6$) con ∞^1 curve in $\infty^1 S_3$ di cui due successivi si tagliano in un piano, cioè situate;

-
- α) negli $\infty^1 S_3$ osculatori ad una curva;
 β) negli $\infty^1 S_3$ osculatori ad un cono di 1^a specie;
 γ) negli $\infty^1 S_3$ tangenti ad un cono di 2^a specie;
 δ) in $\infty^1 S_3$ per un piano (S_2 -cono).

Roma, novembre 1921.

ENRICO BOMPIANI.
