Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades.

Von

A. Brill in München.

In einer Abhandlung über Combinanten im 5. Bande der Mathematischen Annalen hat Herr Gordan die Theorie dieser Bildungen auf das Studium einer Form mit mehreren Reihen von Veränderlichen zurückgeführt, durch deren In- und Covarianten alle Combinanten eines gegebenen Systems von Formen auf *rationalem* Wege dargestellt werden können. Besteht das System aus p binären Formen $n$ter Ordnung $f_1 f_2 \cdots f_p$, so ist jene Form die p-reihige Determinante, die man aus den f, in p verschiedenen Variabelnreihen geschrieben, bilden kann.

Setzt man die p Variabelnreihen $x_1 y_1, x_2 y_2, \cdots, x_p y_p$ einander gleich, $= x, y$, so erhält man aus dieser Determinante durch einen Grenzübergang die der p ten Differentialquotienten der Formen f nach x, y. Diese binäre Form $p(n-p+1)$ter Ordnung leistet nun in gewissem Sinne dasselbe, wie die Gordan'sche Function. Eine Abzählung zeigt, dass die Anzahl ihrer Coefficienten mit der der Constanten übereinstimmt, die in die Combinanten von f eingehen. Sind also ihre Coefficienten gegenseitig unabhängig, wenn es die der f sind, so kann man diese Form als erzeugende Function der Combinanten des Systems ansehen, *sofern auf rationale Darstellung Verzicht geleistet wird.*

Aber auch abgesehen von ihrem Zusammenhang mit der Theorie der Combinanten besitzt die Form $p(n-p+1)$ter Ordnung merkwürdige Eigenschaften. Ihre Discriminante zerfällt in zwei in den Coefficienten der f rationale Factoren. Sie entsteht aus der allgemeinen binären Form ihrer Ordnung, wenn man eine irrationale Function der Coefficienten adjungirt. Diese Function ist für Formen sechster Ordnung die Wurzel einer Gleichung fünften Grades, von der zugleich die Coefficienten gewisser linearen Transformationsformeln abhängen, vermöge deren die binäre Form sechster Ordnung in zwei canonische Formen von bemerkenswerther Einfachheit übergeführt werden kann.

Ich beginne mit dem Nachweis, dass die in Rede stehende Form ebensoviele unabhängige Constanten als Coefficienten besitzt.

1.

Man kann mit der von Gordan angegebenen Form von p Veränderlichen eine Umgestaltung vornehmen, wodurch sie von den $\frac{1}{2}p(p-1)$ Differenzen der Veränderlichen, die sie als überflüssigen Factor enthält, befreit wird. Von dem homogenen Ausdruck abgehend setze ich:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{10} + a_{11}x + \cdots + a_{1n}x^n, \\ f_2 &= a_{20} + a_{21}x + \cdots + a_{2n}x^n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_p &= a_{p0} + a_{p1}x + \cdots + a_{pn}x^n, \end{aligned}$$

und betrachte die $(n+1)$-reihige Determinante:

$$W(x_1 x_2 \cdots x_p) = \begin{vmatrix} a_{10} & \cdots a_{p0} & X_p & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots a_{p1} & X_{p-1} & X_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots a_{pp} & X_0 & X_1 & \cdots & \vdots \\ a_{1,p+1} & \cdots a_{p,p+1} & 0 & X_0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots a_{pn} & 0 & 0 & & X_0 \end{vmatrix},$$

wo

$$X_p = x_1 x_2 \cdots x_p; \; X_{p-1} = -\Sigma x_1 x_2 \cdots x_{p-1}; \cdots X_1 = (-1)^{p-1} \Sigma x_1; \; X_0 = (-1)^p$$

ist, und $\Sigma x_1 x_2 \cdots x_i$ die Summe der Producte der p Grössen $x_1 \cdots x_p$ zu je i bedeutet. Multiplicirt man diese Determinante mit der folgenden:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots 1 & 0 \cdots 0 \\ x_1 & \cdots x_p & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_1^p & \cdots x_p^p & 0 \cdots 0 \\ x_1^{p+1} & \cdots x_p^{p+1} & 1 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_1^n & \cdots x_p^n & 0 \cdots 1 \end{vmatrix},$$

die in eine $n-p+1$-reihige von dem Werth 1 und eine p-reihige, gleich dem Differenzenproduct der x_i, zerfällt, so erhält man wiederum eine zerfallende Determinante, von der ein Factor gleich Eins, der andere die Gordan'sche Form ist. Dieselbe lässt sich also durch

$W(x_1 x_2 \cdots x_p)$ ersetzen. Die zu untersuchende Form $W(x)$, welche aus dieser hervorgeht, indem man $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = x$ macht, hat genau die Gestalt der oben mit $W(x_1 x_2 \cdots x_p)$ bezeichneten Determinante; nur ist darin:

$$X_p = x^p, \; X_{p-1} = -\binom{p}{1} x^{p-1}, \; X_{p-2} = \binom{p}{2} x^{p-2}, \cdots X_0 = (-1)^p$$

zu setzen, wo $\binom{p}{i}$ in bekannter Bezeichnungsweise die Anzahl der Combinationen von p Elementen zu je i darstellt.

Denkt man sich die Determinante $W(x)$ ausgerechnet und nach Potenzen von x angeordnet, so setzen sich die Coefficienten derselben linear und homogen aus den p-reihigen Determinanten der aus den p ersten Verticalreihen gebildeten Matrix zusammen. Solcher Determinanten giebt es $\binom{n+1}{p}$, zwischen denen jedoch Relationen bestehen müssen, weil man durch Einführung linearer Combinationen der f an Stelle der f die Anzahl der Coefficienten a_{ik} unter diese Zahl herabdrücken kann.

So hat man beispielsweise für $p = 2$, $n = 3$;

$$W(x) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x^2 & 0 \\ b_1 & b_2 & -2x & x^2 \\ c_1 & c_2 & 1 & -2x \\ d_1 & d_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x^4 (cd) + 2x^3 (bd) + x^2 [(bc) + 3(ad)] + 2x(ac) + (ab) = 0,$$

wo die Relation besteht:

$$(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd) = 0.$$

Vermöge der Indicesbezeichnung kommt jeder Determinante der Matrix aus den a_{ik} ein gewisses Gewicht zu, das durch die Summe der hinteren Indices der benutzten Horizontalreihen dargestellt wird. Jede Determinante ist mit derjenigen Potenz von x multiplicirt, deren Exponent um $\frac{1}{2} p(p-1)$ kleiner ist, als ihr Gewicht, und das Gewicht aller mit derselben Potenz multiplicirten Determinanten dasselbe, so dass man also den literalen Theil des Ausdrucks $W(x)$ angeben kann, ohne auf die Determinante zu recurriren. Auch die Zahlencoefficienten bestimmen sich in bekannter Weise direct aus der partiellen Differentialgleichung, der die simultanen Covarianten der f genügen:

$$n \Sigma a_{in} \frac{\partial W}{\partial a_{i,n-1}} + (n-1) \Sigma a_{i,n-1} \frac{\partial W}{\partial a_{i,n-2}} + \cdots = \frac{\partial W}{\partial x},$$

wo sich die Summe Σ, da es sich um Combinanten handelt, auf

$i = 1, 2, \cdots, p$ bezieht, und die Operation Σ also nur den Uebergang von einer Determinante der Matrix zu einer anderen andeutet.

Es ist nun bemerkenswerth, dass die Form $W(x)$ eine „allgemeine“ Form ihrer Ordnung ist, indem die gegenseitige Unabhängigkeit ihrer Coefficienten nachgewiesen werden kann, wenn die der a_{ik} vorausgesetzt wird. Dieser Nachweis ist um so weniger entbehrlich, als bekanntlich gerade bei canonischen Formen die blosse Constantenzählung leicht zu Irrungen führt.

Um hierbei von den Relationen zwischen den einzelnen Determinanten absehen zu können, ist es nützlich, dieselben dadurch identisch zu erfüllen, dass man die Elemente einer beliebigen p-reihigen Determinante der Matrix durch Vertauschung der f mit linearen Combinationen der f, wobei sich bekanntlich die Verhältnisse der Coefficienten einer Combinante nicht ändern, in Zahlen überführt. Man kann dies, sofern die a_{ik} von einander unabhängige Grössen sind, in der Weise ausführen, dass die Elemente der Determinante alle, bis auf die in einer Diagonale befindlichen, in welcher lauter 1 zu stehen kommen, Null werden. Aus den übrig bleibenden $p(n - p + 1)$ Elementen a_{ik} setzen sich dann die Coefficienten der Potenzen von x so zusammen, dass dieselben von einander unabhängig werden. Im Falle $p = n$ ist die Richtigkeit dieser Behauptung einleuchtend. Denn in diesem Falle bleiben nach Ueberführung von p^2 Elementen in Zahlen noch p von einander unabhängige Grössen übrig, die gerade die Coefficienten von p Potenzen geben, während einer den Zahlenwerth 1 hat. Durch einen Schluss von n auf $n + 1$ gelangt man von diesem auf den allgemeinsten Fall.

Es sei für irgend ein n, p bewiesen, dass die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von einander unabhängige Grössen sind. Ich bezeichne die zugehörige Determinante $W(x)$ mit $W_{p,n}$ und denke mir in derselben die Determinante: $\Sigma \pm a_{1,n-p+1} \cdots a_{pn}$ in der angegebenen Weise in 1 übergeführt. Der Uebergang von $W_{p,n}$ zu $W_{p,n+1}$ werde dann so ausgeführt, dass man in W_{pn} die Horizontalreihe:

$$a_{1,n+1}\ a_{2,n+1} \cdots a_{p,n+1}\ 0\ 0 \cdots 0\ X_0$$

unten und die Verticalreihe:

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ X_p \\ X_{p-1} \\ \vdots \end{matrix}$$

rechts anfügt. Dann treten in $W_{p,n+1}$ zunächst alle Glieder auf, die bereits in $W_{p,n}$ vorkamen, multiplicirt mit $X_0 = \pm 1$. Die hinzugekommenen sind lineare homogene Functionen der $a_{i,n+1}$, deren Grad in den $a_{i,k}$ der Determinante $W_{p,n}$ verschieden ist. Diejenigen Terme, welche überhaupt diese älteren a_{ik} nicht mehr enthalten, lassen sich leicht angeben. Es sind diejenigen, deren Coefficienten aus je $p-1$ Horizontalreihen der Determinante, deren Elemente aus 0 und 1 bestehen, und der Reihe der $a_{i,n+1}$ gebildet sind, nämlich:

$$X_p^{n-p+1}(X_p\, a_{1,n+1} - X_{p-1}\, a_{2,n+1} + \cdots \pm X_1\, a_{p,n+1}).$$

Diese Glieder liefern Beiträge zu den Coefficienten der p höchsten Potenzen von $W_{p,n+1}$, die von einander unabhängig sind, nicht verschwinden und auch durch die mit den alten a_{ik} multiplicirten nicht in gegenseitige Abhängigkeit gebracht werden können. Da nun ebensowenig diejenigen Coefficienten der niederen Potenzen in $W_{p,n+1}$, welche schon in $W_{p,n}$ auftraten und nach Voraussetzung von einander unabhängig waren, durch Hinzutreten von Gliedern, welche die $a_{i,n+1}$ enthalten, in gegenseitige oder in Abhängigkeit von denen der höheren Potenzen gebracht werden können, so ist die Zahl der von einander unabhängigen Coefficienten von $W_{p,n+1}$ gleich derjenigen für $W_{p,n} + p$. Für $n = p$ war dieselbe gleich p, also ist sie für $W_{p,n}$, d. h. für $W(x)$, wenn man nun die Transformationsdeterminante als Constante noch hinzuzählt:

$$p(n-p+1)+1.$$

Diese Form besitzt also, von einander unabhängige a_{ik} vorausgesetzt, ebensoviele unabhängige Constanten als ihr Grad beträgt $+1$, und *die Form $W(x)$ kann also als die allgemeine binäre Form ihrer Ordnung angesehen werden.*

Da sich nun für jede Zerlegung einer zusammengesetzten Zahl N in zwei ganzzahlige Factoren eine Zahl n $(n \geqq p)$ und zwei Zahlen, die sich zu $n+1$ ergänzen, so finden lassen, dass

$$N = p(n-p+1)$$

wird, so muss es möglich sein, *jede binäre Form von Nichtprimzahlgrad* auf doppelt so viele Arten, als diese Zahl Zerlegungen zulässt, *auf die Form $W(x)$ zu bringen.* Diese Operation verlangt im Allgemeinen die Auflösung höherer Gleichungen, aus denen die p-gliedrigen Determinanten, die in den Coefficienten von $W(x)$ auftreten, bestimmt werden (ich bezeichne diese Determinanten in der Folge als *Grössen* α, β). In den Fällen $N=4$, $N=6$ sind es Gleichungen vom 2. bez. 5. Grad, von denen unten die Rede sein wird.

Es mag indess gleich hier bemerkt werden, dass *die beiden irgend einer Zerlegung von N entsprechenden Formen* $W(x)$, für welche n einen gewissen Werth, p zwei die Werthe p und $n+1-p$ annimmt, im Wesentlichen *übereinstimmen.*

Wenn man nämlich die Matrix der Coefficienten a_{ik} durch irgend beliebige Elemente b_{ik} zu einer nicht verschwindenden Determinante R von $n+1$ Reihen ergänzt und die Minoren jedes Elementes nimmt, so entspricht jeder p-reihigen Partialdeterminante der a_{ik} eine $(n-p+1)$-reihige des adjungirten Systems, welche nach einem bekannten Satze (Baltzer, Determinanten, 3. Aufl. § 6, 2) bis auf eine Potenz der Determinante R mit der ersteren übereinstimmt. Der Matrix aus den p-reihigen entspricht eine Matrix aus $(n-p+1)$-reihigen Determinanten, die denen der anderen proportional sind, zwischen welchen also dieselben Relationen bestehen, die ebenso nach dem Gewicht geordnet werden können u. s. w. Verwendet man die Elemente dieser Matrix für die Bildung von $n-p+1$ Formen n-ter Ordnung $\varphi_1 \varphi_2 \cdots \cdots \varphi_{n-p+1}$ als Coefficienten, jedoch *unter Beifügung je des betreffenden Binominalcoefficienten*, so sind die Combinanten des Systems der Functionen f zugleich solche der φ. In der That: die oben aufgestellte partielle Differentialgleichung für W kann, wenn man Symmetrie und passend bestimmtes Gewicht der Form voraussetzt, allgemein zur Definition einer simultanen Covariante der f dienen. Sei W eine Combinante, die dieser Gleichung genügt. Führt man statt der a_{ik} die Elemente α_{ik} der Matrix von $n-p+1$ Reihen ein, so wird:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_{ik} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{i,k-1}} = \sum_{i=1}^{i=n-p+1} \alpha_{i,k-1} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}.$$

Die Form, welche hiermit die partielle Differentialgleichung annimmt, ist die bekannte für die simultanen Covarianten eines Systems von Formen φ, deren Coefficienten die mit Binomialcoefficienten behafteten Grössen α_{ik} sind. — Kehrt man den Process, der von den f zu den φ führt, um, so erhält man wieder die f, oder lineare Combinationen der f, die für die Combinantenbildung diesen selbst äquivalent sind. Man hat also den Satz:

Die Combinanten eines Systems von p binären Formen n-ter Ordnung $(n \geqq p)$ sind der Zahl und Form nach identisch mit denen eines Systems von $n-p+1$ Formen derselben Ordnung.

Anmerkung. *Man kann den vorstehenden Satz ohne Weiteres auf ein System von Formen mit beliebig vielen Veränderlichen ausdehnen.* Die Zahl n bedeutet dann nicht mehr die Ordnung, sondern die um Eins vermehrte Anzahl der Terme einer solchen Form. Auch hier setzen sich die Coefficienten der Combinanten des Systems aus Determinanten derjenigen Matrix zusammen, die man aus den Coefficienten der p gegebenen Formen bilden kann. Der Beweis des Satzes wird genau wie oben geführt. An Stelle der einen partiellen Differentialgleichung tritt dann das System der von Aronhold im 62. Bande des Crelle'schen Journals aufgestellten Differentialgleichungen für die simultanen In- und Covarianten zugehörigen Formen u. s. w. Die Formen φ des Systems, das aus dem gegebenen genau auf dem oben eingeschlagenen Wege abgeleitet wird — nur das statt Binomial — Polynomialcoefficienten zur Verwendung kommen — sind, nach einer Bezeichnungsweise des Herrn Rosanes (Crelle's Journal Bd. 76, S. 312) zu den Formen des Systems der f „conjugirt", indem die Summe der Producte entsprechender Coefficienten verschwindet.

2.

Die Form $p(n-p+1)$-ter Ordnung $W(x)$ hat die Eigenschaft, dass ihre Discriminante in zwei in den Grössen α, β (den p-gliedrigen Determinanten aus den Coefficienten der f) *rationale Factoren zerfällt.*

Der erste dieser Factoren, ich werde ihn mit U bezeichnen, ist diejenige rationale ganze Function der α, β, deren Verschwinden aussagt, dass die sämmtlichen n-reihigen Determinanten der folgenden Matrix aus n Vertical- und $n+1$ Horizontalreihen für denselben Werth von x verschwinden:

$$\left\|\begin{array}{cccccc} a_{10} & \cdots a_{p0} & X_{p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{p1} & X_p & X_{p+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,p+1} & a_{p,p+1} & X_0 & X_1 & \cdots & \\ a_{1,p+2} & a_{p,p+2} & 0 & X_0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{pn} & 0 & 0 & \cdots & X_0 \end{array}\right\|$$

wo zur Abkürzung:

$$x^{p+1} = X_{p+1}; \quad -\binom{p+1}{1} x^p = X_p; \quad \cdots (-1)^p \binom{p+1}{1} x = X_1;$$
$$(-1)^{p+1} = X_0$$

gesetzt wurde. Das System der $n+1$ Gleichungen, die dies aussagen, ist bekanntlich zweien Gleichungen äquivalent und zieht also die Erfüllung einer Bedingungsgleichung zwischen den Grössen α, β, $\cdots$ mit sich, deren linke Seite, U, Factor der Discriminante von $W(x)$ ist. In der That, man kann die $(p+1)$te Verticalreihe der Determinante $W(x)$ durch Multiplication mit x und Addition der $(p+2)$ten Columne auf die Form der entsprechenden der obigen Matrix bringen; ebenso die $(p+2)$te durch Combination mit der $(p+3)$ten u. s. f. bis zur letzten, die allein unverändert bleibt. $W(x)$ hat so den Factor x^{n-p} erhalten. Die umgestaltete Determinante verschwindet nun offenbar für jeden Werth von x, für den die Determinanten der Matrix verschwinden; dies gilt auch noch von $W(x)$ selbst.

Aber auch die nach den einzelnen Columnen differenzirte Determinante verschwindet.

Daher ist ein x, für welches dies eintritt, Doppelwurzel von $W(x) = 0$, und U, dessen Verschwinden die Existenz eines solchen Werthes aussagt, liefert einen Factor der Discriminante von W. — Ich unterlasse es, das Verfahren anzugeben, durch welches U von uneigentlichen Factoren befreit wird, und erwähne nur, dass ich den Grad U_{np} von U in den Coefficienten $\alpha, \beta, \cdots$ auf dem Wege der Induction, wie folgt, gefunden habe:

$$U_{np} = (p + 1)(n - p).$$

Der andere Factor der Discriminante von $W(x)$ entspricht in ähnlicher Weise dem gemeinsamen Verschwindungswerth der Determinanten der folgenden Matrix von $(n + 1)$ Horizontal- und $(n + 2)$ Verticalreihen:

$$\left\| \begin{matrix} a_{01} & \cdots & a_{p0} & X_{p-1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{p1} & X_{p-2} & X_{p-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} & 0 & 0 & \cdots & X_0 \end{matrix} \right\|,$$

wo

$$X_{p-1} = x^{p-1}, \quad X_{p-2} = -\binom{p-1}{1} x^{p-2}, \; \cdots, \; X_0 = \pm 1$$

ist.

Der Beweis beruht wiederum auf einer identischen Umformung, die man mit $W(x)$ oder vielmehr mit der eingangs durch $W(x_1 \cdots x_p)$ bezeichneten Determinante vornehmen kann, aus der $W(x)$ durch Gleichsetzen der x hervorgeht. Man kann dieselbe in die folgende $(n + 2)$ gliedrige verwandeln:

$$W(x_1 x_2 \cdots x_p) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & x_p & \cdots & x_p^{n-p+1} \\ a_{10} & \cdots & a_{p0} & X_{p-1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{p1} & X_{p-2} & X_{p-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} & 0 & 0 & \cdots & X_0 \end{vmatrix},$$

wo nun die X_i die symmetrischen Functionen der $p - 1$ Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_{p-1}$ sind, nämlich:

$$X_{p-1} = x_1 x_2 \cdots x_{p-1}; \; X_{p-2} = -\sum x_1 x_2 \cdots x_{p-2}; \; \cdots X_0 = (-1)^{p-1}.$$

Denn multiplicirt man diese Determinante mit der folgenden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_p & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_p & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_p \end{vmatrix},$$

die in zwei Determinanten mit p und $n-p+2$ Reihen zerfällt und den Werth x_p^{n-p+2} besitzt, so erhält man (indem man nach Horizontalreihen combinirt) eine Determinante, die genau in jene $(n-p+1)$-gliedrige und x_p^{n-p+2} zerfällt.

Die Determinante $W(x_1 x_2 \cdots x_p)$ ist eine symmetrische Function der Grössen $x_1 \cdots x_p$ und Combinante der f. Die letztere Eigenschaft besitzen offenbar auch die Coefficienten der Potenzen jeder der Variabeln, z. B. von x_p, also die $n-p+2$ Determinanten der Matrix aus den letzten $n+1$ Zeilen von $W(x_1 \cdots x_p)$, welche mit Potenzen von x_p multiplicirt sind. Von dieser Bemerkung machen wir weiter unten Gebrauch.

Nun verschwindet sowohl der Ausdruck $W(x_1 \cdots x_p)$, wie seine ersten, zweiten etc. Differentialquotienten nach x_p dann, wenn sämmtliche Determinanten der erwähnten Matrix verschwinden. Da ferner für $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = x$:

$$p \cdot \frac{\partial W(x_1 \cdots x_p)}{\partial x_p} = \frac{\partial W(x_1 \cdots x_p)}{\partial x_1} + \frac{\partial W(x_1 \cdots x_p)}{\partial x_2} + \cdots$$
$$+ \frac{\partial W(x_1 \cdots x_p)}{\partial x_p} = \frac{\partial W(x)}{\partial x},$$

so verschwindet, wenn man nun die x einander gleichsetzt, ausser $W(x)$ auch der erste Differentialquotient für jeden Werth x, für den die Determinanten der Matrix verschwinden, w. z. b. w.

Die Bedingung für die Existenz eines solchen x ist wieder das Verschwinden einer ganzen Function der $\alpha, \beta, \cdots$, welche somit Factor der Discriminante von $W(x)$ sein muss.

Auch *für diesen Factor*, den ich mit C bezeichnen will, habe ich den *Grad* C_{np} *in den* $\alpha, \beta, \cdots$ durch Induction bestimmt und:

$$C_{np} = (p-1)(n-p+2)$$

gefunden. Die Grade von C und U zusammen geben den Grad der Discriminante von $W(x)$ in den Determinanten $\alpha, \beta, \cdots$:

$$= 2p(n-p+1) - 2.$$

3.

Die Irrationalitäten $\alpha, \beta, \cdots$, nach deren Adjunction eine binäre Form die Eigenschaften der Form $W(x)$ erhält, hängen von Gleichungen ab, die ich im Folgenden für *Formen vierten und sechsten Grades* aufstellen und für die Letzteren genauer betrachten will.

Den Formen vierter Ordnung entspricht die Annahme $p=2$, $n=3$. Die Gestalt, welche $W(x)$ annimmt, ist in § 1 angegeben. Vergleicht man dieselbe mit der allgemeinen Form vierten Grades:

$$F(x) = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4,$$

so ergiebt sich aus der früher angegebenen identischen Relation zwischen den zweigliedrigen Determinanten eine quadratische Gleichung für die in dem Coefficienten von x^2 auftretende Determinante (ad):

$$3 \cdot (ad)^2 - A_2 \cdot (ad) - A_0 A_4 + \frac{1}{4} A_1 A_3 = 0,$$

deren Discriminante nichts Anderes, als die Invariante zweiten Grades i von $F(x)$ ist. *Die Zerfällung der Discriminante einer Form vierter Ordnung wird also möglich durch Adjunction von $\sqrt{i}$.* — Dies ist aber aus der bekannten Form für die Discriminante:

$$i^3 - 6j^2 = -6\left(j + i\sqrt{\frac{i}{6}}\right)\left(j - i\sqrt{\frac{i}{6}}\right)$$

wo j die Invariante 3. Grades ist, ohne Weiteres ersichtlich. ere Betrachtungen liefern also in diesem Falle nichts Neues.

Die Annahme $p = 2$, $n = 4$ führt auf eine *Form sechster Ordnung.* Auf dieselbe Form wird man aber nach Früherem durch die Annahme: $p = 3$, $n = 4$ geführt. Wir knüpfen an die Letztere an.

Setzt man:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + e_1 x^4 \\ f_2 &= a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 + e_2 x^4 \\ f_3 &= a_3 + b_3 x + c_3 x^2 + d_3 x^3 + e_3 x^4, \end{aligned}$$

so wird:

$$W(x) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x^3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -3x^2 & x^3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 3x & -3x^2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -1 & 3x \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

oder ausgerechnet:

$$\begin{aligned} W(x) = x^6 \alpha_0 + x^5 \cdot 3\alpha_1 + x^4(3\alpha_2 + 6\beta_2) + x^3(\alpha_3 + 8\beta_3) \\ + x^2(3\alpha_4 + 6\beta_4) + x \cdot 3\alpha_5 + \alpha_6, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung:

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = (cde) & \alpha_3 = (bcd) & \beta_2 = (ade) \\ \alpha_1 = (bde) & \alpha_4 = (acd) & \beta_3 = (ace) \\ \alpha_2 = (bce) & \alpha_5 = (abd) & \beta_4 = (abe) \\ & \alpha_6 = (abc) & \end{array}$$

gesetzt ist, und $(cde) = \Sigma \pm c_1 d_2 e_3$ u. s. w. ist. Zwischen den α, β bestehen die Relationen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_1\alpha_4 - \alpha_0\alpha_5 - \beta_2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_5\alpha_2 - \alpha_6\alpha_1 - \beta_4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_0\alpha_6 - \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\beta_3 = 0 \\ \beta_3\alpha_5 - \alpha_4\beta_4 - \beta_2\alpha_6 = 0 \\ \beta_3\alpha_1 - \alpha_2\beta_2 - \beta_4\alpha_0 = 0, \end{cases}$$

von denen drei die Folge der übrigen sind. Sie ergeben sich aus der Bemerkung, dass man z. B. die erste in die Form bringen kann:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & (abd) \\ c_1 & c_2 & c_3 & (acd) \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & (aed) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Factoren U, C der Discriminante $W(x)$ bestimmen sich (§ 2) aus den Matrices:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x^4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -4x^3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & bx^2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -4x \\ e_1 & e_2 & e_3 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x^2 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -2x & x^2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 & -2x & x^2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & 1 & -2x \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Man erhält durch Ausrechnung von zwei Determinanten der ersten Matrix:

$$\begin{aligned} x^4\alpha_3 + 4x^3\alpha_4 + 6x^2\alpha_5 + 4\alpha_6 x &= 0 \\ x^4\alpha_2 + 4x^3\beta_3 + 6x^2\beta_4 - \alpha_6 \quad &= 0. \end{aligned}$$

Dividirt man die Resultante dieser Gleichungen durch α_6^4, so erhält man den *Factor vierten Grades:*

$$U = \begin{vmatrix} 4\alpha_0 & 6\alpha_1 & 4\alpha_2 & \alpha_3 \\ 6\alpha_1 & 4\alpha_2 + 24\beta_2 & \alpha_3 + 16\beta_3 & 4\alpha_4 \\ 4\alpha_2 & 16\beta_3 + \alpha_3 & 4\alpha_4 + 24\beta_4 & 6\alpha_5 \\ \alpha_3 & 4\alpha_4 & 6\alpha_5 & 4\alpha_6 \end{vmatrix}.$$

Der zweiten Matrix entnehmen wir die Determinanten:

$$x^4\alpha_0 + 2x^3\alpha_1 + x^2(3\beta_2 + \alpha_2) + 2x\beta_3 + \beta_4$$
$$x^4\alpha_1 + 2x^3(\alpha_2 + \beta_2) + x^2(4\beta_3 + \alpha_3) + 2x(\alpha_4 + \beta_4) + \alpha_5$$
$$x^4\beta_2 + 2x^3\beta_3 + x^2(3\beta_4 + \alpha_4) + 2x\alpha_5 + \alpha_6.$$

Die Resultante aus irgend zweien ist von demjenigen Factor zu befreien, dessen Verschwinden nicht auch das der dritten Determinante bewirkt; die Resultante aus dem 2. und 3., aus dem 3. und 1., aus dem 1. und 2. Ausdruck bez. von den Factoren:

$$4\beta_2\alpha_0 - \alpha_1^2;\quad 4\beta_2\beta_4 - \beta_3^2;\quad 4\beta_4\alpha_6 - \alpha_5^2.$$

Der Ausdruck C wird dann eine viergliedrige Determinante, *in den* α, β *vom* 6. *Grad*, die ich hier nur für zwei Fälle anführen will:

1. Für $\alpha_1 = \alpha_5 = \beta_2 = \beta_4 = 0$:

$$\alpha_2\,\alpha_4\,C = \alpha_0\,\alpha_6 \cdot \begin{vmatrix} 2\beta_3 & -\alpha_3 & 2\alpha_6 & \alpha_6 \\ \alpha_0\alpha_4 & 2\alpha_2\alpha_2 & 4\beta_3\alpha_4 & 0 \\ 0 & 4\beta_3\alpha_2 & 2\alpha_4\alpha_4 & \alpha_2\alpha_6 \\ \alpha_0 & 2\alpha_0 & -\alpha_3 & 2\beta_3 \end{vmatrix}.$$

2. Für $\beta_2 = \beta_4 = \beta_3 = 0$:

$$C = \begin{vmatrix} 2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) & \alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 & 0 & \alpha_0 \\ \alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 & 2(\alpha_0\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2) & \alpha_1\alpha_4 & 2\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1\alpha_4 & 2\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4 & \alpha_2 \\ \alpha_0 & 2\alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man mit den Coefficienten von $W(x)$ die der allgemeinen Form sechster Ordnung:

$$F(x) = A_0x^6 + A_1x^5 + A_2x^4 + A_3x^3 + A_4x^2 + A_5x + A_6$$

so erhält man:

$$\begin{array}{lll} A_0 = \alpha_0 & A_1 = 3\alpha_1 & A_2 = 3\alpha_2 + 6\beta_2 \\ A_6 = \alpha_6 & A_5 = 3\alpha_5 & A_4 = 3\alpha_4 + 6\beta_4 \end{array}$$
$$A_3 = 8\beta_3 + \alpha_3,$$

woraus sich mit Rücksicht auf die Relationen (1) zwischen den α, β die Beziehungen ergeben:

$$3\alpha_3\alpha_2 + 2A_1\alpha_4 = A_2\alpha_3 + 2A_0A_5$$
$$2A_5\alpha_2 + 3\alpha_3\alpha_4 = A_4\alpha_3 + 2A_6A_1$$
$$8\alpha_2\alpha_4 = A_3\alpha_3 - \alpha_3^2 + 8A_0A_6.$$

Durch Elimination von α_2, α_4 erhält man die folgende Bedingungsgleichung für α_3:

$$8(3\alpha_3^2A_2 + 6\alpha_3A_0A_5 - 2\alpha_3A_1A_4 - 4A_1^2A_6)$$
$$\cdot(3\alpha_3^2A_4 + 6\alpha_3A_6A_1 - 2\alpha_3A_5A_2 - 4A_5^2A_0)$$
$$= (9\alpha_3^2 - 4A_1A_5)^2(A_3\alpha_3 - \alpha_3^2 + 8A_0A_6),$$

die, nach Beseitigung der unbrauchbaren*) Lösung $\alpha_3 = 0$, vom fünften Grade ist. Da sich im Allgemeinen die Grössen $\alpha_2 \beta_2 \alpha_4 \beta_4$ aus α_3 eindeutig bestimmen lassen, so genügt es, eine Wurzel der vorstehenden Gleichung fünften Grades zu adjungiren, um die allgemeine Form sechster Ordnung auf die Form $W(x)$ zu bringen, deren Discriminante zerfällbar ist.

Von solchen Fällen, in denen die Gleichung fünften Grades reducibel wird, hebe ich zwei hervor, die mit den beiden Factoren der Discriminante im Zusammenhang stehen, und ebenso wie diese der Ausdruck eines merkwürdigen Dualismus der Form $W(x)$ sind, der sich auch durch die nachfolgenden Betrachtungen hinzieht.

Wenn ein besonderes Werthsystem der Coefficienten $A_0 \cdots A_6$ der allgemeinen Form $F(x)$ auf die Gleichungen: $\beta_2 = \beta_4 = 0$ für die zugehörige Form $W(x)$ führt, so muss, vermöge der Relationen (1) noch entweder β_3 oder zugleich α_1 und α_5 verschwinden. Wir betrachten beide Fälle.

1. Für $\beta_2 = \beta_4 = \beta_3 \doteq 0$ ergiebt sich aus den Relationen (1):

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 = \alpha_4 : \alpha_5 : \alpha_6,$$

wie auch umgekehrt diese Beziehungen die ersteren mit sich führen. Bestehen also zwischen den Coefficienten einer gegebenen Form 6. Ordnung die Beziehungen:

$$3A_0 : A_1 : A_2 = A_4 : A_5 : 3A_6,$$

so muss die zugehörige Gleichung 5. Grades reducibel werden, denn eine Wurzel wird $\alpha_3 = A_3$. In der That zerfällt dieselbe in die Factoren:

$$(\alpha_3 - A_3)\,(9\alpha_3^2 - 4A_1A_5)^2 = 0,$$

deren erster sogleich auf:

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4; \quad \alpha_2 = \frac{1}{3} A_2; \quad \alpha_4 = \frac{1}{3} A_4$$

führt, während die dem zweiten Factor entsprechenden Werthe von $\beta_2 \beta_4 \alpha_2 \alpha_4$ sich aus einer quadratischen Gleichung bestimmen.

2. Auf den Fall $\beta_2 = \beta_4 = \alpha_1 = \alpha_5 = 0$ wird man durch eine Gleichung geführt, für welche:

$$A_1 = A_5 = 0$$

ist. Die Gleichung 5. Grades wird alsdann:

$$\alpha_3^3(\alpha_3^2 - \alpha_3 A_3 + 8A_2A_4 - 8A_0A_6) = 0.$$

Den drei Wurzeln $\alpha_3 = 0$ entsprechend erhält man für α_2 eine Gleichung dritten Grades, aus deren Wurzeln sich $\beta_2 \beta_4 \beta_3$ eindeutig bestimmen. Dem quadratischen Factor entspricht $\beta_2 = \beta_4 = 0$, während

*) Aus $\alpha_3 = 0$ ergiebt sich vermöge der letzten von den Relationen (1) eine Gleichung zwischen den Coefficienten A, die im Allgemeinen nicht erfüllt ist.

sich $\alpha_2\alpha_4\beta_3$ eindeutig ergeben. In der That können die Grössen $\alpha_1\alpha_5$ nur dann Null werden, wenn entweder α_3 oder zugleich β_2 und β_4 verschwinden.

4.

Mit der Combinante $W(x)$ dreier biquadratischen Formen stehen zwei Gleichungssysteme in enger Beziehung, die ebenso wie $W(x)$ zu den f in invariantem Verhältniss stehen.

Werden die drei Formen:

$$f_i = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 + e_i x^4,$$
$$i = 1, 2, 3$$

linear combinirt zu der Form:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = C(x - x_1)(x - y_1)(x - z_1)(x - w_1),$$

so sind von den Werthen $x_1 \cdots w_1$, für welche die lineare Function verschwindet, im Allgemeinen zwei durch die übrigen bestimmt. Für besondere Werthe $x_1 y_1$ können indess $z_1 w_1$ unbestimmt werden. Es sind dies diejenigen, für welche die fünfreihigen Determinanten der folgenden Matrix zugleich zu Null werden:

$$(\mathrm{D}) \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & xy & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -x-y & xy & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 & -x-y & xy \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & 1 & -x-y \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Unter Einführung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen leitet man hieraus die Gleichungen ab:

$$(\mathrm{D}') \quad \begin{aligned} p^2\alpha_0 + ps\alpha_1 + s^2\beta_2 + p(\alpha_2 - \beta_2) + s\beta_3 + \beta_4 &= 0, \\ p^2\alpha_1 + ps(\alpha_2 + \beta_2) + s^2\beta_3 + p\alpha_3 + s(\alpha_4 + \beta_4) + \alpha_5 &= 0, \\ p^2\beta_2 + ps\beta_3 + s^2\beta_4 + p(\alpha_4 - \beta_4) + s\alpha_5 + \alpha_6 &= 0, \end{aligned}$$

wo

$$p = xy; \qquad s = x + y$$

gesetzt ist. Dieses Gleichungssystem steht sowohl vermöge seiner Herleitung als auch nach Früherem (§ 2.) zu den f im Verhältniss einer Covariante, das heisst, die Gleichungen für ein transformirtes System der f gebildet, lassen sich durch lineare Combination der linken Seiten aus denen des ursprünglichen Systems zusammensetzen. Nun giebt es Werthepaare x, y, welche alle drei Gleichungen zugleich befriedigen. Man erhält die Bestimmungsgleichung für s, indem man aus irgend zweien derselben, z. B. der zweiten und dritten,

p eliminirt, und die Resultante durch die der ersten nicht zukommende Lösung (hierdurch $s\beta_4 + \alpha_5$, wozu $p\beta_4 - \alpha_6$ gehört) dividirt. Aber man erhält die gewünschte Gleichung einfacher durch Elimination von 1, p, p^2 aus allen dreien zugleich:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & s\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_2 & s^2\beta_2 + s\beta_3 + \beta_4 \\ \alpha_1 & s(\alpha_2+\beta_2) + \alpha_3 & s^2\beta_3 + s(\alpha_4+\beta_4) + \alpha_5 \\ \beta_2 & s\beta_3 + \alpha_4 - \beta_4 & s^2\beta_4 + s\alpha_5 + \alpha_6 \end{vmatrix} = 0,$$

während der zugehörige Werth von p sich aus den Minoren dieser Determinante bestimmt.

Es giebt also drei Werthepaare xy, für welche die Verhältnisse der Coefficienten α der linearen Function der f *nicht* bestimmt sind.

Diese drei Werthepaare zeigen nun in vieler Hinsicht ein ähnliches Verhalten, wie diejenigen xy, welche einer Matrix entsprechen, aus der sich, indem man $x = y$ setzt, ebenso der Factor U bestimmt, wie aus der erwähnten der Factor C der Discriminante von $W(x)$.

Es ist die Matrix desjenigen linearen Gleichungssystems, welches ausdrückt, dass von den vier Werthepaaren $x_1y_1z_1w_1$, für die eine lineare Function der f verschwindet, zweimal zwei zusammenfallen:

$$\text{(T)} \qquad \left\Vert \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & x^2y^2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -2xy(x+y) \\ c_1 & c_2 & c_3 & 2(xy+x^2+y^2) \\ d_1 & d_2 & d_3 & 2(x+y) \\ e_1 & e_2 & e_3 & 1 \end{matrix} \right\Vert .$$

Solcher Werthepaare ($x_1 = z_1 = x$, $y_1 = w_1 = y$) giebt es vier. Denn setzt man wieder:

$$xy = p; \qquad x + y = s,$$

so erhalten zwei jener fünf Gleichungen die Form:

$$\text{(T')} \qquad \begin{cases} p^2\alpha_2 + 2ps\beta_3 + (s^2+2p)\beta_4 - \alpha_6 = 0, \\ p^2\alpha_3 + 2ps\alpha_4 + (s^2+2p)\alpha_5 + 2s\alpha_6 = 0, \end{cases}$$

woraus man durch Elimination von p, mit Rücksicht auf die Relationen ((1), § 3.) zwischen den α, β die Gleichung für s ableitet:

$$\text{(T'')} \qquad \begin{aligned} 4\big(\beta_2s^3 + 2\beta_3s^2 + (2\beta_4 + \alpha_4)s + \alpha_5\big)(\alpha_0s + \alpha_1) \\ - (\alpha_1s^2 + 2\alpha_2s + \alpha_3)^2 = 0, \end{aligned}$$

während sich p aus der Gleichung bestimmt:

$$2p(s\alpha_0 + \alpha_1) + s^2\alpha_1 + 2s\alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Ich werde nun zeigen, dass durch Adjunction eines der Werthepaare x, y, für welche sämmtliche Determinanten der Matrix (D) oder

(T) verschwinden (ich will kürzer sagen: welche der Matrix (D) oder (T) „entsprechen"), die Form $W(x)$ in zwei Gestalten von bemerkenswerther Einfachheit übergeführt werden kann.

Ist $x_1 y_1$ ein Werthepaar, welches der Matrix (D) entspricht, und transformirt man mittelst:

$$(1) \qquad x' = \frac{x - x_1}{x - y_1} \cdot \text{const.}$$

die Formen f, wodurch die Determinanten $\alpha_0 \cdots \beta_2 \cdots$ in $\alpha_0' \cdots \beta_2' \cdots$ übergehen mögen, so wird der *transformirten* Matrix (D) ein Werthepaar:

$$x' = 0, \qquad y' = \infty$$

entsprechen. Geht man hiermit, (oder besser, nachdem man statt $y' \cdots \frac{1}{z'}$ gesetzt und mit z'^2 multiplicirt hat, mit $x' = z' = 0$) in die Gleichungen D' ein, so ergiebt sich sogleich:

$$\beta_2' = \beta_3' = \beta_4' = 0.$$

Umgekehrt führen diese Gleichungen auf ein Werthepaar $0, \infty$ und auf:

$$\frac{\alpha_0'}{\alpha_4'} = \frac{\alpha_1'}{\alpha_5'} = \frac{\alpha_2'}{\alpha_6'}.$$

Die Grössen β' lassen sich also durch eine *lineare Transformation von der Form* (1) und nur durch eine solche zum Verschwinden bringen. Bei passender Wahl der Constanten in der Formel (1) reduciren sich ferner die Grössen α_0' und α_4' auf denselben Werth. Durch diese Formel, (deren Coefficienten die Adjunction je einer Wurzel einer Gleichung fünften Grades und einer dritten Grades voraussetzen) lässt sich also $W(x)$ und somit *die allgemeine binäre Form sechster Ordnung, von einem constanten Factor abgesehen, in die Gestalt bringen:*

$$(\mathrm{I}) \qquad x^6 + 2px^5 + 3qx^4 + 4rx^3 + 3x^2 + 2px + q.$$

In gleicher Weise führt die Adjunction eines Werthepaares $x_1 y_1$, das die Determinanten der Matrix (T) zum Verschwinden bringt, auf eine Gleichungsform $W(x)$, für die

$$\beta_2 = \beta_4 = \alpha_1 = \alpha_5 = 0$$

ist. Durch passende Bestimmung der Constanten der linearen Transformation (1) kann man diese Form und somit *die allgemeine binäre Form sechster Ordnung wie oben in die Gestalt**) bringen:

---

*) Auf die canonische Form (II) hat kürzlich Herr K. Stephanos (Comptes rendus, Dec. 1881) aufmerksam gemacht. Seine Untersuchungen beziehen sich, nach dem gegebenen Auszuge zu urtheilen, auf die Bedeutung, welche die Functionaldeterminante von zwei binären Formen vierter Ordnung für die Theorie der Combinanten dieser Formen hat, und sind denen analog, die aus Anlass einer Preisfrage Herr E. Stroh für *drei* Formen derselben Ordnung vorgenommen

$$\text{(II)} \qquad x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + 1,$$

wo ebenso wie in (I) nur die Anzahl 3 der wesentlichen Constanten einer Form sechster Ordnung auftritt.

Die Factoren C und U, in welche die Discriminante der Formen (I) und (II) zerfällt, werden besonders einfach für die Form (I). Setzt man in den Formeln für U und C des § 3.:

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0,$$

$$\alpha_0 = \alpha_4 = 1; \quad \alpha_1 = \alpha_5 = \frac{2}{3}p; \quad \alpha_2 = \alpha_6 = q; \quad \alpha_3 = 4r,$$

so wird:

$$\frac{1}{4^4} U = - D_0 D_1 D_2,$$

wo:

$$\begin{aligned} D_0 &= (p-r)^2 + (q-1)^2, \\ D_1 &= p + r + q + 1, \\ D_2 &= -p - r + q + 1 \end{aligned}$$

ist; ferner:

$$\frac{1}{16} C = r^2 q^2 + rp\left(\frac{8}{27}p^2 - q\right)(q^2+1) + \left(\frac{8}{27}p^2 - q\right)^2 p^2 - \frac{(q^2-1)^2}{12}p^2 + q\frac{(q^2-1)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2q^2}\left[\left(2rq^2 + p(q^2+1)\left(\frac{8}{27}p^2 - q\right)\right)^2 - (q^2-1)^2\left(\frac{4}{9}p^2 - q\right)^3\right].$$

Die Discriminante von (I) *zerfällt also in* 4 *lineare und einen Ausdruck sechsten Grades in den Coefficienten* p, q, r. Es liegt nahe, diesen Umstand zu einer *Discussion der Realitätsverhältnisse der Wurzeln der Form* (I) zu benutzen, wenn die Coefficienten p, q, r reell angenommen werden.

Wenn man nämlich, nach dem Vorgange von Kronecker und Sylvester, die Coefficienten p, q, r als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes im Raum deutet und die Zahlen aufsucht, in die der

---

und im Mai 1881 der allgemeinen Abtheilung der technischen Hochschule zu München eingereicht hat. Da nach dem Satze des § 1. die Combinanten von zwei und drei Formen vierter Ordnung identisch sind, so mussten beide Untersuchungen, wie es sich in der That gezeigt hat, zu denselben Resultaten führen.

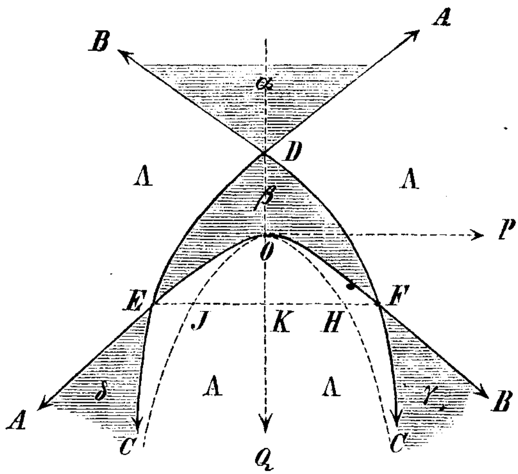
[In den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 1. Mai 1882 ist ein Referat über neuere Untersuchungen des Herrn Stephanos abgedruckt, welche mit den Entwicklungen, wie sie Herr Brill hier im Texte giebt, auf das Engste verwandt sind. Wir glauben daher erklären zu sollen, dass sich das Brill'sche Manuscript bereits in unseren Händen befand, ehe jene Mittheilung in den Comptes Rendus erschien.

Die Red. d. math. Ann.]

Raum durch die Flächen $C=0$, $D_1=0$, $D_2=0$ zerlegt wird, so gehört jedem Punkt eine (oder vielmehr jede linear in diese transformirbare) Gleichung 6. Ordnung zu, deren Wurzeln ihre Realitätsverhältnisse nur beim Uebergang von einer Zelle zur nächsten ändern.

Ich stelle kurz die Eigenschaften zusammen, welche eine Discussion der Fläche $C=0$ ergeben hat.

Ist O der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, sind P, Q, R die Axen, denen parallel die Längen p, q, r aufgetragen werden, so geht die Fläche C durch Drehung um die Axe Q um 180^0 in sich selbst über. Der Schnitt der Ebene PQ mit der Fläche ist eine unicursale Curve 6. Ordnung, die schematisch gezeichnet die beifolgende Form hat



$(OD=OK=1)$,

wo die Zweige A, A; B, B je dieselben Asymptoten haben; die C, C haben eine parabolische Asymptote. Die Fläche erhebt sich über der nebengezeichneten Curve beiläufig in Cylinderform mit gegen die PQ-Ebene geneigten Erzeugenden, welche, in Ebenen parallel zur Ebene PR, ungefähr die Form von unpaaren Zügen einer Curve dritter Ordnung haben. Die räumlichen Partien, die an das Flächenstück γ anschliessen, sind nach oben hin von der Rückkehrkante der Fläche begrenzt, nach unten hin erstrecken sie sich ins Unendliche. Das Gleiche gilt von den an δ angrenzenden Partien, nur oben mit unten vertauscht. Ueber die Rückkehrkante hinweg, deren Projection in die PQ-Ebene die Parabel HOJ ist, communiciren die Raumpartien A mit einander. Man bemerke noch, dass die Fläche C in dem Punkt D der PQ-Ebene von den Ebenen $D_1=0$, $D_2=0$ berührt wird, wo D_1, D_2 die beiden reellen linearen Factoren der Discriminante von (I) sind, ferner, dass jede dieser Ebenen stationäre Schmiegungsebene der Rückkehrkante in dem über H bez. unter J gelegenen Punkte ist, und in diesen Punkten zugleich die in der Ebene $q=1$ gelegene Doppelcurve dritter Ordnung berührt, welche zwischen ihnen isolirt (ausserhalb mit reellen Tangentialebenen) verläuft.

Durch die Fläche $C=0$ wird der Raum in 5 mit einander nicht communicirende Zellen zerlegt, von denen die an schraffirte Partien der PQ-Ebene angrenzenden negativem Vorzeichen von C entsprechen. Wegen der Transformirbarkeit der Fläche in sich kann man sich auf positive Werthe von p beschränken und den Raum δ unberücksichtigt lassen. Die vier Räume α, β, γ, A werden nun durch die Ebenen:

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 0$$

weiter zerlegt. Es sind jedoch im Ganzen nur 10 Zellen zu untersuchen, weil mehrere Möglichkeiten nicht auftreten. Denn aus:

$$\begin{cases} D_1 < 0; \quad D_2 < 0 \quad \text{folgt:} \quad q < -1, \\ D_1 > 0; \quad D_2 > 0 \quad \text{folgt:} \quad q > -1. \end{cases}$$

Ebenso liegen die Räume γ und δ ganz in dem Raum $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, denn sie werden von den Ebenen D_1 und D_2 in den Punkten H, J nur berührt. Für die wirklich vorhandenen Zellen wird nun die Realität der Wurzeln am einfachsten durch passend gewählte Zahlenbeispiele festgestellt, was um so leichter geschieht, als es sich immer nur um die Entscheidung handelt, ob 2 oder 6, ob 0 oder 4 reelle Wurzeln auftreten. Denn das Vorzeichen der Discriminante entscheidet bereits über diese beiden Hauptfälle.

Die Ergebnisse lassen sich in folgender Tabelle vereinigen:

Vorzeichen von: C	D_1	D_2	Zahl der reellen Wurzeln:
$-$	$-$	$-$	... 2
$-$	$+$	$+$	... 2
$-$	$+$	$-$	... 4
$-$	$-$	$+$	... 4
$+$	$-$	$-$	... 4
$+$	$+$	$+$	... 0 oder 4
$+$	$+$	$-$	... 2
$+$	$-$	$+$	... 2 oder 6.

5.

An die linearen Transformationen des vorstehenden Paragraphen knüpft sich noch eine weitere Bemerkung, die auf den Zusammenhang zwischen den Wurzeln jener Gleichung fünften Grades (§ 3) Bezug hat, von der die Reduction einer binären Form 6. Ordnung $F(x)$ auf die Form $W(x)$ abhängt.

Wenn man $F(x)$ in eine Form mit verschwindendem zweiten und vorletztem Glied zu transformiren verlangt, so ist für die zugehörige

Form $W'(x)$ — deren es fünf giebt — wegen der Relationen (1) des § 3 zugleich entweder $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ oder $\alpha_1 = \alpha_5 = \beta_2 = \beta_4 = 0$.

Sei eine Wurzel der Gleichung fünften Grades, vermöge deren $F(x)$ in die Form $W(x)$ übergeführt wird, bekannt. Um nun jene transformirte Form $W'(x)$ zu erhalten, denken wir uns irgend eines der zu $W(x)$ gehörigen Systeme der Functionen $f_1 f_2 f_3$ gefunden (etwa indem man die Elemente einer der Determinanten der a_{ik} in der oben § 1 angegebenen Weise in 0 bez. 1 übergeführt voraussetzt). Nun wenden wir auf die f entweder eine der im vorigen Paragraphen angegebenen vier linearen Transformationen an, durch die eine Form $W'(x)$ mit verschwindenden $\alpha_1\, \alpha_5\, \beta_2\, \beta_4$ erhalten wird, oder eine der sogleich anzugebenden, durch die $\alpha_1\, \alpha_5\, \alpha_3$ zu Null gemacht werden.

Setzt man nämlich in der Gleichung (T″) des vorigen Paragraphen, die aus der Matrix (T) hervorgeht, $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$, so werden zwei Wurzeln der Gleichung für s zu Null, während der zugehörige Werth für p unbestimmt oder vielmehr aus einer quadratischen Gleichung bestimmbar wird. Man erhält also zwei Werthepaare s, p, für die s Null ist, und demnach bilden zwei Werthepaare x, y harmonische Paare zu dem Verschwindungs- und dem Unendlichkeitspunkt von x (wenn man sich diese Grössen den Punkten einer Geraden zugeordnet denkt). Umgekehrt wird eine Wurzel der Gleichung für s Null, wenn:

$$4\alpha_1\alpha_5 - \alpha_3^2 = 0$$

ist. Sollen hierzu aber zwei Werthe von p gehören, so muss, weil p sich aus:

$$2p\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

bestimmt, $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ sein, was wiederum $\alpha_5 = 0$ nach sich zieht.

Man schliesst daraus wie früher, dass die Ueberführung der Form $W(x)$ in eine andere, für die $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ ist, immer und nur durch Adjunction eines Werthepaars möglich wird, das zu zweien der Matrix (T) entsprechenden Paaren harmonisch conjugirt ist. Solcher Paare giebt es sechs; sie sind die Wurzelpaare der Functionaldeterminanten, die man aus je zweien der vier quadratischen Formen bilden kann, deren Wurzelpaare der Matrix (T) entsprechen.

Eine Form $W'(x)$ mit verschwindendem zweiten und vorletzten Term — und also eine binäre Form 6. Ordnung von der gleichen Eigenschaft — lässt sich nach dem Vorstehenden durch lineare Transformation auf zwei wesentlich verschiedene Arten aus einer anderen Form $W(x)$ — und also aus der allgemeinen binären Form 6. Ordnung $F(x)$ — herstellen: 1. Indem man eines der vier der Matrix (T) entsprechenden Werthepaare benutzt. 2. Indem man eines der sechs Werthepaare adjungirt, die zu je zweien dieser Paare harmonisch sind.

Andere lineare Transformationen mit dem Erfolg $A_1 = A_5 = 0$ können nach dem oben Gesagten nicht existiren. Wenn man zu der Form $F(x)$ eine andere als die benutzte Wurzel der Gleichung 5. Grades adjungirt, also durch eine andere Form $W(x)$ hindurch zu der transformirten Form zu gelangen sucht, indem man hierfür eine der ihr entsprechenden 10 Transformationen benutzt, so kann diese nur wieder eine der obigen 10 sein und die transformirte Form nur wieder eine der bereits erhaltenen.

Beim Uebergang also von einer Wurzel der Gleichung fünften Grades zur Anderen geht die Gesammtheit jener 10 *Werthepaare in sich selbst über.* Ob und in welcher Weise dabei eine Vertauschung der Paare unter sich stattfindet, kann entweder ein Beispiel entscheiden, oder besser die Betrachtungen des nächsten Paragraphen über quadratische Formen. Vorgreifend führe ich das Resultat an:

Jene zehn Werthepaare, nämlich die vier Werthepaare, welche der Matrix T entsprechen, und die sechs harmonischen zu je zweien derselben vertauschen sich dabei in der Art, dass eines der ersteren ungeändert bleibt, während die drei anderen sich gegen die drei paarweise harmonischen auswechseln.

Eine neue Seite erhalten diese Beziehungen, wenn man die Forderung, dass vier Werthepaare x, y das einer Matrix (T) entsprechende Lösungssystem bilden, in eine andere elegantere Form bringt.

Die 4-reihigen Determinanten der Matrix (T):

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & x^2y^2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -2xy(x+y) \\ c_1 & c_2 & c_3 & 2(xy+x^2+y^2) \\ d_1 & d_2 & d_3 & -2(x+y) \\ e_1 & e_2 & e_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$

verschwinden (§ 4) immer und im Allgemeinen nur dann, wenn $x\,y$ Wurzeln einer quadratischen Form sind, deren Quadrat als lineare Function der f darstellbar ist. Nimmt man nun von den 4 Werthepaaren x, y, welche jenen Gleichungen genügen, drei in Gestalt von quadratischen Formen $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$, deren Wurzeln sie sind, gegeben an, so müssen die Functionen f lineare Functionen der Quadrate der φ sein, und man kann, da es sich nur um Combinanteneigenschaften handelt, die f direct durch die Quadrate der φ ersetzen. Dem vierten Werthepaar x, y entspricht dann eine quadratische Form φ_4, deren Quadrat als lineare Form von φ_1^2, φ_2^2, φ_3^2 darstellbar sein muss. Da aber andererseits zwischen 4 quadratischen Formen immer eine lineare Relation besteht, so hat man die folgenden Beziehungen, wo $\alpha_1 \cdots \beta_1 \cdots$ Constante sind:

$$\alpha_1\varphi_1^2+\alpha_2\varphi_2^2+\alpha_3\varphi_3^2+\alpha_4\varphi_4^2=0$$
$$\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2+\beta_3\varphi_3+\beta_4\varphi_4=0,$$

aus denen sich umgekehrt φ_4 und die α, β — von Ausnahmefällen abgesehen, die sich im Folgenden ergeben werden — bestimmen lassen müssen.

Jene zwei Gleichungen sind also der hinreichende und nothwendige Ausdruck der Bedingung dafür, dass die Wurzelpaare der φ ein der Matrix (T) entsprechendes Werthsystem darstellen.

Ich werde nun zeigen, wie man von diesen vier Formen φ zu vier anderen gelangt, die einer anderen Wurzel der Gleichung fünften Grades entsprechen.

6.

Das vollständige System der simultanen In- und Covarianten von drei binären quadratischen Formen:

$$\varphi_i(x_1x_2)=a_ix_1^2+2b_ix_1x_2+c_ix_2^2,$$
$$i=1,2,3,$$

besteht bekanntlich aus:

1. Den drei Functionaldeterminanten φ_{23}, φ_{31}, φ_{12}, wo:

$$\varphi_{ik}=-\varphi_{ki}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right);$$

2. Der Combinante:

$$R=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix};$$

3. Den Invarianten D_{11}, D_{22}, D_{33}, wo:

$$D_{ii}=2(a_ic_i-b_i^2).$$

4. Den Invarianten D_{23}, D_{31}, D_{12}, wo:

$$D_{ik}=D_{ki}=a_ic_k+c_ia_k-2b_ib_k$$

ist. Aus den Formen 3. und 4. setzen sich die Resultanten d_{11}, d_{22}, d_{33} von je zweien der φ und drei Invarianten d_{23}, d_{31}, d_{12} zusammen, wo $d_{ik}=d_{ki}$ ist, und:

$$d_{11}=D_{22}D_{33}-D_{23}^2;\quad d_{22}=D_{33}D_{11}-D_{13}^2;\quad d_{33}=D_{11}D_{22}-D_{12}^2;$$
$$d_{23}=D_{21}D_{31}-D_{23}D_{11};\quad d_{31}=D_{32}D_{12}-D_{31}D_{22};$$
$$d_{12}=D_{13}D_{23}-D_{12}D_{33}.$$

Zwischen diesen Formen bestehen zahlreiche identische Relationen, von denen wir die folgenden hervorheben:

$$(1)\quad \begin{cases} R\cdot\varphi_1 = D_{11}\zeta_{23} + D_{21}\zeta_{31} + D_{31}\zeta_{12}; & \text{u. s. w.} \\ 2R\cdot\varphi_{23} = d_{11}\varphi_1 + d_{21}\varphi_2 + d_{31}\varphi_3\,; & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

$$2R^2 = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix};$$

$$(2)\quad 2R^2\cdot D_{11} = d_{22}d_{33} - d_{23}^2;\ \text{u. s. w};\ 2R^2\cdot D_{23} = d_{21}d_{31} - d_{23}d_{11};\ \text{u. s. w.}$$

$$(3)\quad D_{11}d_{12}d_{13} + D_{12}d_{12}d_{23} + D_{13}d_{13}d_{23} = 2R^2\cdot D_{12}D_{13};\ \text{u. s. w.}$$

endlich:

$$(4)\quad 0 = \varphi_1{}^2 d_{11} + \varphi_2{}^2 d_{22} + \varphi_3{}^2 d_{33} + 2\varphi_2\varphi_3 d_{23} + 2\varphi_3\varphi_1 d_{31} + 2\varphi_1\varphi_2 d_{12}$$

$$(5)\quad 0 = \varphi_{23}^2 D_{11} + \cdots + 2\varphi_{13}\varphi_{12}D_{32} + \cdots,$$

wo die analog gebildeten Terme, bez. Gleichungen, weggelassen wurden.

Wenn man die folgende lineare Function der drei Formen, die (bis auf einen constanten Factor) mit φ_4 bezeichnet werde:

$$2R\cdot\varphi_4 = \varphi_1 d_{12}d_{13} + \varphi_2 d_{21}d_{23} + \varphi_3 d_{31}d_{32}$$

quadrirt, und von dieser Gleichung die Identität (4), mit $d_{12}\,d_{23}\,d_{31}$ multiplicirt abzieht, so erhält man:

$$2\varphi_4{}^2 = \varphi_1{}^2 d_{12}d_{13}D_{23} + \varphi_2{}^2 d_{21}d_{23}D_{31} + \varphi_3{}^2 d_{31}d_{32}D_{12}.$$

Man kann dem Ausdruck φ_4 auch die Form geben:

$$\varphi_4 = \varphi_{23}D_{21}D_{31} + \varphi_{31}D_{32}D_{12} + \varphi_{12}D_{13}D_{23},$$

und wird dann ebenso auf die Relation geführt:

$$\varphi_4^2 = \varphi_{23}^2 D_{12}D_{13}d_{23} + \varphi_{31}^2 D_{21}D_{23}d_{31} + \varphi_{12}^2 D_{31}D_{32}d_{12}.$$

Um die Gleichberechtigung der Form φ_4 mit den Formen $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$ besser hervortreten zu lassen, setze ich:

$$\varphi_1\cdot d_{12}d_{13} = \varphi_1';\quad \varphi_2\cdot d_{21}d_{23} = \varphi_2';\quad \varphi_3\cdot d_{31}d_{32} = \varphi_3';$$

Dann wird, indem man die Invarianten etc. der φ' wie die der φ bezeichnet und nur mit einem oberen Index versieht:

$$d_{23}' = d_{31}' = d_{12}' = d_{12}^3\,d_{23}^3\,d_{31}^3.$$

Ich will diesen Ausdruck mit α_4 bezeichnen. Die Combinante R' wird:

$$R' = d_{12}^2\,d_{23}^2\,d_{31}^2\cdot R.$$

Ferner setzen wir:

$$2R\cdot\varphi_4 = -\varphi_4'.$$

Wenn man nun der Einfachheit wegen den oberen Index wieder weglässt, oder vielmehr, wo es nöthig ist, durch einen solchen (4) ersetzt, wenn die betreffende Form simultane Invariante von $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ ist; durch (3) solche von $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_4$ u. s. w., so treten zu den früher angeführten Identitäten (1) $\cdots$ (5), die dann sowohl in dem oberen Index (4) wie in (1) (2) (3) geschrieben bestehn, die folgenden hinzu:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0 \\ d_{23}^{(4)} = d_{31}^{(4)} = d_{12}^{(4)} = \alpha_4 . \end{cases}$$

Hieraus folgt sogleich:

$$D_{1i} + D_{2i} + D_{3i} + D_{4i} = 0; \quad i = 1, \cdots 4;$$

ferner:

$$(7) \qquad \begin{cases} d_{12}^{(3)} = d_{24}^{(3)} = d_{41}^{(3)} = \alpha_3 = d_{33} - \alpha_4 \\ d_{13}^{(2)} = d_{34}^{(2)} = d_{41}^{(3)} = \alpha_2 = d_{22} - \alpha_4 \\ d_{23}^{(1)} = d_{34}^{(1)} = d_{42}^{(1)} = \alpha_1 = d_{11} - \alpha_4 . \end{cases}$$

Wendet man die Operation, die auf die lineare Beziehung zwischen den Quadraten der φ geführt hat, auf die transformirten φ an, so erhält man:

$$(8) \qquad \alpha_1 \varphi_1{}^2 + \alpha_2 \varphi_2{}^2 + \alpha_3 \varphi_3{}^2 + \alpha_4 \varphi_4{}^2 = 0.$$

Das völlig symmetrische Auftreten der Grössen (6) (7): $\alpha_1 \cdots \alpha_4$ in dieser Formel gegenüber $\varphi_1 \cdots \varphi_4$ ist eine Folge der Relationen (6). So oft also diese zwischen vier quadratischen Formen bestehen, existirt eine Relation von der Form (8).

An Stelle der Functionaldeterminanten φ_{ik} der (transformirten) $\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3$ führe ich folgende Formen ein:

$$\psi_1 = \varphi_{23} \cdot \alpha_2 \alpha_3; \quad \psi_2 = \varphi_{31} \cdot \alpha_3 \alpha_1; \quad \psi_3 = \varphi_{12} \cdot \alpha_1 \alpha_2,$$

und setze weiter:

$$\psi_4 = \varphi_4 \cdot R^3.$$

Drückt man das System der Invarianten für diese 4 Formen durch die der φ aus, so ergiebt sich, dass zwischen den ψ und deren Invarianten d_{ik} wieder Relationen von der Form (6) bestehen. Hieraus folgt die Existenz einer Relation von der Form (8), und man hat also:

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 0,$$
$$\beta_1 \psi_1{}^2 + \beta_2 \psi_2{}^2 + \beta_3 \psi_3{}^2 + \beta_4 \psi_4{}^2 = 0.$$

Wegen der Symmetrie der Gleichungen (6)—(8) in Bezug auf die vier Formen φ giebt es aber solcher Gleichungspaare zwischen einem der φ und den Functionaldeterminanten der drei anderen im Ganzen vier; also fünf Gleichungspaare von der Form (8), jedes einem Quadrupel von Formen: $\varphi_1 \cdots \varphi_4$; $\psi_1 \cdots \psi_4$; u. s. w. entsprechend.

In der folgenden Tabelle sind diese 5 Quadrupel, je mit den 6 Functionaldeterminanten, die sich aus ihnen ableiten lassen (unter Weglassung eines constanten Factors) zusammengestellt. Es sind nur die Indices angegeben, also: 1 statt φ_1; 12 statt φ_{12}; (12, 34) statt: Functionaldeterminante aus φ_{12} und φ_{34}:

1, 2, 3, 4	23, 31, 12, 4	12, 24, 41, 3	41, 13, 34, 2	34, 42, 23, 1
23	(31, 12) = 1	(24, 41) = 4	(13, 34) = 3	(42, 23) = 2
31	(12, 23) = 2	(41, 12) = 1	(34, 41) = 4	(23, 34) = 3
12	(23, 31) = 3	(12, 24) = 2	(41, 13) = 1	(34, 42) = 4
14	(23, 4) = 14	(12, 3) = 43	(41, 2) = 32	(34, 1) = 21
24	(31, 4) = 24	(24, 3) = 13	(13, 2) = 42	(42, 1) = 31
34	(12, 4) = 34	(41, 3) = 23	(34, 2) = 12	(23, 1) = 41

In jeder Columne dieser Tabelle treten dieselben 10 Functionen auf. Wendet man den Process der Functionaldeterminantenbildung auf eines der Quadrupel an, die durch denselben aus dem ersten entstanden, so wird man, wie man ohne Mühe erkennt, immer wieder zu einem der 5 Quadrupel der Tabelle geführt. Man vereinigt die vorstehenden Bemerkungen zu dem Satz:

Zu drei quadratischen Formen mit nicht verschwindender Combinante und für welche mindestens zwei von den Invarianten d_{ik} von Null verschieden sind, *lässt sich immer und nur auf eine Weise eine vierte so finden, dass zwischen den Quadraten der vier Formen eine lineare Relation besteht. Ersetzt man irgend drei der Formen durch die drei Functionaldeterminanten aus je zweien, so besteht zwischen den Quadraten dieser und der nicht benutzten Form wiederum eine lineare Relation.* Man erhält so fünf verschiedene Formenquadrupel, welche insofern eine Gruppe bilden, als die Wiederholung des Processes nur immer wieder ein Quadrupel der Gruppe ergiebt. Die Gesammtheit der Operationen besteht aus $24 \cdot 5 = 120$ Substitutionen, indem der eben geschilderte Process mit dem der Permutation von vier Grössen zu verbinden ist.

Am Schlusse des vorigen Paragraphen war gezeigt worden, dass die vier Formen φ zu Wurzeln die vier Werthepaare $x\,y$ besitzen, welche einer Matrix (T) entsprechen. Die Formenquadrupel, zu denen wir von den φ ausgehend gelangt sind, entsprechen wiederum je einer solchen Matrix. Einer Wurzel der Gleichung fünften Grades, vermöge deren man zu der Form $W(x)$ gelangt, entsprechen also vier Formen φ, welche zusammen mit deren Functionaldeterminanten ein System von 10 quadratischen Formen bilden, die nach Früherem in anderer Anordnung den vier anderen Wurzeln der Gleichung fünften Grades zugehören. Da es nun aber gleichgiltig ist, von welcher dieser Wurzeln man ausgeht, so können diese Anordnungen zu Quadrupeln und Sextupeln nur immer solche sein, dass die Functionaldeterminanten der Quadrupel die Formen der Sextupel ergeben. Dies ist nun offenbar bei der oben angeschriebenen Tabelle der Fall, *deren fünf Columnen hiernach den Wurzeln jener Gleichung fünften Grades entsprechen* *müssen.* Da sich leicht einsehen lässt, dass diese Gruppirungen die einzig möglichen sind, welche jener Forderung genügen, so folgt der Satz a. E. des vorigen Paragraphen.

Umgekehrt muss es hiernach auch möglich sein, die Form $W(x)$ durch jedes der fünf Quadrupel der Tabelle in derselben Weise auszudrücken. In Function der (transformirten) Formen φ lässt sich $W(x)$ in der eleganten Gestalt anschreiben:

$$\varphi_2\varphi_3\varphi_4 \cdot D_{11} + \varphi_3\varphi_4\varphi_1 \cdot D_{22} + \varphi_4\varphi_1\varphi_2 \cdot D_{33} + \varphi_1\varphi_2\varphi_3 \cdot D_{44}.$$

Man kann in der That zeigen, dass diese Form bis auf einen constanten Factor mit der in den ψ geschriebenen identisch ist, was ich indess hier unterlasse.

Obige Tabelle enthält 30 Functionaldeterminantenbildungen, die sich durch 10 Formen ausdrücken. Man kann aus den Letzteren im Ganzen $\frac{10\,.\,9}{1\,.\,2} = 45$ solcher Bildungen ableiten. Die 15 oben nicht angeführten lassen sich zu einer Tabelle vereinigen, deren Columnen sich denen der früheren eindeutig zuordnen:

$$\begin{array}{ccccc} (23,\ 14) & (1,\ 14) & (4,\ 43) & (3,\ 32) & (2,\ 21) \\ (31,\ 24) & (2,\ 24) & (1,\ 13) & (4,\ 42) & (3,\ 31) \\ (12,\ 34) & (3,\ 34) & (2,\ 23) & (1,\ 12) & (4,\ 41). \end{array}$$

Um die Bedeutung auch dieser Functionaldeterminanten zu ermitteln, wobei man sich auf die der ersten Columne beschränken kann, drücken wir dieselben durch bekannte Grössen aus. Man findet (wiederum bis auf Constante genau):

$$\begin{aligned} (\varphi_{23},\ \varphi_{14}) &= \varphi_2 + \varphi_3 = 2\delta_1 \sqrt{\delta_{11}} \\ (\varphi_{31},\ \varphi_{24}) &= \varphi_3 + \varphi_1 = 2\delta_2 \sqrt{\delta_{22}} \\ (\varphi_{12},\ \varphi_{34}) &= \varphi_1 + \varphi_2 = 2\delta_3 \sqrt{\delta_{33}}, \end{aligned}$$

wo in der rechts beigefügten Bezeichnung, die wir der Functionaldeterminante geben wollen, der Factor δ_{ii} dieselbe Invariante der δ wie d_{ii} der φ ist. Durch Auflösung nach den φ ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\delta_1 \sqrt{\delta_{11}} + \delta_2 \sqrt{\delta_{22}} + \delta_3 \sqrt{\delta_{33}} \\ \varphi_2 &= \delta_1 \sqrt{\delta_{11}} - \delta_2 \sqrt{\delta_{22}} + \delta_3 \sqrt{\delta_{33}} \\ \varphi_3 &= \delta_1 \sqrt{\delta_{11}} + \delta_2 \sqrt{\delta_{22}} - \delta_3 \sqrt{\delta_{33}}. \end{aligned}$$

Fügt man noch die Beziehung bei:

$$\varphi_4 = -\delta_1 \sqrt{\delta_{11}} - \delta_2 \sqrt{\delta_{22}} - \delta_3 \sqrt{\delta_{33}},$$

und vergleicht diese Ausdrücke mit dem in § 6 meines Aufsatzes über rationale Curven (Math. Annalen Bd. XII) aufgestellten Gleichungssystem, so ergiebt sich — mit Rücksicht auf die geometrische Bedeutung, die man vermöge der dort entwickelten Beziehungen den Werthepaaren beilegen kann, welche den Matrices (T) und (D) entsprechen — dass die Wurzeln der drei quadratischen Formen δ_1 δ_2 δ_3 die Determinanten der in § 4 aufgestellten Matrix D sämmtlich zum Verschwinden bringen. Hieraus folgt weiter durch Vergleichung der beiden obigen Tabellen:

Wenn man die 6 Formen φ_{ik} eines Sextupels, das einer Wurzel der Gleichung 5. Grades entspricht, zu je zweien gruppirt und deren Functionaldeterminante sucht, so sind 12 der so entstehenden $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$ Formen wieder solche des zugehörigen Quadrupels, welchem sich eine Matrix (T) zuordnen lässt. Die 3 übrigen ordnen sich dann in gleicher Weise der zu T gehörigen Matrix (D) zu.

Die hier betrachteten Beziehungen zwischen vier quadratischen Formen sind einer eleganten geometrischen Deutung fähig, die ich zum Gegenstand einer anderen Mittheilung zu machen beabsichtige.

München, im April 1882.