

Kurven auf algebraischen Flächen.

Von

Heinrich W. E. Jung in Halle a. d. Saale.

Einleitung.

Die Formeln, die dazu dienen, die stationären Elemente von Kurven und abwickelbaren Flächen zu bestimmen, sollen in dieser Arbeit in eine Form gebracht werden, die ihre bequeme Anwendung auf Kurven gestatten, die auf einer Fläche liegen, und auf abwickelbare Flächen, die einer Fläche umschrieben sind. Zum Schluß folgen einige Anwendungen. Weitere Anwendungen gedenke ich in besonderen Arbeiten zu geben.

I. Kurven und abwickelbare Flächen.

Zunächst seien die Formeln zusammengestellt, die in eine für unsere Zwecke passende Form gebracht werden sollen¹⁾.

1. Raumkurven.

Es seien a_1, a_2, a_3, a_4 vier äquivalente teilerfremde ganze Divisoren eines algebraischen Körpers \mathfrak{F} einer Veränderlichen. Wir setzen, unter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ Konstanten verstehend,

$$(1) \quad \begin{cases} a_0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4, \\ \xi_\alpha = \frac{a_\alpha}{a_0}. \end{cases}$$

Fassen wir die ξ_α als homogene Punktkoordinaten eines Punktes (ξ) auf, so bildet die Gesamtheit dieser Punkte (ξ) eine algebraische Kurve. Wir nehmen an, daß jeder Stelle dieser Kurve auch eine Stelle des Körpers \mathfrak{F} entspricht und bezeichnen die Kurve auch mit \mathfrak{F} . Ist \wp eine Stelle von

¹⁾ Wegen der Beweise sei verwiesen auf: Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen. Teubner 1902, 27. Vorlesung, S. 460 ff.; Hensel, Über die Invarianten algebraischer Körper, Journ. f. Math. 149 (1919), S. 125–146.

\mathfrak{P} und τ eine Größe, die dort von der ersten Ordnung Null wird, so sind in der Umgebung von p die ξ_α in der Form darstellbar

$$\xi_\alpha = \tau^{-\nu} a_\alpha(\tau),$$

wo ν eine ganze nicht negative Zahl und wo die $a_\alpha(\tau)$ gewöhnliche Potenzreihen von τ sind, die nicht alle für $\tau = 0$ verschwinden. Wir setzen dann noch $a_0 = \tau^\nu$ und nennen die $a_\alpha(\tau)$ die zugeordneten Funktionen der Divisoren a_α für die Stelle p . Diese sollen nicht vollständig bestimmt sein, sondern es soll gestattet sein, sie mit einem gemeinsamen Faktor zu multiplizieren, der eine Einheit für die Stelle p ist, d. h. eine gewöhnliche Potenzreihe von τ , die für $\tau = 0$ nicht verschwindet. Es sind also die a_α und ebenso die später vorkommenden ganzen Divisoren nicht nur Symbole, sondern an jeder Stelle gewöhnliche Potenzreihen einer an dieser Stelle von erster Ordnung verschwindenden Größe.

Die im folgenden auftretenden Differentialausdrücke haben infolgedessen an jeder Stelle p eine Bedeutung und sind durch eine ganz bestimmte Potenz des zur Stelle p gehörenden Primteilers p teilbar. Dabei gilt das Differential $d\tau$ als Einheit für die Stelle p , wenn τ von der ersten Ordnung in p verschwindet. Es werden also durch die Differentialausdrücke ganz bestimmte Divisoren definiert und diese sind deshalb von besonderer Bedeutung, weil die Differentialausdrücke Differentialinvarianten sind.

Es seien $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die Divisoren der stationären Punkte, Geraden und Ebenen von \mathfrak{P} . Es bestehen dann folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} (2) \quad \eta_{\alpha\beta} &= a_\alpha d a_\beta - a_\beta d a_\alpha = \delta_1 a_{\alpha\beta}, \\ (3) \quad \eta_\delta &= |a_\alpha, d a_\beta, d^2 a_\gamma| = \delta_1^2 \delta_2 a'_\delta, \\ (4) \quad \eta &= |a_1, d a_2, d^2 a_3, d^3 a_4| = \delta_1^3 \delta_2^2 \delta_3, \end{aligned}$$

wo die $a_{\alpha\beta}$ und ebenso die a'_α ganze Divisoren ohne gemeinsamen Teiler sind. Die $a_{\alpha\beta}$ sind die Linienkoordinaten der Geraden von \mathfrak{P} und die a'_α die Ebenenkoordinaten der Ebenen von \mathfrak{P} . Die Ordnungen von $a_\alpha, a_{\alpha\beta}, a'_\alpha, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ seien $n_1, n_2, n_3; w_1, w_2, w_3$. Es sind n_1, n_2, n_3 gleich Ordnung; Rang, Klasse von \mathfrak{P} .

2. Abwickelbare Flächen.

Die Ebenen der Kurve \mathfrak{P} hüllen eine abwickelbare Fläche \mathfrak{P}' ein, deren Gratlinie \mathfrak{P} ist. Die Punkte, Geraden und Ebenen von \mathfrak{P} heißen auch Punkte, Geraden und Ebenen von \mathfrak{P}' , wobei das Wort Punkt in prägnantem Sinne gebraucht ist. Statt von den Punkten auszugehen, kann man auch von den Ebenen ausgehen. Wir erhalten dann dual zu Nr. 1 folgende Gleichungen:

$$(5) \quad \eta'_{\alpha\beta} = \alpha'_\alpha d\alpha_\beta - \alpha'_\beta d\alpha'_\alpha = \delta_3 \alpha'_{\alpha\beta} = \delta_3 \alpha_\gamma \delta,$$

$$(6) \quad \eta'_\delta = |\alpha'_\alpha, d\alpha_\beta, d^2\alpha'_\gamma| = \delta_3^2 \delta_2 \alpha_\delta,$$

$$(7) \quad \eta' = |\alpha'_1, d\alpha'_2, d^2\alpha'_3, d^3\alpha'_4| = \delta_3^3 \delta_2^2 \delta_1.$$

Es ist dann und nur dann identisch

$$(8) \quad \begin{cases} \delta_1 = 0, & \text{wenn } \mathfrak{P} \text{ in einen Punkt kondensiert, also } \mathfrak{P}' \text{ ein Kegel ist,} \\ \delta_2 = 0, & \text{wenn } \mathfrak{P} \text{ eine Gerade, also } \mathfrak{P}' \text{ ein Ebenenbüschel,} \\ \delta_3 = 0, & \text{wenn } \mathfrak{P} \text{ eine ebene Kurve, also } \mathfrak{P}' \text{ in eine Ebene kon-} \\ & \text{densiert ist.} \end{cases}$$

Aus (2) bis (7) ergeben sich durch Vergleichen der Ordnungen der Divisoren links und rechts folgende sechs Plückerschen Gleichungen, von denen drei unabhängig sind,

$$(9) \quad \begin{cases} 2p - 2 = w_1 + n_2 - 2n_1, & 3(2p - 2) = 2w_1 + w_3 + n_3 - 3n_1, \\ & 6(2p - 2) = 3w_1 + 2w_2 + w_3 - 6n_1, \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} 2p - 2 = w_3 + n_3 - 2n_3, & 3(2p - 2) = 2w_3 + w_2 + n_1 - 3n_3, \\ & 6(2p - 2) = 3w_3 + 2w_2 + w_1 - 6n_3. \end{cases}$$

3. Mehrfache Kurven.

Es mögen einer Stelle der Kurve der Punkte (ξ) μ im allgemeinen verschiedene Stellen des Körpers \mathfrak{P} entsprechen. Wir bezeichnen die Kurve mit \mathfrak{P}_0 . Es ist dann \mathfrak{P} ein Körper vom Relativgrade μ über dem Körper \mathfrak{P}_0 , der durch die Kurve definiert wird. Jeder Primteiler von \mathfrak{P}_0 zerfällt in \mathfrak{P} in μ Primteiler, so daß die Ordnung eines Divisors von \mathfrak{P}_0 μ -mal so groß wird, wenn wir ihn als Divisor von \mathfrak{P} auffassen.

Es sei δ der Verzweigungsdivisor von \mathfrak{P} in bezug auf \mathfrak{P}_0 . Die in den Nrn. 1 und 2 definierten Divisoren und Zahlen sollen sich wieder auf die Kurve der Punkte (ξ) , also auf \mathfrak{P}_0 beziehen. Dann ist jetzt im Körper \mathfrak{P}

$$(11) \quad \eta_{\alpha\beta} = \delta_1 \delta \alpha_{\alpha\beta}, \quad \eta_\alpha = \delta_1^2 \delta_2 \delta^3 \alpha'_\alpha, \quad \eta = \delta_1^3 \delta_2^2 \delta_3 \delta^6.$$

Der hier betrachtete Fall tritt z. B. ein, wenn die Kurve \mathfrak{P}_0 eine μ -fache Kurve einer algebraischen Fläche F ist. Die Verzweigungsstellen von \mathfrak{P} in bezug auf \mathfrak{P}_0 sind dann die Stellen, wo zwei oder mehrere der μ durch \mathfrak{P}_0 gehenden Blätter von F analytisch zusammenhängen. Ist $\mu = 2$, so sind es die Kniffpunkte der Doppelkurve. Der Körper \mathfrak{P} kann übrigens zerfallen.

Dual entsprechende Überlegungen gelten für diejenigen einer Fläche F umschriebenen abwickelbaren Flächen, deren Ebenen F mehrfach berühren.

4. Ebene Kurven und Kegel.

Es sei ähnlich wie in Nr. 1

$$(12) \quad \xi_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad \xi_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad \xi_3 = \frac{a_3}{a_0},$$

wo die a_i ganze, teilerfremde, äquivalente Divisoren eines algebraischen Körpers \mathfrak{P} sein sollen. Wir nehmen an, daß der Körper der rationalen homogenen Funktionen der ξ_i mit \mathfrak{P} identisch ist. Wir deuten die ξ_i als homogene Punktkoordinaten eines Raumes, indem wir noch eine vierte Koordinate ξ_4 hinzufügen. Nehmen wir $\xi_4 = 0$ an, so definieren die Punkte (ξ) eine in der Ebene 4 des Koordinatentetraeders liegende ebene Kurve. Lassen wir ξ_4 unbestimmt, so bilden die Punkte (ξ) einen Kegel, dessen Spitze die Ecke 4 des Koordinatentetraeders ist. Wir bezeichnen die Kurve mit \mathfrak{P} , den Kegel mit \mathfrak{P}' .

Sind δ_1, δ_2 die Divisoren der stationären Punkte und Tangenten von \mathfrak{P} oder der stationären Kanten und Ebenen von \mathfrak{P}' , so ist

$$(13) \quad \eta_\alpha = a_\beta d a_\gamma - a_\gamma d a_\beta = \delta_1 a'_\alpha,$$

$$(14) \quad \eta' = |a_1, d a_2, d^2 a_3| = \delta_1^2 \delta_2.$$

Wir setzen, unter $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ irgendwelche Konstanten verstehend,

$$(15) \quad a'_0 = \lambda'_1 a'_1 + \lambda'_2 a'_2 + \lambda'_3 a'_3, \quad \xi'_\alpha = \frac{a'_\alpha}{a'_0}.$$

Die ξ'_α sind die Linienkoordinaten der Geraden von \mathfrak{P} oder die Ebenenkoordinaten der Ebenen von \mathfrak{P}' . Dual zu (13), (14) bestehen die Gleichungen

$$(16) \quad \eta'_\alpha = a'_\beta d a'_\gamma - a'_\gamma d a'_\beta = \delta_2 a'_\alpha,$$

$$(17) \quad \eta' = |a'_1, d a'_2, d^2 a'_3| = \delta_1 \delta_2^2.$$

Sowohl zwischen den ξ_i wie zwischen den ξ'_i besteht eine irreduzible algebraische Gleichung. Diese seien $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ und $f'(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) = 0$. Dann ist für die Umgebung jeder Stelle identisch

$$(18) \quad f(a_1, a_2, a_3) = 0, \quad f'(a'_1, a'_2, a'_3) = 0.$$

Bezeichnen wir die ersten Ableitungen durch Hinzufügen der Indizes 1, 2, 3, so bestehen die Gleichungen

$$(19) \quad f_k(a) = m \delta_1 a'_k = m_0 \delta_1^3 a'_k, \quad f'_k(a') = m' \delta_2 a_k = m'_0 \delta_2^3 a_k.$$

Die hierdurch definierten Divisoren m, m_0, m', m'_0 sind ganz. Es ist m der Divisor der mehrfachen Stellen von \mathfrak{P} oder der mehrfachen Kanten von \mathfrak{P}' und m' ist der Divisor der mehrfachen Geraden von \mathfrak{P} oder der mehrfachen Ebenen von \mathfrak{P}' .

Die Ordnungen von $\delta_1, \delta_2, m, m_0, m', m'_0, a_\alpha, a'_\alpha$ seien $w_1, w_2, m, m_0, m', m'_0, n_1, n_2$. Es ist n_1 die Ordnung und n_2 die Klasse von \mathfrak{P} oder \mathfrak{P}' . Durch Gleichsetzen der Ordnungen der Divisoren auf beiden Seiten der Gleichungen (13) bis (17), (19) folgt

$$(20) \quad \begin{cases} 2p - 2 = w_1 + n_2 - 2n_1, & 3(2p - 2) = 2w_1 + w_2 - 3n_1, \\ 2p - 2 = w_2 + n_1 - 2n_2, & 3(2p - 2) = 2w_2 + w_1 - 3n_2, \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} n_1(n_1 - 1) = 2m + w_1 + n_2 = 2m_0 + 3w_1 + n_2, \\ n_2(n_2 - 1) = 2m' + w_2 + n_1 = 2m'_0 + 3w_2 + n_1, \end{cases}$$

aus denen unter anderem folgt

$$(22) \quad 2p - 2 = n_1(n_1 - 3) - 2m = n_2(n_2 - 3) - 2m'.$$

II. Kurven auf einer algebraischen Fläche F und ihr umschriebene abwickelbare Flächen.

Im folgenden benutze ich öfter meine Arbeit: Über die Differentialinvarianten algebraischer Flächen²⁾, die ich mit D zitiere.

1. Die Fläche F und ihre Kurven.

Die Fläche F sei definiert wie in D , S. 183. Die Koordinaten x_α eines Punktes (x) und die Koordinaten x'_α einer Ebene (x') von F seien also gegeben in der Form

$$(1) \quad x_\alpha = \frac{\mathfrak{U}_\alpha}{\mathfrak{U}_0}, \quad x'_\alpha = \frac{\mathfrak{U}'_\alpha}{\mathfrak{U}'_0} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

wo die \mathfrak{U}_i und ebenso die \mathfrak{U}'_i ganze teilerfremde äquivalente Divisoren ohne gemeinsame Nullstellen eines algebraischen Körpers T von zwei Veränderlichen sein sollen. Jedem Primteiler \mathfrak{P} (erster Stufe) erster Art lassen wir auf F eine Kurve \mathfrak{P} entsprechen, so daß jede Kurve an jeder Stelle, durch die sie geht, eine zugeordnete Funktion $\mathfrak{P}(u, v)$ hat, die längs der Kurve \mathfrak{P} verschwindet. Folgende vier Arten von Kurven sind zu unterscheiden:

- a) Längs der Kurve \mathfrak{P} sind weder die Verhältnisse der \mathfrak{U}_i noch die der \mathfrak{U}'_i konstant.
- b) Längs \mathfrak{P} sind die Verhältnisse der \mathfrak{U}_i konstant, nicht aber die der \mathfrak{U}'_i .
- c) Längs \mathfrak{P} sind die Verhältnisse der \mathfrak{U}'_i konstant, nicht aber die der \mathfrak{U}_i .
- d) Längs \mathfrak{P} sind sowohl die Verhältnisse der \mathfrak{U}_i wie die der \mathfrak{U}'_i konstant.

Im Falle b) ist \mathfrak{P} in einen Punkt H kondensiert, aber die Berührungsebenen von F in den Stellen von \mathfrak{P} sind veränderlich. Sie bilden einen

²⁾ Diese Zeitschr. 8, S. 182–221.

Kegel, den Berührungskegel von F in dem singulären Punkte H . Wir nennen \mathfrak{P} eine *Punktkurve*.

Im Falle c), der dual zu b) ist, fallen die Berührungsebenen, die F in den Stellen von \mathfrak{P} hat, zusammen. Die F längs \mathfrak{P} umschriebene abwickelbare Fläche ist in eine Ebene kondensiert, die F längs \mathfrak{P} berührt. Wir nennen \mathfrak{P} eine *Ebenenkurve*.

Im Falle d) ist \mathfrak{P} gleichzeitig Punkt- und Ebenenkurve.

Sind \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} zwei Kurven von F , so verstehen wir unter $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{P})$ die Zahl ihrer Schnittpunkte. Ist \mathfrak{P} eine Primkurve, so können wir $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ auch in folgender Weise definieren. Jede Kurve \mathfrak{Q} , die \mathfrak{P} nicht enthält, geht für $\mathfrak{P} = 0$ in einen ganz bestimmten Divisor q des Körpers \mathfrak{P} über. Da äquivalente Kurven in äquivalente Divisoren übergehen, so geht jede Klasse (\mathfrak{Q}) in eine Klasse (q) des Körpers \mathfrak{P} über für $\mathfrak{P} = 0$. Und es ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ die Ordnung der Klasse (q) . Es hat nach dieser Definition $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ auch einen Sinn, wenn \mathfrak{P} in \mathfrak{Q} enthalten ist. Ist \mathfrak{P} kein Primteiler, sondern etwa $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1^{p_1} \mathfrak{P}_2^{p_2} \dots \mathfrak{P}_r^{p_r}$ wo die \mathfrak{P}_i Primteiler sind, so setzt man

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = p_1 (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}) + \dots + p_r (\mathfrak{P}_r, \mathfrak{Q}).$$

Es gelten die Sätze

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}, \mathfrak{Q} &= (\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}), \\ (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) &= (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'), \end{aligned}$$

wenn $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{Q}'$.

Man vgl. hierzu meine Arbeit: Zur Theorie der Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche. Journ. f. Math. 138, S. 77—95.

2. Kurven auf F .

Es sei \mathfrak{P} eine Primkurve auf der Fläche F . Wir bezeichnen mit ξ_a die Koordinaten eines Punktes (ξ) von \mathfrak{P} , mit y_a die irgendeines Raumpunktes (y) und, wie schon angegeben, mit x_a die eines Punktes (x) von F .

Ferner sei $G(y) = 0$ die Gleichung irgendeiner von F verschiedenen irreduziblen Fläche G , die durch \mathfrak{P} geht, so daß für die Umgebung irgendeiner Stelle S , durch die \mathfrak{P} geht,

$$(2) \quad G(\mathfrak{A}) = G(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4) = \mathfrak{P}^a(u, v) \mathfrak{G}(u, v),$$

wo $a > 0$ und wo $\mathfrak{G}(u, v)$ eine durch $\mathfrak{P}(u, v)$ nicht teilbare gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist. Es ist \mathfrak{G} die zugeordnete Funktion der Kurve, in der die Fläche G die Fläche F außer in \mathfrak{P} noch schneidet. Die Ordnung von G sei g .

Zur Abkürzung sei gesetzt

$$(3) \quad \frac{\partial G(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_k} = G_k(\mathfrak{A}) = G_k.$$

Aus (2) folgt

$$(4) \quad \sum G_k \mathfrak{A}_k = gG = g\mathfrak{P}^a \mathfrak{G},$$

$$(5) \quad \sum G_k \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial u} = a\mathfrak{P}^{a-1} \mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} + \mathfrak{P}^a \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u},$$

$$(6) \quad \sum G_k \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial v} = a\mathfrak{P}^{a-1} \mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} + \mathfrak{P}^a \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}.$$

Zu diesen Gleichungen nehmen wir noch folgende hinzu, in der wir unter $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ unbestimmte Konstanten verstehen,

$$(7) \quad \sum G_k \mu_k = \mu,$$

wo μ durch diese Gleichung definiert sein soll. Aus (4) bis (7) durch Auflösen nach G_1 unter Beachtung von D, S. 184, (5) und (6)

$$G_1 \cdot \Re \sum \mu_k \mathfrak{A}'_k = \begin{vmatrix} \mu & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ 0 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ a\mathfrak{P}^{a-1} \mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ a\mathfrak{P}^{a-1} \mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix} + (a),$$

wo unter (a) Summanden zu verstehen sind, die mindestens durch \mathfrak{P}^a teilbar sind. Diese Gleichung ist identisch in den μ_a . Vergleichen wir links und rechts den Faktor von μ_2 , so erhalten wir

$$\Re \{ \mathfrak{A}'_1 G_2 - \mathfrak{A}'_2 G_1 \} = a\mathfrak{P}^{a-1} \mathfrak{G} \begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix} + (a).$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit du . Und zwar multiplizieren wir die Determinante der rechten Seite, indem wir die zweite Zeile mit du multiplizieren. Außerdem addieren wir die mit dv multiplizierte dritte Zeile der Determinante zur zweiten. Wir erhalten

$$\Re \{ \mathfrak{A}'_1 G_2 - \mathfrak{A}'_2 G_1 \} du = a\mathfrak{P}^{a-1} \mathfrak{G} \begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ d\mathfrak{P} & d\mathfrak{A}_3 & d\mathfrak{A}_4 \\ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix} + (a).$$

Beachten wir, daß $d\mathfrak{P} = 0$ für $\mathfrak{P} = 0$, so folgt

$$(8) \quad \Re \{ \mathfrak{A}'_1 G_2 - \mathfrak{A}'_2 G_1 \} du = a\mathfrak{P}^{a-1} \mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} \{ \mathfrak{A}_3 d\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{A}_4 d\mathfrak{A}_3 \} + (a).$$

Wir nehmen an, daß $\mathfrak{P}(u, v)$ von v wirklich abhängt, was keine Beschränkung ist, da wir ja u mit v vertauschen könnten.

Für $\mathfrak{P} = 0$ gehen die x_α in die ξ_α über. Benutzen wir die Bezeichnungen von I, Nr. 1, so haben wir die Divisoren des Körpers \mathfrak{P} , in die die \mathfrak{A}_α für $\mathfrak{P} = 0$ übergehen, mit a_α zu bezeichnen. Diese Divisoren sind, wie es sein muß, teilerfremd, da die \mathfrak{A}_α keine gemeinsame Nullstelle haben (D, Einleitung). Daher folgt aus (8) und (2) wegen I, (2)

$$(I) \quad \eta_{\alpha\beta} = \lim_{\mathfrak{P}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{aG(\mathfrak{A})} \cdot \frac{du}{\partial\mathfrak{P}} [\mathfrak{A}'_\gamma G_\delta - \mathfrak{A}'_\delta G_\gamma] \right\},$$

wobei $\alpha\beta\gamma\delta$ eine grade Permutation von 1 2 3 4 ist.

Es ist unter der Annahme $\mathfrak{P} = 0$, also $\mathfrak{A}_\alpha = a_\alpha$ nach I, (3),

$$\eta_1 = |\mathfrak{A}_2, d\mathfrak{A}_3, d^2\mathfrak{A}_4| = \eta_{23} d^2\mathfrak{A}_4 + \eta_{34} d^2\mathfrak{A}_2 + \eta_{42} d^2\mathfrak{A}_3.$$

Setzen wir vorübergehend zur Abkürzung

$$(9) \quad \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{aG(\mathfrak{A})} \cdot \frac{du}{\partial\mathfrak{P}} = \varphi,$$

so folgt wegen (I)

$$\eta_1 = \lim_{\mathfrak{P}=0} \left[\varphi \left\{ \mathfrak{A}'_1 \sum G_k d^2 \mathfrak{A}_k - G_1 \sum \mathfrak{A}'_k d^2 \mathfrak{A}_k \right\} \right]$$

oder wegen D, S. 188, (5) und (6)

$$(II) \quad \eta_\alpha = \lim_{\mathfrak{P}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{aG(\mathfrak{A})} \cdot \frac{du}{\partial\mathfrak{P}} \left[\mathfrak{A}'_\alpha \sum G_k d^2 \mathfrak{A}_k - G_\alpha Q_2(du, dv) \right] \right\}.$$

Es ist nach I, (4) unter der Annahme $\mathfrak{P} = 0$

$$\eta = |\mathfrak{A}_1, d\mathfrak{A}_2, d^2\mathfrak{A}_3, d^3\mathfrak{A}_4| = \eta_1 d^3\mathfrak{A}_1 + \eta_2 d^3\mathfrak{A}_2 + \eta_3 d^3\mathfrak{A}_3 + \eta_4 d^3\mathfrak{A}_4.$$

Unter Benutzung von (II) und (9) folgt hieraus

$$(10) \quad \eta = \lim_{\mathfrak{P}=0} \left[\varphi \left\{ \sum \mathfrak{A}'_k d^3 \mathfrak{A}_k \cdot \sum G_k d^2 \mathfrak{A}_k - Q_2(du, dv) \sum G_k d^3 \mathfrak{A}_k \right\} \right].$$

Es ist aber nach D, S. 196, (5), (6) und D, S. 188, (5), (6)

$$(11) \quad \begin{cases} Q_3(du, dv) = \sum \mathfrak{A}'_k d^3 \mathfrak{A}_k + 3 \sum d \mathfrak{A}'_k d^2 \mathfrak{A}_k, \\ dQ_2(du, dv) = \sum \mathfrak{A}'_k d^3 \mathfrak{A}_k + \sum d \mathfrak{A}'_k d^2 \mathfrak{A}_k. \end{cases}$$

Daher folgt aus (10) wegen (9)

$$(III) \quad \eta = \lim_{\mathfrak{P}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{aG(\mathfrak{A})} \cdot \frac{du}{\partial\mathfrak{P}} \left[\left\{ \frac{3}{2} dQ_2(du, dv) - \frac{1}{2} Q_3(du, dv) \right\} \sum G_k d^2 \mathfrak{A}_k - Q_2(du, dv) \sum G_k d^3 \mathfrak{A}_k \right] \right\}.$$

3. Abwickelbare einhüllende Flächen von F .

Es sei wieder \mathfrak{P} eine Primkurve auf F , und \mathfrak{P}' sei die abwickelbare Fläche, deren Ebenen F in den Stellen von \mathfrak{P} berühren. Es ist \mathfrak{P} im allgemeinen *nicht* die Gratlinie von \mathfrak{P}' . Es mögen y'_i die Koordinaten irgendeiner Ebene sein, x'_i die Koordinaten einer Ebene von F und ξ'_i die einer Ebene von \mathfrak{P}' . Es sei wie in D, S. 185 (2)

$$(12) \quad x'_\alpha = \frac{\mathfrak{A}'_\alpha}{\mathfrak{A}'_0}$$

Ferner sei $G'(\eta') = 0$ die Gleichung einer von F verschiedenen irreduziblen algebraischen Fläche, der auch \mathfrak{P}' umschrieben ist. Es ist dann

$$(13) \quad G'(\mathfrak{A}') = \mathfrak{P}^a \mathfrak{G}',$$

wo \mathfrak{G}' eine ganze durch \mathfrak{P} nicht teilbare Kurve ist und wo $a > 0$.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(14) \quad \frac{\partial G'(\mathfrak{A}')}{\partial \mathfrak{A}'_k} = G'_k,$$

so erhalten wir dual zur vorigen Nummer folgende Gleichungen:

$$(I') \quad \eta'_{\alpha\beta} = \lim_{\mathfrak{p}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}'}{a G'(\mathfrak{A}')} \cdot \frac{du}{\partial \mathfrak{P}} [\mathfrak{A}'_\gamma G'_\delta - \mathfrak{A}'_\delta G'_\gamma] \right\},$$

$$(II') \quad \eta'_\alpha = \lim_{\mathfrak{p}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}'}{a G'(\mathfrak{A}')} \cdot \frac{du}{\partial v} [\mathfrak{A}'_\alpha \sum G'_k d^2 \mathfrak{A}'_k - G'_\alpha Q_2(du, dv)] \right\},$$

$$(III') \quad \eta' = \lim_{\mathfrak{p}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}'}{a G'(\mathfrak{A}')} \cdot \frac{du}{\partial v} \left[\left\{ \frac{3}{2} dQ_2(du, dv) + \frac{1}{2} Q_3(du, dv) \right\} \sum G'_k d^2 \mathfrak{A}'_k - Q_2(du, dv) \sum G'_k d^3 \mathfrak{A}'_k \right] \right\}.$$

III. Anwendungen.

1. Über die Kurven \mathfrak{R} und \mathfrak{R}' .

Es sei \mathfrak{P} eine in \mathfrak{R} (D, S. 184 (6)) in der Potenz $\varrho > 0$ enthaltene Primkurve, die nicht Punktkurve ist. Es sind dann in (I) die $\eta_{\alpha\beta}$ wegen I, (2) und (8) nicht identisch Null. Wenn die Fläche G nicht besonders gewählt ist, so berührt sie F nicht längs \mathfrak{P} , so daß die G_k für $\mathfrak{P} = 0$ nicht proportional zu den \mathfrak{A}'_k werden. Daher folgt aus (I), daß $G(\mathfrak{A}) = \mathfrak{P}^a \mathfrak{G}$ genau durch die $(\varrho + 1)$ -te Potenz von \mathfrak{P} teilbar sein muß. Das gilt

auch noch für $\varrho = 0$, wenn also \mathfrak{B} in \mathfrak{R} nicht enthalten ist. Wenn dagegen die Fläche G die Fläche F längs \mathfrak{B} berührt, so folgt $a > \varrho + 1$. Es verhält sich also \mathfrak{B} wie ein Rückkehrpunkt von der Rückkehrordnung ϱ einer Kurve C ; denn jede durch einen solchen Punkt gehende Kurve hat mit C in dem Rückkehrpunkt mindestens $\varrho + 1$ zusammenfallende Schnittpunkte. Hier haben wir, wenn wir das aus (I') folgende duale Ergebnis gleich hinzufügen.

Ist \mathfrak{B} eine nicht in einen Punkt kondensierte Primkurve, die in \mathfrak{R} in der ϱ -ten Potenz enthalten ist, so hat eine durch \mathfrak{B} gehende Fläche G die Kurve \mathfrak{B} mindestens $(\varrho + 1)$ -mal mit F gemeinsam. Geht G einfach durch \mathfrak{B} und berührt G die Fläche F nicht längs \mathfrak{B} , so hat G die Kurve \mathfrak{B} genau $(\varrho + 1)$ -mal mit F gemeinsam.

Es sei \mathfrak{B}' eine nicht in eine Ebene kondensierte F umschriebene abwickelbare Fläche und es sei \mathfrak{B} die Kurve, längs der \mathfrak{B}' die Fläche F berührt. Ist \mathfrak{B} in \mathfrak{R}' in der ϱ' -ten Potenz enthalten, so hat jede Fläche G' , aufgefaßt als Gesamtheit ihrer Ebenen, die Fläche \mathfrak{B}' mindestens $(\varrho' + 1)$ -mal gemeinsam mit F . Berühren die Ebenen von \mathfrak{B}' die Fläche G' nur einmal und geht G' nicht durch \mathfrak{B} , so hat G' die Fläche \mathfrak{B}' genau $(\varrho' + 1)$ -mal mit F gemeinsam.

\mathfrak{R} heißt die Rückkehrkurve und \mathfrak{R}' die parabolische oder Wendekurve von F . Ist die Primkurve \mathfrak{B} in \mathfrak{R} in der ϱ -ten und in \mathfrak{R}' in der ϱ' -ten Potenz enthalten; so heißt \mathfrak{B} eine Rückkehrkurve der Rückkehrordnung ϱ und eine Wendekurve der Wendeordnung ϱ' .

2. Über das identische Verschwinden von $LN - M^2$.

Eine algebraische Fläche F hat im allgemeinen zweifach unendlich viele Punkte und Ebenen. Es kann aber sowohl der Fall eintreten, daß sie ∞^3 Punkte, aber nur ∞^1 Ebenen hat, wie auch, daß sie ∞^2 Ebenen, aber nur ∞^1 Punkte hat. Im ersten Fall ist F als Ordnungsfläche (d. h. als Gesamtheit ihrer Punkte) eine eigentliche Fläche, als Klassenfläche (d. h. als Gesamtheit ihrer Ebenen) keine eigentliche Fläche. Im zweiten Falle ist F als Ordnungsfläche keine eigentliche Fläche, wohl aber als Klassenfläche. Im ersten Fall degeneriert F in eine abwickelbare Fläche, im zweiten Fall in eine Kurve. Diese beiden Fälle sind zueinander dual.

Es fragt sich, wodurch diese beiden Fälle charakterisiert sind. Es sei F eine abwickelbare Fläche. Dann hängen die Verhältnisse der Koordinaten x'_i ihrer Ebenen, also auch die Verhältnisse der \mathfrak{A}'_i nur von einem Parameter ab. Und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, ist F eine abwickelbare Fläche. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist aber, daß die Determinanten \mathfrak{B}'_i (vgl. D, S. 185 (5)) identisch ver-

schwinden. Das wiederum tritt dann und nur dann ein (D, S. 185 (6)), wenn \mathfrak{R}' identisch Null ist. Nehmen wir den dualen Satz hinzu und beachten die Gleichung D, S. 190 (18), so haben wir:

Sind L, M, N die Gaußschen Fundamentalgrößen zweiter Ordnung einer Fläche F , so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß F in eine abwickelbare Fläche oder eine Kurve degeneriert,

$$LN - M^2 = \mathfrak{R}\mathfrak{R}' \text{ identisch Null,}$$

und zwar tritt der erste oder zweite Fall ein, je nachdem \mathfrak{R}' oder \mathfrak{R} identisch Null ist.

3. Ein Satz über Inflexionskurven.

Es gilt der Satz

Eine ebene Inflexionskurve, die nicht Ebenenkurve ist, ist eine Gerade oder eine Punktkurve.

Die Inflexionskurven sind dadurch definiert, daß längs ihrer die Gaußsche Fundamentalform zweiter Ordnung $Q_2(du, dv)$ verschwindet. Es sei \mathfrak{P} eine ebene Kurve auf F , die Inflexionskurve ist, aber nicht Ebenenkurve. Die Ebene von \mathfrak{P} soll also F nicht längs \mathfrak{P} berühren. Es liege \mathfrak{P} in der Ebene $y_4 = 0$. Wir wählen in (II) $G(y) \equiv y_4$. Da die Ebene $y_4 = 0$ F nicht längs \mathfrak{P} berührt, so ist nach III, Nr. 1

$$G(\mathfrak{A}) = \mathfrak{P}^{\varrho+1} \mathfrak{G},$$

wenn \mathfrak{P} in \mathfrak{R} in der ϱ -ten Potenz enthalten ist. Ferner ist

$$G_1 = G_2 = G_3 = 0, \quad G_4 = 1.$$

Da längs \mathfrak{P} identisch $\mathfrak{A}_4 = 0$, also auch $d^2 \mathfrak{A}_4 = 0$ und da längs \mathfrak{P} die Form Q_2 verschwindet, so folgt aus (II) $\eta_\alpha = 0$, also nach I (3), da die α'_a nicht sämtlich Null sein können, $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 = 0$, so daß nach I (8) \mathfrak{P} Punktkurve oder Gerade ist.

Dual ergibt sich:

Eine Inflexionskurve, die gleichzeitig Berührungskurve eines Kegels aber nicht Punktkurve ist, ist eine Gerade oder eine Ebenenkurve.

In ähnlicher Weise schließt man aus (II) und (II'):

Jede Ebenenkurve, Punktkurve und Gerade von F ist Inflexionskurve.

4. Über das identische Verschwinden von \mathfrak{S} .

Infolge der Definition der Salmonschen Kurve \mathfrak{S} einer Fläche F hat in jedem ihrer Punkte F eine Inflexionstangente, die von höherer als zweiter Ordnung berührt (vgl. D VI, S. 195, 196) und umgekehrt liegt

jeder solche Punkt von F auf \mathcal{S} . Daher ist jede auf F liegende Gerade in \mathcal{S} enthalten; denn in jedem ihrer Punkte hat F eine Inflexionstangente der angegebenen Art, nämlich die Gerade selbst. Ist daher F eine geradlinige Fläche, so muß \mathcal{S} identisch Null sein. Es sei umgekehrt \mathcal{S} identisch Null. Es sei S eine reguläre Stelle von F . Da \mathcal{S} identisch Null ist, so haben die Formen $Q_2(du, dv)$ und $Q_3(du, dv)$ einen gemeinsamen Faktor und es geht durch S eine Kurve \mathfrak{P} , längs der Q_2 und Q_3 Null wird. Da S eine reguläre Stelle ist, so können wir annehmen, daß \mathfrak{P} weder eine Punkt- noch eine Ebenenkurve ist. Wir wissen freilich zunächst nicht, ob \mathfrak{P} eine algebraische Kurve ist und können daher die Formel (III) nicht auf den ganzen Verlauf von \mathfrak{P} anwenden, aber wohl in der Umgebung von S . Es ergibt sich, daß längs \mathfrak{P} η identisch Null. Daraus folgt nach (4), daß $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ identisch Null ist. Es kann aber δ_1 nicht identisch verschwinden, da \mathfrak{P} keine Punktkurve ist. Also ist $\delta_2 \delta_3$ identisch Null, so daß nach (8) \mathfrak{P} eine Gerade oder eine ebene Kurve ist. Da aber Q_2 längs \mathfrak{P} verschwindet, so ist \mathfrak{P} ebene Inflexionskurve, also nach der vorigen Nummer immer eine Gerade. Wenn also $\mathcal{S} = 0$, so geht durch jede reguläre Stelle von F eine Gerade, d. h. F ist geradlinig. Wir haben daher:

Es ist \mathcal{S} dann und nur dann identisch gleich Null, wenn F eine geradlinige Fläche ist.

5. Über die Höchstzahl der auf einer algebraischen Fläche liegenden Geraden.

Auf einer algebraischen Fläche F können drei Arten von Geraden liegen. Es sei \mathcal{G} eine auf F liegende Gerade.

1. Es können alle Punkte von \mathcal{G} auf F liegen und alle Ebenen durch \mathcal{G} Ebenen von F sein. Die Berührungsebene von F in einem Punkte P von \mathcal{G} ist mit P beweglich und umgekehrt ist der Berührungspunkt einer durch \mathcal{G} gehenden Ebene E mit E beweglich. In diesem Falle hat ein ebener Schnitt \mathfrak{A} von F und auch eine Berührungskurve \mathfrak{A}' eines Berührungskegels von F einen Schnittpunkt mit \mathcal{G} , d. h. es ist

$$(1) \quad (\mathfrak{A}, \mathcal{G}) = 1, \quad (\mathfrak{A}', \mathcal{G}) = 1.$$

2. Alle Punkte von \mathcal{G} liegen auf F , aber nur eine Ebene E von F geht durch \mathcal{G} . Diese Ebene E berührt dann F längs \mathcal{G} . Es ist \mathcal{G} eine Ebenenkurve. Die Berührungskurve eines Kegels, dessen Spitze nicht in E liegt, schneidet \mathcal{G} nicht. Es ist daher in diesem Falle

$$(2) \quad (\mathfrak{A}, \mathcal{G}) = 1, \quad (\mathfrak{A}', \mathcal{G}) = 0.$$

Die Gerade ist in diesem Falle nur Gerade von F , wenn wir F als Ordnungsfäche auffassen.

3. Alle Ebenen durch \mathcal{G} sind Ebenen von F , berühren aber F alle in demselben Punkt. Es ist in diesem Falle \mathcal{G} nur Gerade von F , wenn wir F als Klassenfläche auffassen. Es ist \mathcal{G} Punktkurve und es wird

$$(3) \quad (\mathcal{A}, \mathcal{G}) = 0, \quad (\mathcal{A}', \mathcal{G}) = 1.$$

Die Fälle 2. und 3. sind dual zueinander.

Wie wir schon in der vorigen Nummer sahen, ist jede Gerade \mathcal{G} in \mathcal{S} enthalten, und zwar, wie einfache Beispiele zeigen, in den einfachsten Fällen in der ersten Potenz. Nach (1), (2), (3) ist daher die Höchstzahl der auf einer Ordnungsfläche liegenden Geraden $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$ und der auf einer Klassenfläche liegenden $(\mathcal{A}', \mathcal{S})$. Wir benutzen die Äquivalenzen D, S. 221 (IV), (IV'), nämlich

$$(4) \quad \mathcal{R}^5 \mathcal{D}^{11} \mathcal{S} \sim \mathcal{A}^{11n-24}, \quad \mathcal{R}'^5 \mathcal{D}'^{11} \mathcal{S} \sim \mathcal{A}'^{11n'-24}.$$

Hierin ist \mathcal{D} durch \mathcal{R}^2 , abgesehen von Punktkurven und \mathcal{D}' durch \mathcal{R}'^2 abgesehen von Ebenenkurven teilbar, wie ich an anderer Stelle beweisen werde. Wir setzen $\mathcal{D} = \mathcal{R}^2 \mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}' = \mathcal{R}'^2 \mathcal{D}'_0$, so daß

$$(5) \quad \mathcal{S} \sim \mathcal{A}^{11n-24} \mathcal{D}_0^{-11} \mathcal{R}^{-27} \sim \mathcal{A}'^{11n'-24} \mathcal{D}'_0^{-11} \mathcal{R}'^{-27}.$$

Wir setzen

$$(6) \quad (\mathcal{A}, \mathcal{D}_0) = 2b_0, \quad (\mathcal{A}, \mathcal{R}) = c, \quad (\mathcal{A}', \mathcal{D}'_0) = 2b'_0, \quad (\mathcal{A}', \mathcal{R}') = c'.$$

Wegen (5) und (6) haben wir also

Die Höchstzahl der auf einer Ordnungsfläche liegenden Geraden ist

$$(7) \quad (11n - 24)n - 22b_0 - 27c$$

und der auf einer Klassenfläche liegenden

$$(8) \quad (11n' - 24)n' - 22b'_0 - 27c'.$$

Dabei ist n die Ordnung der Fläche und b_0 und c sind die Ordnungen ihrer mehrfachen und Rückkehrkurve. Die Zahlen n' , b'_0 , c' sind dual zu n , b_0 , c .

Halle a. d. Saale, Mai 1921.

(Eingegangen am 8. Juli 1921.)