ÜBER EINEN SATZ VON GREEN UND ÜBER DIE DEFINITIONEN VON ROT UND DIV.

Von C. W. Oseen (Upsala).

Adunanza del 14 dicembre 1913.

1. Man verdankt bekanntlich GREEN den folgenden Satz, der in der math. Physik eine hervorragende Bedeutung erlangt hat: wenn φ eine in einem gewissen Bereich Ω zweimal differenzierbare Funktion von x, y, z ist und wenn:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\rho$$

eine in Ω endliche und integrable Funktion von x, y, z ist, dann ist:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_S}\rho\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_S\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right)ds,$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Hier ist S eine geschlossene Fläche in Ω, Ω_S der von S eingeschlossene Raum und x', y', z' ein Punkt in Ω_S. Die Normale wird nach aussen gezogen.

Der GREENsche Satz legt die Frage nahe, welche Bedingungen man der Funktion ρ auferlegen muss, damit eine zweimal differenzierbare Funktion φ existiert, welche der Gleichung:

$$(1) \qquad \Delta\varphi = -\rho$$

genügt. Mit dieser Frage haben sich HÖLDER, MORERA und — mit besonderer Ausdauer — PETRINI [1]) beschäftigt. Die Ergebnisse des letzterwähnten Forschers kann man folgendermassen zusammenfassen. Wir setzen:

$$\xi = x + r\cos\vartheta, \quad \eta = y + r\sin\vartheta\cos\psi, \quad \zeta = z + r\sin\vartheta\sin\psi, \quad \cos\vartheta = u.$$

Wir setzen voraus, dass wenn x, y, z ein Punkt in Ω ist, $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ für genügend kleine r eine stetige Funktion von r ist. Wir bilden:

$$K_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{+1}(3u^2 - 1)\,du\int_h^a \rho\frac{dr}{r},$$

[1]) H. PETRINI, *Les derivées premières et secondes du potentiel* [Acta Mathematica, t. XXXI (1908), pp. 127-332].

wo a eine beliebig kleine, positive Grösse ist und wo $h < a$. Wenn dann $\lim_{h=0} K_h$ existiert und einen endlichen Wert hat, dann besitzt das Integral:

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega}{r},$$

$$\left(d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\right)$$

in dem Punkte x, y, z eine endliche Ableitung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. Für die Existenz der Ableitungen $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ bestehen ähnliche Bedingungen. Wenn nun ausserdem ρ eine stetige Funktion ist, dann befriedigen diese Ableitungen die Gleichung (1).

In einer meiner Abhandlung [2]) und später in einem bei der zweiten skandinavischen Mathematikerkongress in Kopenhagen 1911 gehaltenen Vortrag habe ich die Behauptung aufgestellt, dass die partiellen Differentialgleichungen in der math. Physik ein nicht sinngemässer Ausdruck der physikalischen Tatsachen sind. Wenn ich noch einmal auf diese Frage zurückkomme, so ist der Grund dazu mein Wunsch zu zeigen, wie einfach sich die Theorie des NEWTONschen Potentials darstellen lässt, wenn man die Einführung der Ableitungen zweiter Ordnung vermeidet. Es genügt, um sich davon zu überzeugen, mit den obigen Sätzen den Folgenden zu vergleichen: wenn ρ eine in einem gewissen Bereich Ω endliche und integrable Funktion eines Punktes P ist, so gibt es unendlich viele in Ω stetige und stetig differenzierbare Funktionen φ, welche, für jede geschlossene Fläche S in Ω, der Bedingung:

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn}\, ds = -\int_{\Omega_S} \rho\, d\omega$$

genügen. Man hat dabei, wenn S wieder eine beliebige geschlossene Fläche in Ω ist und wenn P ein Punkt in Ω_S ist:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_S} \rho' \frac{d\omega'}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_S \left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi'}{dn} - \varphi' \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right) ds',$$

$$r = PP', \quad \rho' = \rho(P') \qquad \text{u. s. w.}$$

2. Betreffs der Flächen, welche wir hier zu betrachten haben, setzen wir stets voraus, dass sie in eine endliche Zahl von Teilen zerlegt werden können, welche sich durch Gleichungen von der Form:

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta) \tag{3}$$

definieren lassen, wo $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$ stetige und stetig differenzierbare Funktionen der Argumente sind und wo $|\alpha|$ und $|\beta|$ unterhalb einer endlichen Grenze bleiben. Wenn eine solche Teilfläche eine Grenzkurve besitzt, so soll diese eine in allgemeinen

---

[2]) C. W. OSEEN, *Über die Bedeutung der Integralgleichungen in der Theorie der Bewegung einer reibenden, unzusammendruckbaren Flussigkeit* [Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. VI (1910), No. 23: pp. 1-19].

stetige Tangente und eine endliche Länge haben. Überdies setzen wir voraus, dass man jeder Teilfläche S_i eine solche positive Zahl K_i zuordnen kann, dass:

$$\left[x(\alpha_2, \beta_2) - x(\alpha_1, \beta_1)\right]^2 + \left[y(\alpha_2, \beta_2) - y(\alpha_1, \beta_1)\right]^2 + \left[z(\alpha_2, \beta_2) - z(\alpha_1, \beta_1)\right]^2 > K_i\left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2\right],$$

wenn α_1, β_1 und α_2, β_2 irgend zwei zulässige Wertpaare von α und β sind. Wir bezeichnen eine solche Fläche kurz als eine Fläche S. Jede Fläche S hat einen endlichen Flächeninhalt. Mit Ω_S bezeichnen wir stets den von einer geschlossenen Fläche S begrenzten Raum.

Wir sagen, dass eine Funktion $\rho(P)$ in einem gewissen Bereich Ω integrabel ist, wenn man dem Symbol:

$$\int_{\Omega_S} \rho\, d\omega$$

wo S eine beliebige geschlossene Fläche in Ω ist, in solcher Weise einen bestimmten Wert zuordnen kann, dass die Beziehungen, mittels welcher man nach dem Vorgange von LEBESGUE [3]) den Integralbegriff definieren kann, bestehen. Auf eine Analyse dieser Beziehungen wollen wir uns hier nicht einlassen. Für unseren Zweck genügt es die folgenden Annahmen zu machen:

1. Wenn Ω_1 und Ω_2 zwei Bereiche sind, welche keinen Teil gemeinsam haben, so ist:

$$\int_{\Omega_1} \varphi\, d\omega + \int_{\Omega_2} \varphi\, d\omega = \int_{\Omega_1+\Omega_2} \varphi\, d\omega.$$

2.

$$\int_{\Omega} \varphi_1\, d\omega + \int_{\Omega} \varphi_2\, d\omega = \int_{\Omega} (\varphi_1 + \varphi_2)\, d\omega.$$

3. Wenn $\varphi \geq 0$, so gilt:

$$\int_{\Omega} \varphi\, d\omega \geq 0.$$

4. Wenn Ω ein Würfel ist, so ist:

$$\int_{\Omega} 1 . d\omega = \Omega.$$

5. Wenn $\varphi(P)$ eine in Ω endliche und integrable Funktion ist und wenn $\psi(P)$ eine im selben Bereich stetige Funktion ist, so ist $\psi(P)\varphi(P)$ eine in Ω endliche und integrable Funktion.

Selbstverständlich wollen wir hiermit keineswegs sagen, dass die Annahme 5 von den Annahmen 1-4 unabhängig ist [4]).

---

[3]) H. LEBESGUE, *Sur l'intégration des fonctions discontinues* [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure (Paris), III^e série, tome XXVII (1910), pp. 361-450].

[4]) H. LEBESGUE, l. c. [3]), p. 373.

Wir sagen, dass eine Vektorfunktion integrabel ist, wenn jede Komponente derselben integrabel ist.

Wir betrachten im Folgenden nur eindeutige Funktionen.

Hilfssatz I. — Jeder Fläche S kann man eine solche Zahl K_S zuordnen, dass wenn S' ein beliebiger Teil von S, und R die grösste Entfernung zwischen zwei S' zugehörigen Punkten ist, $S' < K_S R^2$.

Beweis: Die Fläche S besteht aus einer endlichen Zahl — etwa N — von Teilen, $S_1, S_2, \ldots, S_N$, welche durch Gleichungen von der Form (3) definiert werden können. Man kann ebenso S' in — nicht notwendig zusammenhängende — Teile, $S'_1, S'_2, \ldots, S'_N$ zerlegen, wo S'_i ein Teil von S_i ist. Man hat:

$$S'_i = \int\int \sqrt{\sum_{xyz}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2}\, d\alpha\, d\beta.$$

Folglich, wenn auf S_i

$$\sqrt{\sum_{xyz}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2} < M_i,$$

$$S'_i < M_i \int\int d\alpha\, d\beta < \pi M_i \operatorname{Max}\left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2\right]$$

wenn α_1, β_1 und α_2, β_2 zwei Punkte auf S'_i sind. — Nun hat man nach (4), wenn R_i, die grösste Entfernung zwischen zwei Punkten auf S'_i bezeichnet:

$$(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2 < \frac{R_i^2}{K_i}.$$

Folglich:

$$S'_i < \pi R_i^2 \frac{M_i}{K_i}.$$

Ferner:

$$R_i \leqq R.$$

Also:

$$S' = \sum_1^N S'_i < \pi R^2 \sum_1^N \frac{M_i}{K_i}.$$

Hilfssatz II. — Jedes Gebiet Ω_S gestattet eine von einem Parameter p abhängige Zerlegung in N_p Teilgebiete Ω_{S_p}, bei welcher $\lim_{p=\infty} R_p = 0$, $S_p < L_S R_p^2$, $N_p R_p^3 < M_S$ (R_p die grösste Entfernung zwischen zwei demselben Teilgebiet zugehörigen Punkten, L_S und M_S von p unabhängige Konstanten).

Beweis: Man kann Ω_S etwa durch drei zu einander zenkrechte Scharen von parallelen und äquidistanten Ebenen zerlegen. Da für ein rechtwinkliges Parallelipiped:

$$S_p \leqq 2 R_p^2$$

so genügt es, $L_S = K_S + 2$ zu setzen, damit $S_p < L_S R_p^2$ sei. Da ferner, wenn αR_p^3 das Volumen eines innerhalb S gelegenen Parallelipipedes ist;

$$\lim_{p=\infty}\left(N_p R_p^3 - \frac{1}{\alpha}\Omega_S\right) = 0,$$

so ist der Satz bewiesen.

SATZ I. — Wenn $\varphi(P)$ und $\psi(P)$ zwei in einem gewissenen Bereich Ω stetige und stetig differenzierbare Funktionen des Punktes P sind, wenn $\rho(P)$ eine in demselben Bereich endliche und integrable Funktion ist und wenn für jede geschlossene Fläche S in Ω die Beziehung:

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn} dS = -\int_{\Omega_S} \rho\, d\omega$$

besteht, so besteht ebenfalls für jede geschlossene Fläche S in Ω die Beziehung:

$$\int_{\Omega_S} \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad}\psi\, d\omega - \int_S \psi \frac{d\varphi}{dn} ds = \int_{\Omega_S} \psi \rho\, d\omega \quad [5]).$$

Beweis: Wir zerlegen Ω_S auf die in Hilfssatz II angegebene Weise. Ω_{S_p} sei ein beliebiger Teilbereich von Ω_S, O ein Punkt in Ω_{S_p}, ψ_0 der Wert von ψ in O. Wir haben:

$$\int_{S_p} \frac{d\varphi}{dn} ds = -\int_{\Omega_{S_p}} \rho\, d\omega.$$

Hieraus folgt, wie man leicht zeigt:

$$\int_{S_p} \psi_0 \frac{d\varphi}{dn} ds = -\int_{\Omega_{S_p}} \psi_0 \rho\, d\omega$$

oder:

$$(5) \qquad \int_{S_p} \psi \frac{d\varphi}{dn} ds - \int_{S_p} (\psi - \psi_0)\frac{d\varphi}{dn} ds = -\int_{\Omega_{S_p}} \psi\rho\, d\omega + \int_{\Omega_{S_p}} (\psi - \psi_0)\rho\, d\omega.$$

Wir haben ferner, wenn $r_0(P)$ der von O nach P gezogene Vektor ist, $\operatorname{grad}_0 \psi$ die Grad. von ψ im Punkte O und ε_p eine Funktion von P, welche bei abnehmendem r_0 gegen Null konvergiert:

$$\psi - \psi_0 = r_0 \times \operatorname{grad}_0 \psi + \varepsilon_p r_0.$$

Wir haben ausserdem, wenn n ein längs der äusseren Normale gezogener Einheitsvektor ist:

$$\frac{d\varphi}{dn} = n \times \operatorname{grad}\varphi = n \times \operatorname{grad}_0\varphi + n \times (\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad}_0\varphi).$$

Folglich:

$$\int_{S_p} (\psi - \psi_0)\frac{d\varphi}{dn} ds = \int_{S_p} (r_0 \times \operatorname{grad}\psi)(n \times \operatorname{grad}_0\varphi) ds$$
$$+ \int_{S_p} (r_0 \times \operatorname{grad}_0\psi)\big(n \times (\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad}_0\varphi)\big) ds + \int_{S_p} \varepsilon_p r_0 \frac{d\varphi}{dn} ds.$$

Wir betrachten jetzt den Schnitt zwischen unserer S_p und einem Zylinder, dessen Erzeugende dem Vektor $\operatorname{grad}_0 \varphi$ parallel sind. Wir wollen der Einfachkeit wegen an-

---

[5]) Betreffs der Definition des Begriffes grad vergleiche man z. B.: C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Elementi di Calcolo vettoriale, con applicazioni alle derivate rispetto ad un · punto, e alla Fisica-Matematica* (Bologna, Zanichelli, 1909), p. 63.

nehmen, dass der Zylinder aus der S_p zwei und nur zwei Flächenstücke ausschneidet. Wenn wir den Querschnitt, δs, des Zylinders hinreichend klein wählen, so können wir diese Flächenstücke $d s_A$ und $d s_B$ als Flächenelemente auffassen. Wir haben dann ersichtlich:

$$n_A \times \operatorname{grad}_0 \varphi \, d s_A = - n_B \times \operatorname{grad}_0 \varphi \, d s_B = \pm |\operatorname{grad}_0 \varphi| \delta s,$$

wo das obere Vorzeichen zu wählen ist, wenn der Vektor BA dem Vektor $\operatorname{grad}_0 \varphi$ gleichgerichtet ist. Wir haben ferner:

$$r_0(A) - r_0(B) = A - B = \pm \frac{\operatorname{grad}_0 \varphi}{|\operatorname{grad}_0 \varphi|} AB.$$

In dem Integrale:

$$\int (r_0 \times \operatorname{grad}_0 \psi)(n \times \operatorname{grad}_0 \varphi) d s$$

erhalten wir also aus diesen beiden Flächenelementen einen Beitrag:

$$\operatorname{grad}_0 \varphi \times \operatorname{grad}_0 \psi . AB . \delta s.$$

Der Wert des Integrales ist folglich:

$$\operatorname{grad}_0 \varphi \times \operatorname{grad}_0 \psi . \Omega_{S_p}.$$

Wir haben anderseits:

$$\int_{S_p} \left|(r_0 \times \operatorname{grad} \psi)\left(n(\operatorname{grad} \varphi - \operatorname{grad}_0 \varphi)\right)\right| d s < L_S R_p^3 \operatorname*{Max}_{\Omega_{S_p}} |\operatorname{grad}_0 \psi| \, |\operatorname{grad} \varphi - \operatorname{grad}_0 \varphi|,$$

$$\int_{S_p} \left|\varepsilon_p r_0 \frac{d\varphi}{dn}\right| d s < L_S R_p^3 \operatorname*{Max}_{\Omega_{S_p}} |\varepsilon_p| \, |\operatorname{grad} \varphi| \qquad \text{u. s. w.}$$

Wenn wir jetzt alle zu einer bestimmten Zerlegung gehörigen Gleichungen (5) addieren und wenn wir dann den Grenzübergang $p = \infty$ machen, wobei wir zu berücksichtigen haben, dass $N_p R_p^3$ bei wachsendem p endlich bleibt und dass:

$$\lim_{p=\infty} \operatorname{Max} |\operatorname{grad} \varphi - \operatorname{grad}_0 \varphi| = 0$$

u. s. w., so folgt:

$$\int_{\Omega_S} \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi \, d\omega - \int_S \varphi \frac{d\varphi}{dn} d s = \int_{\Omega_S} \psi \rho \, d\omega.$$

SATZ II. — Wenn φ eine in einem gewissen Bereich Ω stetige und stetig differenzierbare Funktion des Punktes P ist und wenn ρ eine in demselben Bereich endliche und integrable Funktion von P ist, wenn endlich für jede geschlossene Fläche S in Ω die Beziehung:

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn} d s = - \int_{\Omega_S} \rho \, d\omega$$

besteht, so besteht ebenfalls für jede geschlossene Fläche S in die Beziehung:

$$\varphi(P') = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_S} \rho \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d s,$$

wo $r = PP'$ und wo P' innerhalb S liegt.

Beweis: In dem Gebiete Ω_S $(r > \varepsilon)$ ist die Funktion $\frac{1}{r}$ eine stetige und stetig differenzierbare Funktion von P. Folglich nach Satz I:

$$\int_{\Omega_{S(r>\varepsilon)}} \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} d\omega - \int_S \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} ds - \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn_i} ds = \int_{\Omega_{S(r>\varepsilon)}} \rho \frac{d\omega}{r}.$$

Durch eine, die Kugel $r = \varepsilon$ schneidende Fläche S' können wir Ω_S $(r > \varepsilon)$ in zwei Teilgebiete, Ω' und Ω'' zerlegen, welche die Eigenschaft haben, dass für jede geschlossene Fläche $\overline{S}$ in Ω' oder Ω'' die Beziehung:

$$\int_{\overline{S}} \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 0$$

besteht. Folglich, wegen I:

$$\int_{\Omega_{\overline{S}}} \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} d\omega - \int_{\overline{S}} \varphi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 0.$$

Wir wenden diesen Satz auf Ω' und Ω'' an und addieren. Es kommt:

$$\int_{\Omega_{S(r>\varepsilon)}} \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\omega - \int_S \varphi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) ds - \int_{r=\varepsilon} \varphi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 0.$$

Folglich:

$$\int_S \left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right) ds + \int_{r=\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn_i} - \varphi \frac{d}{dn_i}\left(\frac{1}{r}\right)\right) ds = - \int_{\Omega_{S(r>\varepsilon)}} \rho \frac{d\omega}{r}.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon = 0$ ergibt den erwünschten Satz.

KOR. Wenn φ eine in einem gewissen Bereich Ω stetige und stetig differenzierbare Funktion von dem Punkte P ist und wenn für jede geschlossene Fläche S in Ω die Beziehung:

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn} ds = 0$$

besteht, so besitzt φ in Ω Ableitungen aller Ordnungen und diese genügen der Gleichung $\Delta \varphi = 0$.

$\rho(P)$ sei eine in Ω endliche und integrable Funktion. Wir betrachten das Integral:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{\rho(P')\, d\omega'}{r} \qquad (r = PP').$$

Betreffs desselben bestehen folgende, wohl bekannte Sätze:

1) φ ist eine im ganzen Raume stetige Funktion von P,

2) φ ist eine im ganzen Raume stetig differenzierbare Funktion von P und man hat:

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \rho(P')\, d\omega' . \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}.$$

P sei ein Punkt auf der Fläche S. Wir konstruieren eine Kugel mit dem Radius l und dem Mittelpunkt P. Wenn P sich auf S bewegt, so erzeugt diese Kugel einen Körper Ω_l.

HILFSSATZ III. — Wenn:

$$\varphi_l(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_l} \frac{\rho(P')\,d\omega'}{r} \qquad (r = PP')$$

und wenn P ein Punkt auf S ist, dann ist:

$$\lim_{l=0} (\operatorname{grad} \varphi_l)_P = 0$$

und die Konvergenz gegen diesen Grenzwert ist auf S gleichmässig.

Beweis: Wir haben:

$$|\operatorname{grad} \varphi_l|_P < \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_l} \frac{|\rho(P')|\,d\omega'}{r^2}$$

folglich, wenn:

$$|\rho| < M:$$

$$|\operatorname{grad} \varphi_l|_P < \frac{M}{4\pi}\int_{\Omega_l (r > l_0)} \frac{d\omega'}{r^2} + \frac{M}{4\pi}\int_{r<l_0} \frac{d\omega}{r^2}$$

$$< \frac{M\Omega_l}{4\pi l_0^2} + M l_0.$$

Wir setzen:

$$l_0 = l^{\frac{1}{3}} l_1^{\frac{2}{3}}.$$

Folglich:

$$|\operatorname{grad} \varphi_l|_P < M l_1 \left(\frac{\Omega_l}{4\pi l l_1^2} + 1\right)\left(\frac{l}{l_1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Da:

$$\lim_{l=0} \frac{\Omega_l}{l} = 2S,$$

so ist der Satz bewiesen.

SATZ III. — Wenn $\rho(P)$ eine in einem Bereich Ω endliche und integrable Funktion ist und wenn:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \frac{\rho(P')\,d\omega'}{r} \qquad (r = PP'),$$

dann besteht, wenn S eine beliebige geschlossene Fläche in Ω ist, die Beziehung:

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn}\,ds = -\int_{\Omega_S} \rho\,d\omega.$$

Beweis: Wir zerlegen Ω in drei Teilgebiete Ω_l, Ω_i und Ω_a wo Ω_i innerhalb S liegt. Wir setzen:

$$\varphi_l(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_l} \frac{\rho(P')\,d\omega'}{r} \qquad \text{u. s. w.}$$

Wir haben:

$$\int_S \frac{d\varphi_i}{dn}\,ds = \frac{1}{4\pi}\int_S ds \int_{\Omega_i} \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\rho(P')\,d\omega'.$$

Folglich, da, wie man leicht zeigt, eine Vertauschung der Integrationsordnung erlaubt ist:

$$\int_S \frac{d\varphi_1}{dn}\, ds = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_1} \rho(P')\, d\omega' \int_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) ds = -\int_{\Omega_1} \rho(P')\, d\omega'.$$

Wir haben ebenso:

$$\int_S \frac{d\varphi_a}{dn}\, ds = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_a} \rho(P')\, d\omega' \int_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 0.$$

Folglich:

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn}\, ds + \int_{\Omega_S} \rho\, d\omega = \int_S \frac{d\varphi_l}{dn}\, ds + \int_{\Omega_S - \Omega_1} \rho\, d\omega.$$

Das Glied rechts konvergiert gegen Null mit l. Folglich:

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn}\, ds = -\int_{\Omega_S} \rho\, d\omega.$$

Satz IV. — Wenn φ eine in Ω_S stetige und stetig differenzierbare Funktion ist; wenn ρ eine in demselben Bereich endliche und integrable Funktion ist; wenn für jede geschlossene Fläche S' in Ω_S die Beziehung:

$$\int_{S'} \frac{d\varphi}{dn}\, ds = -\int_{\Omega_{S'}} \rho\, d\omega$$

besteht und wenn das Integral:

$$\int_{\Omega_S} \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad}\varphi\, d\omega$$

unter allen denjenigen Integralen den kleinsten Wert hat, die man dadurch erhält, dass man för φ eine in Ω_S stetige und stetig differenzierbare Funktion einsetzt, die auf S dieselben Werte wie φ annimmt, so besitzt die Funktion φ in Ω_S stetige Ableitungen aller Ordnungen und diese genügen der Gleichung:

$$\Delta\varphi = 0.$$

Beweis: ψ sei eine in Ω_S stetige und stetig differenzierbare Funktion, die auf S verschwindet. Nach unsrer Annahme haben wir dann für alle α:

$$2\alpha \int_{\Omega_S} \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad}\psi\, d\omega + \alpha^2 \int_{\Omega_S} \operatorname{grad}\psi \times \operatorname{grad}\psi\, d\omega > 0.$$

Folglich:

$$\int_{\Omega_S} \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad}\psi\, d\omega = 0.$$

Folglich wegen I:

$$\int_{\Omega_S} \psi\rho\, d\omega = 0.$$

$x = \pm l$, $y = \pm l$, $z = \pm l$ seien die Seitenebenen eines ganz in Ω_S gelegenen Würfels. Wir setzen ausserhalb des Würfels $\psi = 0$ und innerhalb desselben, wenn

$0 \leqq \xi \leqq \varepsilon$:

$$\psi = \frac{A}{\varepsilon^3}\xi^2(3\varepsilon - 2\xi),$$

$$\xi = \frac{1}{l^6}(l^2 - x^2)(l^2 - y^2)(l^2 - z^2),$$

wenn $\varepsilon \leqq \xi \leqq 1 : \psi = A$. Wir lassen dann ε gegen Null konvergieren. Es folgt:

$$\int_{\Omega_{W}} \rho \, d\omega = 0,$$

folglich:

$$\int_{S_{W}} \frac{d\varphi}{dn} ds = 0.$$

Da diese Beziehung für jeden Würfel in Ω_S gilt, so lassen sich die bei den Beweisen der Sätze I und II angewandten Methoden, zwar nicht auf ein beliebiges $\Omega_{\overline{S}}$, aber stets dann, wenn $\Omega_{\overline{S}}$ ein Würfel ist, anwenden. Die Funktion φ besitzt demnach innerhalb jedes in Ω_S gelegenen Wurfels Ableitungen aller Ordnungen, welche der Gleichung:

$$\Delta \varphi = 0$$

genügen. Damit ist unser Satz bewiesen.

3. Jedem Flächenelement ds einer geschlossenen Fläche S wollen wir einen Vektor $n\,ds = \mathbf{ds}$ zuordnen.

Def. I. Wenn A eine in Ω geklärte Vektorfunktion ist, wenn X eine in demselben Bereich integrable Vektorfunktion ist und wenn für jede geschlossene Fläche S in Ω:

$$\int_{\Omega_S} X \, d\omega = \int_S \mathbf{ds} \wedge A$$

so sagen wir, dass X die Rotation von A ist, $X = \operatorname{rot} A$.

Def. II. Wenn A eine in Ω geklärte Vektorfunktion ist, wenn X eine in demselben Bereich integrable skalare Funktion ist und wenn für jede geschlossene Fläche S in Ω:

$$\int_{\Omega_S} X \, d\omega = \int_S \mathbf{ds} \times A$$

ist, so sagen wir, dass X die Divergenz von A ist, $X = \operatorname{div} A$.

$\operatorname{rot} A$ und $\operatorname{div} A$ sind nach diesen Definitionen durch die Vektorfunktion A, bis auf eine Funktion, welche, über einen beliebigen Bereich integriert, das Ergebnis Null ergibt, eindeutig bestimmt.

Für stetige $\operatorname{rot} A$ und $\operatorname{div} A$ stimmen unsere Definitionen mit denjenigen von Maxwell überein.

Satz V. — Wenn A und B in Ω stetige Vektorfunktionen sind, welche endliche Rotationen und endliche Divergenzen besitzen, und wenn:

$$|B(P) - B(Q)| < K.PQ,$$

wo P und Q beliebige Punkte in Ω sind und wo K von P und Q unabhängig ist, so besteht für jede geschlossene Fläche S in Ω die Beziehung:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{\Omega_S}(B \wedge \operatorname{rot} A + A \wedge \operatorname{rot} B - B \operatorname{div} A - A \operatorname{div} B)\,d\omega\\ &\qquad + \int_S A \wedge (B \wedge ds) + \int_S (ds \times B)A = 0\end{aligned}\right. \text{[6]}.$$

Beweis: Wir zerlegen Ω_S auf die in Hilfssatz 2 angegebene Weise in N_p Teilgebiete. Ω_{S_p} sei ein Teilbereich von Ω_S, O ein Punkt in Ω_{S_p}. Wir haben:

$$\int_{\Omega_{S_p}} B_0 \wedge \operatorname{rot} A\,d\omega = \int_{S_p} B_0 \wedge (ds \wedge A).$$

Folglich:

$$\int_{\Omega_{S_p}} B \wedge \operatorname{rot} A\,d\omega - \int_{\Omega_{S_p}} (B - B_0) \wedge \operatorname{rot} A\,d\omega$$

$$= -\int_{S_p} [(B \times ds)A - ((B - B_0) \times ds)A - (B_0 \times (A - A_0))\,ds - (A_0 \times B_0)\,ds].$$

Man hat:

$$\int_{S_p} (A_0 \times B_0)\,ds = 0.$$

Ferner:

$$\int_{S_p} ((B - B_0) \times ds)A = A_0 \int_{S_p} (B - B_0) \times ds + \int_{S_p} ((B - B_0) \times ds)(A - A_0)$$

$$= A_0 \int_{\Omega_{S_p}} \operatorname{div} B\,d\omega + \int_{S_p} ((B - B_0) \times ds)(A - A_0)$$

$$= \int_{\Omega_{S_p}} A \operatorname{div} B\,d\omega + \int_{S_p} ((B - B_0) \times ds)(A - A_0) - \int_{S_p} (A - A_0) \operatorname{div} B\,d\omega.$$

Folglich:

$$\int_{\Omega_{S_p}} (B \wedge \operatorname{rot} A - A \operatorname{div} B)\,d\omega + \int_{S_p} (B \times ds)A$$

$$= \int_{\Omega_{S_p}} [(B - B_0) \wedge \operatorname{rot} A - (A - A_0) \operatorname{div} B]\,d\omega$$

$$+ \int_{S_p} (B_0 \times (A - A_0))\,ds + \int_{S_p} ((B - B_0) \times ds)(A - A_0).$$

Andrerseits:

$$\int_{\Omega_{S_p}} (A \wedge \operatorname{rot} B - B \operatorname{div} A)\,d\omega + \int_{S_p} A \wedge (B \wedge ds)$$

$$= \int_{\Omega_{S_p}} [(A - A_0) \wedge \operatorname{rot} B + (B - B_0) \operatorname{div} A]\,d\omega$$

$$+ \int_{S_p} ((A - A_0) \times ds)(B - B_0) - \int_{S_p} ((A - A_0) \times B)\,ds.$$

[6] Man vergleiche hierzu: C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale: I. Transformations linéaires* (Pavie, Mattei & C., 1912), pp. 110-111.

Folglich:

$$\left|\int_{\Omega_{S_p}} (B \wedge \operatorname{rot} A + A \wedge \operatorname{rot} B - B \operatorname{div} A - A \operatorname{div} B)\, d\omega \right.$$
$$\left. + \int_{S_p} A \wedge (B \wedge ds) + \int_{S_p} (B \times ds) A \right|$$
$$< \Omega_{S_p}[\operatorname{Max}|B - B_0|\,|\operatorname{rot} A| + \operatorname{Max}|A - A_0|\,|\operatorname{rot} B|$$
$$+ \operatorname{Max}|B - B_0|\,|\operatorname{div} A| + \operatorname{Max}|A - A_0|\,|\operatorname{div} B|]$$
$$+ 3 K L_S R_p^3 \operatorname{Max}|A - A_0|.$$

Folglich:

$$\left|\int_{\Omega_S} (B \wedge \operatorname{rot} A + A \wedge \operatorname{rot} B - B \operatorname{div} A - A \operatorname{div} B)\, d\omega \right.$$
$$\left. + \int_S A \wedge (B \wedge ds) + \int_S (B \times ds) A \right| < \varepsilon_p \Omega_S$$
$$+ 3 K L_S R_p^3 \operatorname{Max}|A - A_0|,$$

wo $\lim\limits_{p=\infty} \varepsilon_p = 0$ ist. Da $N_p R_p^3$ bei wachsendem p unterhalb einer endlichen Grenze bleibt und da:

$$\lim_{p=\infty} \operatorname{Max}|A - A_0| = 0$$

so ist unser Satz bewiesen.

Satz VI. — Wenn A eine in Ω stetige Vektorfunktion ist, welche eine endliche Rotation und eine endliche Divergenz besitzt, so besteht, wenn S eine beliebige geschlossene Fläche in Ω ist, die Beziehung:

$$A(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_S} \operatorname{grad}_{P'} \frac{1}{r} \operatorname{div} A(P')\, d\omega' + \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_S} \operatorname{rot} A(P') \wedge \operatorname{grad}_{P'} \frac{1}{r}\, d\omega'$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int_S \operatorname{grad}_{P'} \frac{1}{r} \big(A(P') \times ds'\big) - \frac{1}{4\pi}\int_S \operatorname{grad}_{P'} \frac{1}{r} \wedge \big(A(P') \wedge ds'\big) \quad (r = PP')$$

vorausgesetzt, dass P innerhalb S liegt.

Zum Beweise setzt man in Formel (7) $B = \operatorname{grad}_{P'} \frac{1}{r}$ und verfährt übrigens ganz in derselben Weise wie bei dem Beweise des Satzes II.

Satz VII. — Wenn $D(P)$ eine in Ω endliche und integrable skalare Funktion ist und wenn $R(P)$ eine in demselben Bereich endliche und integrable Vektorfunktion ist, dann ist:

$$A(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \operatorname{grad}_{P'} \frac{1}{r} D(P')\, d\omega' - \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \operatorname{grad}_{P'} \frac{1}{r} \wedge R(P')\, d\omega',$$

wo $r = PP'$ ist, eine in Ω stetige Vektorfunktion, welche dort die Rotation R und die Divergenz D besitzt.

Der Beweis wird ganz wie der Beweis des Satzes III geführt, in dem man sich auf die leicht zu beweisende Tatsache stützt, dass wenn S' eine beliebige geschlossene

Fläche in Ω ist:

$$\int_{S'} \operatorname{grad}_{P'} \frac{1}{r} \wedge ds = 0.$$

Wenn D und R stetige Funktionen sind, welche nicht den PETRINI'schen Bedingungen genügen, so besitzt $A(P)$ nach MAXWELL, aber nicht nach den von den neueren Autoren [7]) gegebenen Definitionen eine Div. und eine Rot. Wenn D und R endliche, nicht stetige, aber integrable Funktionen sind, so besitzt $A(P)$ nach unseren Definitionen, aber nicht nach MAXWELL eine Div. und eine Rot. — In den Anwendungen kommen vielfach Fälle vor, wo D und R Unstetigkeiten aufweisen.

Upsala, November 1913.

C. W. OSEEN.

---

7) Z. B. ABRAHAM-FÖPPL, BURALI-FORTI-MARCOLONGO, u. a.