

Die irreducibeln Syzyganten zweier simultanen cubischen Formen.

Von

Frhr. v. GALL in Oppenheim.

§ 1.

Die Grundformen zweier cubischen binären Formen α_x^3 und α_x^3 .

Das volle System zweier cubischen Formen besteht aus folgenden Grundformen

$$1) \quad \begin{array}{ccccc} A = (\Delta\Delta)^2; & B = (\nabla\nabla)^2; & C = (\Delta\nabla)^2; & D = (\Delta\Theta)^2; & E = (\nabla\Theta)^2; \\ (400) & (040) & (220) & (310) & (130) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} J = (f\varphi)^3; & \omega = \frac{(p\pi)}{2}; \\ (110) & (330) \end{array}$$

$$2) \quad \begin{array}{ccccc} p = (\alpha\Delta)^2; & \pi = (a\nabla)^2; & s = (\Delta p); & t = (\Delta\pi); & \sigma = (\nabla p); \\ (211) & (121) & (411) & (321) & (231) \\ \tau = (\nabla\pi); \\ (141) \end{array}$$

$$3) \quad \begin{array}{ccccc} \Delta = (ab)^2; & \nabla = (\alpha\beta)^2; & \Theta = (a\alpha)^2; & \lambda = (ap); & \mu = (\alpha\pi); \\ (202) & (022) & (112) & (312) & (132) \\ \nu = (a\pi) = -(\alpha p) = -(\Delta\nabla); \\ (222) \end{array}$$

$$4) \quad \begin{array}{ccccc} f = a_x^3; & \varphi = \alpha_x^3; & Q = (a\Delta); & K = (\alpha\nabla); & \xi = (a\nabla); & \xi = (\alpha\Delta); \\ (103) & (013) & (303) & (033) & (123) & (213) \end{array}$$

$$5) \quad \begin{array}{c} \vartheta = (a\alpha). \\ (114) \end{array}$$

Hierbei bezeichnen wir mit (ikl) eine Form l^{ter} Ordnung und vom Grade i, k von f und φ . Zwischen diesen 26 Formen bestehen im allgemeinen unendlich viele Beziehungen. Die meisten von diesen werden aber *zusammengesetzt* sein. Wir verstehen unter „Zusammen-

gesetzter Syzygante“ eine solche, die entweder eine „einfach theilbare Grundsyzygante“, d. h. eine durch eine Potenz oder ein Product der Grundformen theilbare ist — oder als eine lineare Function einfach theilbarer Syzyganten erscheint. (Vergl. in Bezug auf diese Definition die Abhandlung Hammonds über die Syzygies of the Binary Sextic: American Journal. Vol. VII, pag. 2). Bis jetzt sind die einfachen oder *Grundsyzyganten* der binären Formen α_x^5 und α_x^6 , sowie des simultanen Systems (α_x^3, α_x^2) und zwar von Herrn Hammond im American Journal untersucht; und es hat sich herausgestellt, dass keine Grundsyzygante bei diesen gefunden wurde, die nicht eine binäre Combination der Grundformen unter ihren Gliedern enthält. Alle von Herrn Cayley früher für Grundsyzyganten gehaltenen Relationen, die solche Terme nicht enthalten, sind nun als zusammengesetzt erwiesen worden. Während aber zweifellos alle Syzyganten mit einem Gliede $G_i G_k$ Grundsyzyganten sind, so kann man umgekehrt doch mit Herrn Hammond (Siehe dessen Abh. On Perpetuants. Vol. VIII des Am. Jour. pag. 126) den Satz:

„Every irreducible syzygy must contain among its terms at least one binary combination of the groundforms.“

als wahr, wenn auch noch nicht erwiesen ansehen.

Nachfolgend wurden alle Relationen zwischen den 26 Grundformen aufgestellt, die durch *eine* solche binäre Combination zweier Grundformen bestimmt und charakterisirt sind. Die $\frac{26 \cdot 27}{1 \cdot 2}$ möglichen binären Combinationen derselben entsprechen ungefähr zur Hälfte wirklich einer irreduciblen Syzygante. Zu den übrigen Combinationen gelang es mir nicht eine zugehörige Syzygante zu finden. Die allgemeine Gültigkeit des oben genannten Satzes vorausgesetzt, wäre daher hiermit das System der Grundsyzyganten abgeschlossen.

Ich will nicht versäumen, zum Schlusse zu bemerken, dass es nach Sylvester und Hammond auch mehrfach zusammengetzte Syzyganten giebt. Nennen wir die oben definirten, zusammengesetzte Syzyganten 2. Grades, so sind z. B. *zusammengesetzte Syzyganten* 3. Grades lineare Functionen der einfach theilbaren Syzyganten 2. Grades u. s. w.

§ 2.

Gegenbilder und der δ und ∂ Process.

Vertauschen wir f mit φ , so gehen je 2 der 26 Grundformen in einander über und zwar:

$$\text{in} \quad \left. \begin{array}{cccccccccccccccc} A & C & D & J & \omega & p & s & t & \Delta & \Theta & \lambda & & \nu \\ B & C & E & -J & -\omega & \pi & \tau & \sigma & \nabla & \Theta & \mu & - & \nu \end{array} \right\}$$

$$\text{in} \quad \left. \begin{array}{cccc} f & Q & \xi & \vartheta \\ \varphi & K & \xi & -\vartheta \end{array} \right\}.$$

Grosse Dienste leisten bei der Untersuchung dieses simultanen Systems die beiden Prozesse:

$$\partial \Psi = \sum a_i \frac{\partial \Psi}{\partial a_i} \quad \text{und} \quad \delta \Psi = \sum \alpha_i \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i}$$

zur Bildung neuer Relationen. Leicht findet man die Gleichungen

$$\begin{array}{llll} \partial f = 0, & \partial K = 3\xi - J\varphi, & \partial A = 0, & \partial p = 0, \\ \partial \varphi = f, & \partial Q = 0, & \partial B = 4E, & \partial \pi = -p, \\ \partial \Delta = 0, & \partial \xi = Q, & \partial C = 2D, & \partial \tau = -J\pi - 3\sigma, \\ \partial \nabla = 2\Theta, & \partial \xi = 2\xi + Jf, & \partial E = 3C - J^2, & \partial \sigma = +Jp - 2t, \\ \partial \mu = 2\nu, & \partial \vartheta = 0, & \partial D = A, & \partial t = -s, \\ \partial \lambda = 0, & & \partial J = 0, & \partial s = 0 \\ \partial \nu = -\lambda, & & \partial \omega = 0, & \\ \partial \Theta = \Delta, & & \partial G = 2D, & \end{array}$$

und entsprechende Formeln für δG z. B. $\delta s = Jp - 3t$ u. s. w.

§ 3.

Relationen und Reductionen von Ueberschiebungen.

Lassen wir jede Beziehung aus, wenn sie einfach durch Vertauschung von f mit φ in eine der folgenden übergeht, so genügen zur Aufstellung der Syzyganten unseres simultanen Systems die unten gegebenen Identitäten:

$$\begin{array}{l} \text{A) } p^2 = A\nabla - 2D\Theta + (C - J^2)\Delta + J\lambda, \\ \quad -p\pi = D\nabla - 2\Theta C + E\Delta - J\nu, \\ \quad (f\Theta)^2 = -\frac{1}{2}p; (\vartheta p) = \frac{1}{2}(\Delta\pi + \Theta p), \\ \quad (fp^2)^2 = A\pi + Dp + Js; (\varphi p^2) = -(f, p\pi)^2 = D\pi + Cp - Jt, \\ \quad (\Theta\Theta')^2 = G = C - \frac{J^2}{2}; \\ \\ \text{B) } (sp) = 2U_{33}; (tp) = U_{23}; (\sigma p) = \frac{1}{2}U_{22}; (\tau p) = U_{12}, \\ \quad (st) = A\omega; (s\sigma) = -2\omega D - JU_{23}; (s\tau) = 3\omega C - \frac{1}{2}JU_{22}, \\ \quad (t\sigma) = \omega C - \frac{1}{2}JU_{22}; \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{C)} \quad (p\Delta) &= -s; \quad (p\nabla) = -\sigma; \quad (s\Delta) = \frac{1}{2}Ap; \quad (s\nabla) = D\pi + \frac{3}{2}Cp - Jt; \\ (t\Delta) &= \frac{1}{2}A\pi; \quad (t\nabla) = -Ep - \frac{1}{2}C\pi - J\sigma; \quad (\Theta p) = \frac{1}{2}Jp - t; \\ (s\Theta) &= \frac{1}{2}(A\pi + 2Dp + Js); \quad (t\Theta) = \frac{1}{2}(-Cp + Jt); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D)} \quad (\Theta\Delta) &= -\frac{1}{2}\lambda; \quad (\lambda\Delta) = A\Theta - D\Delta; \quad (\lambda\nabla) = C\Theta - E\Delta; \\ &\quad (\lambda\Theta) = D\Theta - G\Delta, \\ (\Theta\Delta)^2 &= D; \quad (\lambda\Delta)^2 = \emptyset; \quad (\lambda\nabla)^2 = -2\omega; \quad (\lambda\Theta)^2 = \emptyset; \\ (\nu\Delta) &= \frac{1}{2}(C\Delta - A\nabla); \quad (\nu\Theta) = \frac{1}{2}(E\Delta - D\nabla); \\ (\nu\Delta)^2 &= \emptyset; \quad (\nu\Theta)^2 = -\omega; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E)} \quad (f\Delta)_1 &= Q; \quad (f\nabla)_1 = \xi; \quad (f\Theta)_1 = \xi + \frac{1}{2}Jf; \quad (fQ)_1 = -\frac{1}{2}\Delta^2; \\ &\quad (fk)_1 = \frac{1}{2}(\varphi\pi - \nabla\Theta); \\ (f\Delta)_2 &= \emptyset; \quad (f\nabla)_2 = \pi; \quad (f\Theta)_2 = -\frac{1}{2}p; \quad (fQ)_2 = \emptyset; \\ &\quad (fk)_2 = -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}J\nabla; \\ (fQ)_3 &= A; \quad (fk)_3 = E; \\ (q\Delta)_1 &= -\frac{1}{2}Af; \quad (q\nabla)_1 = \frac{1}{2}\Delta\pi - \frac{1}{2}Cf; \quad (q\Theta)_1 = -\frac{1}{4}p\Delta - \frac{1}{2}Df; \\ (q\Delta)_2 &= \emptyset; \quad (q\nabla)_2 = -t; \quad (q\Theta)_2 = \frac{1}{2}s; \\ (\xi\Delta)_1 &= \frac{1}{6}\pi\Delta - \frac{1}{2}Cf; \quad (\xi\nabla)_1 = \frac{2}{3}\pi\nabla - \frac{1}{2}Bf; \\ (\xi\Delta)_2 &= \frac{2}{3}t; \quad (\xi\nabla)_2 = -\frac{1}{3}\tau; \\ (\xi\Theta)_1 &= \frac{1}{6}\pi\Theta - \frac{1}{4}p\nabla - \frac{1}{2}Ef; \\ (\xi\Theta)_2 &= -\frac{1}{6}\sigma - \frac{1}{3}J\pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{F)} \quad (ap) &= \lambda; \quad (Qp) = A\Theta - D\Delta; \quad (\xi p) = C\Theta - E\Delta - \frac{1}{3}p\pi; \\ (\alpha p) &= -\nu; \quad (kp) = \frac{1}{2}(C\nabla - B\Delta); \quad (\xi p) = \frac{1}{2}[A\nabla - C\Delta] - \frac{1}{3}p^2. \end{aligned}$$

Ferner verstehen wir nachfolgend stets unter $[(ab)c] = 0$ die bekannte Identität

$$(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x = 0.$$

§ 4.

Aufstellung der Syzyganten.

I. Syzyganten ($ik0$).

$$(660): \quad 2\omega^2 - \begin{vmatrix} A & D & C \\ D & G & E \\ C & E & B \end{vmatrix} = 0.$$

Die Unterdeterminanten der vorstehenden dreigliedrigen Determinante bezeichnen wir mit U_{ik} ; dann ist

$$(440): \quad 4\omega \cdot J - U_{22} - 4U_{13} = 0.$$

II. Syzyganten ($ik1$).

Aus der Identität

$$((\Delta \nabla) \tau_x) \cdot (\Delta \nabla) = 0$$

oder

$$C\tau + [(\tau \nabla) \Delta] + [(\tau \Delta) \nabla] = 0$$

erhält man mit Benutzung der Ausdrücke von $(\tau \Delta)$ und $(\tau \nabla)$

$$(361) \quad C\tau + Bt + 2E\sigma - JBp = 0;$$

durch Vertauschung von a und α liefert diese:

$$(631) \quad Cs + A\sigma + 2Dt + JA\pi = 0.$$

Aus

$$[(\Delta \nabla) \sigma] \cdot (\Delta \nabla) = 0$$

findet man

$$C\sigma + (\sigma \nabla) \Delta + (\sigma \Delta) \nabla = 0;$$

mit Berücksichtigung der obigen Relationen

$$(451)_1: \quad \sigma \left[\frac{3}{2} C - J^2 \right] - \frac{1}{2} Bs + D\tau - J \left(Ep + \frac{1}{2} C\pi \right) = 0$$

und

$$(541)_1: \quad t \left[\frac{3}{2} C - J^2 \right] - \frac{1}{2} A\tau + Es + J \left(D\pi + \frac{1}{2} Cp \right) = 0.$$

Aus der Identität $\begin{pmatrix} \pi & \pi & p \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat man $(\pi^2, p) = -2\omega\pi$. Schiebt man daher π^2 über p und bedenkt, dass $(\mu, p) = (\varphi, p\pi)$ ist, so findet man:

$$(451)_2: \quad 2\omega\pi + Bs + 2Et + C\sigma + JC\pi = 0$$

und

$$(541)_2: \quad -2\omega p + A\tau + 2D\sigma + Ct - JCp = 0.$$

$$[(p\pi) \tau] = 0$$

gibt sofort:

$$(471): \quad \omega \tau + p(\pi \tau) + \pi(\tau p) = 0$$

und

$$(741): \quad -\omega s + \pi(ps) + p(s\pi) = 0.$$

Aus $[(p\pi)\sigma] = 0$ erhält man

$$(561): \quad 2\omega\sigma + p(\pi\sigma) + \pi(\sigma p) = 0$$

und

$$(651): \quad 2\omega t + p(t\pi) + \pi(pt) = 0.$$

III. Syzyganten (ik2).

$$(242): \quad \pi^2 - [B\Delta - 2E\Theta + (C-J^2)\nabla - J\mu] = 0,$$

$$(422): \quad p^2 - [A\nabla - 2D\Theta + (C-J^2)\Delta + J\lambda] = 0.$$

Aus $(\pi^2, \nabla)_1 = -\tau \cdot \pi$ erhält man sofort:

$$(262): \quad \tau \cdot \pi - B\nu + E\mu - J(B\Theta - E\nabla) = 0$$

und

$$(622): \quad sp + A\nu + D\lambda + J(A\Theta - D\Delta) = 0.$$

Die Identität:

$$[(\nabla\pi)\tau] = 0$$

liefert

$$(282): \quad \tau^2 + \nabla(\pi\tau) + \pi(\tau\nabla) = 0$$

und

$$(822): \quad s^2 + \Delta(ps) + p(s\Delta) = 0.$$

$$(332): \quad p\pi + D\nabla - 2C\Theta + E\Delta - J\nu = 0$$

Aus $[(p\pi)\nabla] = 0$ findet man:

$$(352)_1: \quad 2\omega\nabla - p\tau + \pi\sigma = 0$$

und

$$(532)_1: \quad -2\omega\Delta - \pi s + pt = 0.$$

Die Identität

$$[(\Delta\nabla)\mu] \cdot (\Delta\nabla) = 0$$

giebt

$$C\mu + (\mu\nabla)(\nabla\Delta)\Delta_x + (\mu\Delta)(\Delta\nabla)\nabla_x = 0.$$

Aus den Polarenbildungen $(\mu\nabla)\mu_x\nabla_y$ und $(\mu\Delta)\mu_x\Delta_y$ findet man für die beiden letzten Summanden leicht die bezüglichen Werthe:

$$-\left(\frac{1}{2} B\lambda + E\nu\right) \quad \text{und} \quad -\left(\frac{1}{2} C\mu + \omega\nabla\right)$$

und die Syzygante

$$(352)_2: \quad C\mu - B\lambda - 2\omega\nabla - 2E\nu = 0$$

und

$$(532)_2: \quad C\lambda - A\mu + 2\omega\Delta + 2D\nu = 0.$$

Aus $[(\Delta p)t] = 0$ hat man:

$$(372): \quad \sigma\tau + (\pi\sigma) \cdot \nabla + \frac{1}{2} Bp = 0$$

und

$$(732): \quad st + (pt) \cdot \Delta + \frac{1}{2} A\pi = 0.$$

Da $(\pi^2, \Delta)^1 = -t\pi$ ist, so hat man:

$$(442)_1: \quad t\pi + E\lambda + \nu(C - J^2) - J(C\Theta - D\nabla) = 0$$

und

$$(442)_2: \quad \sigma p + D\mu - \nu(C - J^2) + J(C\Theta - E\Delta) = 0.$$

Aus $[(p\pi)\Theta] = 0$ findet man

$$(442)_3: \quad 2\omega\Theta + Jp\pi + p\sigma - t\pi = 0.$$

Aus $[(\nabla p)\pi] = 0$ hat man:

$$(462)_1: \quad \sigma^2 + \nabla \cdot (p\sigma) + \frac{1}{2} Bp^2 = 0$$

und

$$(642)_1: \quad t^2 + \Delta \cdot (\pi t) + \frac{1}{2} A\pi^2 = 0.$$

Berücksichtigt man, dass $(\mu\pi) = (\alpha, \pi^2)$ und $(\mu p) = (\alpha, p\pi)$ ist, so giebt $[(p\pi)\mu] = 0$:

$$(462)_2: \quad 2\omega\mu - Bp^2 - C\pi^2 - 2Ep\pi + J(p\tau - \pi\sigma) = 0$$

und

$$(642)_2: \quad -2\omega\lambda - A\pi^2 - Cp^2 - 2Dp\pi - J(\pi s - pt) = 0.$$

Aus $[(\Delta\pi)\tau] = 0$ findet man:

$$(462)_3: \quad t\tau + \Delta(\pi\tau) + \pi(Ep + \frac{3}{2}C\pi + J\sigma) = 0$$

und

$$(642)_3: \quad s\sigma + \nabla(ps) + p(D\pi + \frac{3}{2}Cp - Jt) = 0.$$

Man erhält weiter aus $[(\nabla p)t] = 0$

$$(552)_1: \quad t\sigma + \nabla \cdot (pt) + \frac{1}{2} A\pi^2 = 0$$

und

$$(552)_2: \quad s\tau + \Delta(\pi\sigma) + \frac{1}{2} Bp^2 = 0.$$

$[(p\pi)\nu] = 0$ giebt aber

$$(552)_3: \quad 2\omega\nu - Ep^2 - 2Cp\pi - D\pi^2 - J(ps - t\pi) = 0.$$

IV. Syzyganten (ik3).

Die Polarenentwickelungen $(\alpha\Theta)\alpha_x^2\Theta_y$ und $(\alpha\nabla)\alpha_x^2\nabla_y$ geben mit Hilfe der Gleichungen des § 3 durch die Identität:

$$[(\nabla\Theta)\alpha] \cdot (\nabla\Theta) = 0$$

die Syzyganten

$$(143): \quad E\varphi + \frac{3}{2}\pi\nabla - Bf - JK = 0$$

und

$$(413): \quad Df + \frac{3}{2}p\Delta - A\varphi + JQ = 0.$$

Aus $[(\nabla\Theta)K] \cdot (\nabla\Theta) = 0$ erhält man:

$$E \cdot K + (\Theta K) (\nabla\Theta) \nabla_x K_x^2 + (K\nabla) (\nabla\Theta) K_x^2 \Theta_x = 0.$$

Für die beiden letzten Glieder liefern die Reihenentwickelungen $(K\Theta)K_x^2\Theta_y$ und $(K\nabla)K_x^2\nabla_y$, mittelst der Relation

$$(\pi\nabla, \nabla) = -\frac{1}{3}\tau\nabla,$$

die Werthe:

$$-\frac{1}{4}\tau\nabla - \frac{1}{2}EK \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}B\left(\xi - \frac{1}{2}J\varphi\right).$$

Man hat daher

$$(163): \quad EK - B\xi - \frac{1}{2}\tau\nabla + \frac{1}{2}BJ\varphi = 0$$

und

$$(613): \quad DQ - A\xi - \frac{1}{2}s\Delta - \frac{1}{2}AJf = 0.$$

Ersetzt man in der Identität $[(\nabla\Theta)a] \cdot (\nabla\Theta) = 0$ die Ausdrücke $(f\Theta)(\Theta\nabla)f_x^2\nabla_x$ und $(f\nabla)(\nabla\Theta)f_x^2\Theta_x$ durch die Werthe

$$\frac{1}{2}p\nabla - \frac{1}{2}C\varphi + \frac{1}{2}J\xi \quad \text{resp.:} \quad -\frac{1}{2}\pi\Theta - \frac{1}{4}p\nabla - \frac{1}{2}Ef$$

so findet man:

$$(233): \quad Ef + \frac{1}{2}p\nabla - C \cdot \varphi + J \cdot \xi - \pi\Theta = 0,$$

was sich auch durch den ∂ Process aus (143) ergibt, und

$$(323): \quad D\varphi + \frac{1}{2}\pi\Delta - C \cdot f - J \cdot \xi - p\Theta = 0.$$

Durch den ∂ Process erhält man weiter aus (163)

$$\left\{ \begin{array}{l} (253)_1': \quad -E\xi + EJ\alpha - 2B\xi + (3C - J^2)K - \frac{1}{2}BJf \\ \quad + \frac{1}{2}\nabla(J\pi + 3\sigma) - \tau\Theta = 0, \\ (523)_1': \quad = -D\xi - DJf - 2A\xi + (3C - J^2)Q + \frac{1}{2}AJ\varphi \\ \quad + \frac{1}{2}\Delta(-Jp + 3t) - s\Theta = 0. \end{array} \right.$$

Aus $[(\nabla\pi)\Theta] = 0$ findet man:

$$(253)_2: \quad \tau\Theta + \nabla\left(\frac{1}{2}J\pi + \sigma\right) - \frac{1}{2}\pi\mu = 0$$

und

$$(523)_2: \quad s\Theta + \Delta\left(-\frac{1}{2}Jp + t\right) - \frac{1}{2}p\lambda = 0.$$

Es giebt weiter $((\Delta \nabla)K) \cdot (\Delta \nabla) = 0$ mit Hilfe der Polarenentwickelungen: $(K\Delta)K^2\Delta_y$ und $(K\nabla)K_x^2\nabla_y$:

$$(253)_3: \quad CK - B\xi + \sigma\nabla = 0,$$

$$(523): \quad CQ - A\xi + t\Delta = 0.$$

Zählt man aber von $(253)_1'$ die Syzyganten $[(143).J]$ ab und addirt zu dem Reste — 3 mal $(253)_3$, so erhält man $(253)_1$ in der einfacheren Form

$$(253)_1: \quad -E\xi + B\xi - \tau\Theta - J\pi\nabla - \frac{3}{2}\sigma\nabla + \frac{1}{2}BJf = 0,$$

$$(523)_1: \quad -D\xi + A\xi - s\Theta + Jp\Delta - \frac{3}{2}t\Delta - \frac{1}{2}AJ\varphi = 0.$$

Die Identität

$$[(\Theta\nabla)\tau] = 0$$

führt uns auf:

$$(273): \quad \mu\tau + B\Theta\pi - \nabla(Bp + 2E\pi - J\tau) = 0$$

und

$$(723): \quad \lambda s + A\Theta p - \Delta(A\pi + 2Dp + Js) = 0.$$

$[(\nabla\pi)\Delta] = 0$ giebt:

$$(343)_1: \quad v\pi - \tau\Delta + t\nabla = 0,$$

$$(433)_1: \quad -vp - s\nabla + \sigma\Delta = 0$$

und $[(\Theta\nabla)p] = 0$:

$$(343)_2: \quad p\mu - 2\sigma\Theta + Jp\nabla + 2\nabla t = 0,$$

$$(433)_2: \quad \pi\lambda - 2t\Theta - J\pi\Delta + 2\Delta\sigma = 0.$$

Eine weitere liefert $[(p\pi)\alpha] = 0$:

$$(343)_3': \quad 2\omega\varphi - p\mu - v\pi = 0,$$

$$(433)_3': \quad -2\omega f - \pi\lambda + vp = 0,$$

die wir mit Hilfe der beiden vorhergehenden in die Form bringen

$$(343)_3: \quad 2\omega\varphi - \tau\Delta + 3\nabla t - 2\sigma\Theta + Jp\nabla = 0,$$

$$(433)_3: \quad -2\omega f - s\nabla + 3\Delta\sigma - 2t\Theta - J\pi\Delta = 0.$$

Entwickeln wir $[(\Delta\nabla)\xi] \cdot (\Delta\nabla) = 0$ mit Hilfe der Polarenbildungen $(\xi\nabla)\xi_x^2\nabla_y$ und $(\xi\Delta)\xi_x^2\Delta_y$ und der Relationen:

$$(\pi\nabla, \Delta) = -t\nabla + \frac{2}{3}\tau\Delta,$$

$$(\pi\Delta, \nabla) = -\tau\Delta + \frac{2}{3}t\nabla,$$

so finden wir

$$(343)_4: \quad C\xi - 2t\nabla + \tau\Delta - BQ = 0,$$

$$(433)_4: \quad C\xi - 2\sigma\Delta + s\nabla - AK = 0.$$

Wenden wir auf (433)₄ den δ Process an und dividiren das erhaltene Resultat durch 4, so gelangen wir zu

$$(343)_5': DK - \frac{1}{2}E\xi + \frac{3}{4}t\nabla - \frac{1}{2}\tau\Delta - \frac{1}{4}Jp\nabla + \Theta\sigma - \frac{1}{2}C\xi + \frac{1}{4}CJ\varphi = 0,$$

$$(433)_5': EQ - \frac{1}{2}D\xi + \frac{3}{4}\sigma\Delta - \frac{1}{2}s\nabla + \frac{1}{4}J\pi\Delta + \Theta t - \frac{1}{2}C\xi - \frac{1}{4}CJf = 0.$$

Dagegen giebt der ∂ Process auf $[CK - B\xi + \sigma\nabla = 0]$ angewandt:

$$2DK + C(3\xi - J\varphi) - 4E\xi - BQ + (Jp - 2t)\nabla + 2\sigma\Theta = 0.$$

Zählen wir hiervon $\frac{1}{2} \cdot (343)_4$ ab und dividiren den Rest durch -4 , so finden wir endlich

$$(343)_6': -\frac{1}{2}DK + E\xi + \frac{1}{4}\tau\Delta - \frac{1}{4}Jp\nabla - \frac{1}{2}\sigma\Theta - \frac{1}{2}C\xi + \frac{1}{4}CJ\varphi.$$

Durch Verbindung von (343)₅' und der letzteren erhalten wir schliesslich:

$$(343)_5: E\xi + \frac{1}{2}J(C\varphi - p\nabla) + \frac{1}{2}t\nabla - C\xi = 0$$

und

$$(343)_6: DK + \frac{1}{2}J(C\varphi - p\nabla) + \sigma\Theta - \frac{1}{2}\tau\Delta + t\nabla - C\xi = 0$$

und:

$$(433)_5: D\xi - \frac{1}{2}J(Cf - \pi\Delta) + \frac{1}{2}\sigma\Delta - C\xi = 0,$$

$$(433)_6: EQ - \frac{1}{2}J(Cf - \pi\Delta) + t\Theta - \frac{1}{2}s\nabla + \sigma\Delta - C\xi = 0.$$

Aus den Identitäten:

$$[(p\pi)K] = 0; \quad [(\nabla p)\mu] = 0; \quad [(\nabla\Delta)\tau] = 0$$

erhält man:

$$(363)_1: 2\omega K + p(E\nabla - B\Theta) + \frac{1}{2}\pi(C\nabla - B\Delta) = 0,$$

$$(633)_1: -2\omega Q + \pi(D\Delta - A\Theta) + \frac{1}{2}p(C\Delta - A\nabla) = 0,$$

$$(363)_2: \sigma\mu + C\pi\nabla + Bp\Theta + J\sigma\nabla = 0,$$

$$(633)_2: t\lambda + Cp\Delta + A\pi\Theta - Jt\Delta = 0,$$

$$(363)_3: -v\tau - \frac{1}{2}B\pi\Delta + \nabla(Ep + \frac{3}{2}C\pi + J\sigma) = 0,$$

$$(633)_3: vs - \frac{1}{2}Ap\nabla + \Delta(D\pi + \frac{3}{2}Cp - Jt) = 0.$$

Desgleichen geben die Identitäten:

$$[(p\pi)\xi] = 0; \quad [(\Delta\nabla)\sigma] = 0; \quad [(\Theta\Delta)\tau] = 0; \quad [(\Theta\nabla)t] = 0$$

$$(453)_1: 2\omega\xi - \frac{1}{2}p(B\Delta - C\nabla) + \pi(C\Theta - E\Delta) = 0,$$

$$(543)_1: -2\omega\xi - \frac{1}{2}\pi(A\nabla - C\Delta) + p(C\Theta - D\nabla) = 0,$$

$$(453)_2: \quad v\sigma + \frac{1}{2} Bp\Delta - \nabla(-D\pi - \frac{1}{2} Cp + Jt) = 0,$$

$$(543)_2: \quad -vt + \frac{1}{2} A\pi\nabla - \Delta(-Ep - \frac{1}{2} C\pi - J\sigma) = 0,$$

$$(453)_3: \quad \lambda\tau + 2\Theta(Ep + \frac{3}{2} C\pi + J\sigma) - \Delta(Bp + 2E\pi - J\tau) = 0,$$

$$(543)_3: \quad \mu s + 2\Theta(D\pi + \frac{3}{2} Cp - Jt) - \nabla(A\pi + 2Dp + Js) = 0,$$

$$(453)_4: \quad \mu\tau + 2\Theta(-Ep - \frac{1}{2} C\pi - J\sigma) - \nabla(-Cp + Jt) = 0,$$

$$(543)_4: \quad \lambda s + 2\Theta(-D\pi - \frac{1}{2} Cp + Jt) - \Delta(-C\pi - J\sigma) = 0,$$

V. Syzyganten (ik4).

$[(\nabla\pi)\alpha] = 0$ giebt:

$$(154)_1: \quad \tau \cdot \varphi - \mu\nabla + K\pi = 0,$$

$$(514)_1, \quad s \cdot f - \lambda\Delta + Qp = 0.$$

Schieben wir ferner (143) über f , so erhalten wir

$$E\vartheta + \frac{3}{2} v\nabla - \tau f - \frac{J}{2} (\varphi\pi - \nabla\Theta) = 0.$$

Der δ Process verwandelt diese in:

$$(154)_2': \quad 2B\vartheta + 3\mu\nabla - 2\tau\varphi + J\nabla^2 = 0$$

oder in Verbindung mit (154)₁,

$$(154)_2: \quad 2B\vartheta + 2K\pi + \mu\nabla + J\nabla^2 = 0,$$

$$(514)_2: \quad -2A\vartheta + 2Qp + \lambda\Delta - J\Delta^2 = 0.$$

Man hat ferner aus $[(\alpha\nabla)\tau] = 0$

$$(174): \quad K\tau - \frac{1}{2} B\pi\alpha + \nabla(E\nabla - B\Theta) = 0,$$

$$(714): \quad Qs - \frac{1}{2} Ap\alpha + \Delta(D\Delta - A\Theta) = 0.$$

Unterwirft man die Relationen $(fQ) = -\frac{1}{2}\Delta$ dem δ Process, so erhält man die absolute Identität

$$(\alpha Q) + 3(a\xi) = -2\Delta\Theta.$$

Wenden wir hierauf nochmals den δ Process an und berücksichtigen die leicht zu erweisenden Beziehungen

$$(\xi\alpha) = -\frac{1}{3}\alpha p + \frac{1}{2}\Delta\nabla,$$

$$(\xi a) = -\frac{1}{2}a\pi + \frac{1}{2}\Delta\nabla,$$

so ergibt sich die Syzygante

$$(224): \quad 2J\vartheta - 2\Theta^2 + 2\Delta\nabla - \alpha p - a\pi = 0.$$

Der ∂ Process verwandelt weiter $(154)_2$ in:

$$(244)_1': \quad 2E\vartheta + \frac{3}{2}\pi\xi - \frac{1}{2}J\alpha\pi - \frac{1}{2}Kp + \frac{1}{2}\mu\Theta + \frac{1}{2}\nu\nabla + J\nabla\Theta = 0.$$

Entsprechend ist:

$$(424)_1': \quad -2D\vartheta + \frac{3}{2}p\xi + \frac{1}{2}Jap - \frac{1}{2}Q\pi + \frac{1}{2}\lambda\Theta - \frac{1}{2}\nu\Delta - J\Delta\Theta = 0.$$

Die Identitäten

$$[(\alpha\nabla)\pi] = 0; \quad [(\alpha\nabla)p] = 0; \quad [(\alpha\pi)\Theta] = 0$$

geben weiter

$$(244)_2: \quad \pi\xi + f\tau - \nu\nabla = 0,$$

$$(424)_2: \quad p\xi + \alpha s + \nu\Delta = 0;$$

$$(244)_3: \quad Kp + \alpha\sigma + \nu\nabla = 0,$$

$$(424)_3: \quad Q\pi + at - \nu\Delta = 0;$$

$$(244)_4: \quad \mu\Theta + \alpha\sigma - \pi\xi + J\alpha\pi = 0,$$

$$(424)_4: \quad \lambda\Theta + at - p\xi - Jap = 0.$$

Eliminieren wir in $(244)_1$: $\pi\xi$, $\alpha\sigma$ und Kp mit Hilfe der drei andern $(244)_3$, so erhalten wir $(244)'$ in der schon oben gefundenen einfacheren Form:

$$(244)_1: \quad E\vartheta + \frac{3}{2}\nu\nabla - \tau f - \frac{J}{2}(\alpha\pi - \nabla\Theta) = 0,$$

und

$$(424)_1: \quad -D\vartheta - \frac{3}{2}\nu\Delta - s\alpha + \frac{J}{2}(ap - \Delta\Theta) = 0.$$

Aus $[(\nabla p)K] = 0$; $[(\nabla\pi)\xi] = 0$ und $(\Theta\nabla)^1 \times (\Theta'\nabla')^1$ erhält man:

$$(264)_1: \quad \sigma K + \frac{1}{2}\nabla(B\Delta - C\nabla) - \frac{1}{2}Bp\alpha = 0,$$

$$(624)_1: \quad tQ + \frac{1}{2}\Delta(A\nabla - C\Delta) - \frac{1}{2}A\pi f = 0;$$

$$(264)_2: \quad \tau\xi - \frac{1}{2}\nabla(B\Delta - C\nabla) - \frac{1}{2}B\pi f + \pi^2\nabla = 0;$$

$$(624)_2: \quad s\xi - \frac{1}{2}\Delta(A\nabla + C\Delta) - \frac{1}{2}Ap\varphi + p^2\Delta = 0;$$

$$(264)_3: \quad \mu^2 + 2[G\nabla^2 - 2E\Theta\nabla + B\Theta^2] = 0,$$

$$(624)_3: \quad \lambda^2 + 2[G\Delta^2 - 2D\Theta\Delta + A\Theta^2] = 0.$$

Aus den Identitäten

$$[(\alpha\pi)\Theta] = 0 \quad \text{und} \quad [(\nabla p)f] = 0$$

findet man:

$$\begin{aligned}
 (334)_1: & \quad \nu \Theta + f \sigma - \pi \xi = 0, \\
 (334)_2: & \quad -\nu \Theta + \varphi t - p \xi = 0, \\
 (334)_3: & \quad f \sigma - \lambda \nabla + p \xi = 0, \\
 (334)_4: & \quad \varphi t - \mu \Delta + \pi \xi = 0.
 \end{aligned}$$

Aus $[(\Delta \nabla) \Theta] = 0$ oder durch $(334)_1 - (334)_2 - (334)_3 + (334)_4 = 0$ erhält man die zusammengesetzte (334):

$$\nu \Theta - \frac{1}{2} \mu \Delta + \frac{1}{2} \lambda \nabla = 0 = \Phi.$$

Alsdann ist

$$\sum a_i \frac{\partial (244)_1}{\partial \alpha_i} + J \cdot (224) - \frac{1}{3} \Phi = 0$$

oder

$$(334)_5: \quad C \vartheta + \frac{1}{2} (\pi \xi - p \xi) + \frac{1}{4} (\mu \Delta - \lambda \nabla) + \frac{1}{2} J \Delta \nabla = 0.$$

Dieselbe erhält man auch durch $[(\Delta \nabla) \vartheta] = 0$ mit Benützung der Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (\vartheta \nabla) &= \frac{1}{2} \alpha \pi, & (\vartheta \nabla)_2 &= -\frac{1}{3} J \nabla - \frac{1}{2} \mu; \\
 (\vartheta \Delta) &= -\frac{1}{2} \alpha p; & (\vartheta \Delta)_2 &= -\frac{1}{3} J \Delta + \frac{1}{2} \lambda;
 \end{aligned}$$

Weil μ und ν Functionaldeterminanten sind und aus den Identitäten

$$[(\Delta \pi) K] = 0, [(\nabla p) \xi] = 0 \text{ und } [(\nabla \pi) \xi] = 0$$

hat man weiter

$$\begin{aligned}
 (354)_1: & \quad \mu \nu + D \nabla^2 - E \Delta \nabla - C \Theta \nabla + B \Theta \Delta = 0, \\
 (354)_2: & \quad t K - \Delta (B \Theta - E \nabla) + \frac{\pi}{2} (\nabla p - C \varphi) = 0, \\
 (354)_3: & \quad \sigma \xi - \nabla (C \Theta - E \Delta - p \pi) - \frac{1}{2} B p f = 0, \\
 (354)_4: & \quad \tau \xi - \nabla (C \Theta - D \nabla - \frac{1}{2} p \pi) - \frac{1}{2} C \varphi \pi = 0
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (534)_1: & \quad -\lambda \nu + E \Delta^2 - D \Delta \nabla - C \Theta \Delta + A \Theta \nabla = 0, \\
 (534)_2: & \quad \sigma Q - \nabla (A \Theta - D \Delta) + \frac{p}{2} (\Delta \pi - C f) = 0, \\
 (534)_3: & \quad t \xi - \Delta (C \Theta - D \nabla - p \pi) - \frac{1}{2} A \pi \varphi = 0, \\
 (534)_4: & \quad s \xi - \Delta (C \Theta - E \Delta - \frac{1}{2} p \pi) - \frac{1}{2} C f p = 0.
 \end{aligned}$$

Weil λ , μ und ν Functionaldeterminanten sind, hat man:

$$\begin{aligned}
 (444)_1: & \quad 2 \lambda \mu + G \Delta \nabla - E \Delta \Theta - D \nabla \Theta + C \Theta^2 = 0, \\
 (444)_2: & \quad 2 \nu^2 + A \nabla^2 - 2 C \nabla \Delta + B \Delta^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Aus den Identitäten

$$[(\Delta\pi)\xi] = 0; [(\nabla\pi)Q] = 0; [(p\pi)\vartheta] = 0$$

und ihren Gegenbildern erhält man weitere fünf (444):

$$(444)_3: 2t\xi - \Delta(B\Delta - C\nabla - \pi^2) - Ca\pi = 0,$$

$$(444)_4: 2\sigma\xi - \nabla(A\nabla - C\Delta - p^2) - Ca p = 0,$$

$$(444)_5: 2sK - \Delta(C\nabla - B\Delta) + p(p\nabla - C\alpha) = 0,$$

$$(444)_6: 2\tau Q - \nabla(C\Delta - A\nabla) + \pi(\pi\Delta - Ca) = 0,$$

$$(444)_7: 4\omega\vartheta + p^2\nabla + 2p\pi\Theta + \pi^2\Delta = 0.$$

VI. Syzyganten (ik5).

Leicht ergeben sich aus den Identitäten

$$[(\alpha\Theta)\nabla] = 0; [(\alpha\pi)K] = 0; [(a\alpha)\pi] = 0; [(\Theta\nabla)f] = 0; [(\Delta\nabla)\alpha] = 0;$$

$$[(a\alpha)\tau] = 0; [(\alpha\pi)\xi] = 0 \text{ und } [(\Delta\nabla)K] = 0$$

die Syzyganten:

$$(145): \nabla\xi - \frac{1}{2}J\varphi\nabla - \frac{1}{2}\varphi\mu - K\Theta = 0,$$

$$(165): \mu K - \varphi(B\Theta - E\nabla) + \frac{1}{2}\pi\nabla^2 = 0,$$

$$(235)_1: \vartheta\pi + \mu f - \nu\varphi = 0,$$

$$(235)_2: \Theta\xi + \frac{1}{2}\mu f - \nabla\left(\xi + \frac{1}{2}Jf\right) = 0,$$

$$(235)_3: \Delta K + \nu\varphi - \xi\nabla = 0,$$

$$(255)_1: \vartheta\tau - f(E\nabla - B\Theta) + \varphi\left[\frac{C\nabla - B\Delta}{2} + \pi^2\right] = 0,$$

$$(255)_2: 2\mu\xi - \varphi[B\Delta - C\nabla - \pi^2] + \pi\nabla\Theta = 0,$$

$$(255)_3: 2\nu K - \varphi(B\Delta - C\nabla) - \nabla^2 p = 0;$$

und deren Gegenbilder

$$(415): \Delta\xi + \frac{1}{2}Jf\Delta - \frac{1}{2}f\lambda - Q\Theta = 0,$$

$$(615): \lambda Q - f(A\Theta - D\Delta) + \frac{1}{2}p\Delta^2 = 0,$$

$$(325)_1: -\vartheta p + \lambda\varphi + \nu f = 0,$$

$$(325)_2: \Theta\xi + \frac{1}{2}\lambda\varphi - \Delta\left(\xi - \frac{1}{2}J\varphi\right) = 0,$$

$$(325)_3: \nabla Q - \nu f - \xi\Delta = 0,$$

$$(525)_1: -\vartheta s - \varphi(D\Delta - A\Theta) + f\left[\frac{C\Delta - A\nabla}{2} + p^2\right] = 0$$

$$(525)_2: 2\lambda\xi - f[A\nabla - C\Delta - p^2] + p\Delta\Theta = 0,$$

$$(525)_3: 2\nu Q + f(A\nabla - C\Delta) - \Delta^2\pi = 0.$$

Zur Entwicklung der weiter hierher gehörenden Syzyganten

bedürfen wir einiger leicht zu erweisenden Relationen. Es sind dies die Ueberschiebungserlegungen

$$(\mu \varphi) = \frac{1}{2} \nabla \pi; \quad (\nu f) = \frac{1}{2} \Delta \pi; \quad (\lambda \varphi) = \frac{1}{2} \Delta \pi + \Theta p.$$

Mit Hilfe dieser geben die Identitäten

$$[(\nabla p) \vartheta] = 0; \quad [(\varphi \nabla) \mu] = 0, \quad [(f \nabla) \nu] = 0, \quad [(\varphi \nabla) \lambda] = 0.$$

$$(345)_1: \quad 2\sigma \vartheta - \nabla(\pi \Delta + p \Theta) + \varphi p \pi = 0,$$

$$(345)_2: \quad \xi \mu - \varphi(B \Theta - E \nabla) + \frac{1}{2} \nabla^2 \pi = 0,$$

$$(345)_3: \quad 2\xi \nu - f(B \Delta - C \nabla) + \Delta \nabla \pi = 0,$$

$$(345)_4: \quad K \lambda - (C \Theta - E \Delta) + \nabla \left(\frac{1}{2} \Delta \pi - \Theta p \right) = 0; \quad \text{und}$$

$$(435)_1: \quad 2t \vartheta + \Delta(p \nabla + \pi \Theta) + f p \pi = 0,$$

$$(435)_2: \quad \xi \lambda - f(A \Theta - D \Delta) + \frac{1}{2} \Delta^2 p = 0,$$

$$(435)_3: \quad -2\xi \nu - \varphi(A \nabla - C \Delta) + \Delta \nabla p = 0,$$

$$(435)_4: \quad Q \mu - f(C \Theta - D \nabla) + \Delta \left(\frac{1}{2} \nabla p - \Theta \pi \right) = 0.$$

VII. Syzyganten (ik6).

Der Theorie der cubischen Formen entnehmen wir:

$$(066): \quad 2K^2 + \nabla^3 + B\alpha^2 = 0,$$

$$(606): \quad 2Q^2 + \Delta^3 + Aa^2 = 0.$$

$[(\alpha \nabla) f] = 0$ giebt sofort:

$$(136): \quad Kf - \xi \varphi + \vartheta \nabla = 0,$$

$$(316): \quad Q\varphi - \xi f - \vartheta \Delta = 0.$$

Mit Ausnahme von (226) erhält man die folgenden (ik6) bis (ik8) aus der bekannten Eigenschaft der Functionaldeterminanten, dass ihre Quadrate und Producte Syzyganten liefern. Jene aber ergibt sich ohne weiteres aus: $[(\alpha \alpha) \Theta] = 0$.

$$(156): \quad 2\xi K + \Theta \nabla^2 - \pi \nabla \varphi + Bf\varphi = 0,$$

$$(516): \quad 2\xi Q + \Theta \Delta^2 - p \Delta f + Af\varphi = 0,$$

$$(226): \quad \vartheta \Theta + f\xi - \varphi\xi - Jf\varphi = 0.$$

$$(246)_1: \quad 2\xi^2 + \nabla^2 \Delta - 2\pi f \nabla + Bf^2 = 0,$$

$$(246)_2: \quad 2\xi K + \nabla^2 \Delta - p \varphi \nabla + C\varphi^2 = 0,$$

$$(246)_3: \quad 2\vartheta \mu - f \nabla \pi + \varphi \nabla p + 2\varphi \Theta \pi = 0,$$

$$(426)_1: \quad 2\xi^2 + \Delta^2 \nabla - 2p \varphi \Delta + A\varphi^2 = 0,$$

$$(426)_2: \quad 2\xi Q + \Delta^2 \nabla - \pi f \Delta + Cf^2 = 0,$$

$$(426)_3: \quad -2\vartheta \lambda - \varphi \Delta p + f \Delta \pi + 2f \Theta p = 0,$$

$$\begin{aligned}(336)_1: & \quad 2\vartheta\nu + \varphi\pi\Delta + fp\nabla = 0, \\(336)_2: & \quad 2\xi\xi + \Theta\Delta\nabla + Cf\varphi = 0, \\(336)_3: & \quad 2QK + \Theta\Delta\nabla - \varphi\pi\Delta - fp\nabla + Cf\varphi = 0,\end{aligned}$$

VIII, IX. Syzyganten (*ik*7) und (*ik*8).

$$\begin{aligned}(147): & \quad 2\vartheta K + \Theta\varphi\nabla - \pi\varphi^2 - \nabla^2 f = 0, \\(417): & \quad -2\vartheta Q + \Theta f\Delta - pf^2 - \Delta^2\varphi = 0, \\(237): & \quad 2\vartheta\xi + \varphi\Delta\nabla - \pi f\varphi - \Theta f\nabla = 0, \\(327): & \quad -2\vartheta\xi + f\Delta\nabla - p\varphi f - \Theta\varphi\Delta = 0, \\(228): & \quad 2\vartheta^2 + \Delta\varphi^2 - 2\Theta f\varphi + \nabla f^2 = 0.\end{aligned}$$

§ 5.

Tabelle der Syzyganten.

1) (*ik*0).

(440) (660).

2) (*ik*1).

(361) (451)² (541)² (631) (741),
(471) (561) (651).

3) (*ik*2).

(242) (332) (422) (532)² (622) (732) (822),
(262) (352)² (442)³ (552)³ (642)³,
(282) (372) (462)³.

4) (*ik*3).

(143) (233) (323) (413) (523)³ (613) (723),
(163) (253)³ (343)⁶ (433)⁶ (543)⁴ (633)³,
(273) (363)³ (453)⁴.

5) (*ik*4).

(154)² (224) (334)⁵ (424)⁴ (514)² (624)³ (714),
(174) (244)⁴ (354)⁴ (534)⁴,
(264)³.

6) (*ik*5).

(145) (235)³ (325)³ (415) (525)³ (615),
(165) (255)³ (345)⁴ (435)⁴.

7) (*ik*6).

(066) (136) (226) (316) (426)³ (516) (606),
 (156) (246)³ (336)³.

8) (*ik*7).

(147) (237) (327) (417),

9) (*ik*8).

(228).

Oppenheim, 20. December 1887.
