Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Fortsetzung; siehe Bd. 74 und 75 dieses Journals.)

(Von Herrn *L. W. Thomé.*)

Die Untersuchungen des Verfassers im 74. und 75. Bande dieses Journals über die homogene, lineare Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = 0,$$

deren Coefficienten in der Umgebung eines Punktes $x=a$ einwerthige und abgesehen von diesem Punkte stetige Functionen des complexen Argumentes x sind, werden hier fortgesetzt, wobei die Benennungen, die in der Abh. Bd. 75 angewandt worden sind, in demselben Sinne gebraucht werden.

In den beiden ersten Nummern werden allgemeine Sätze über das Verhalten der Differentialgleichung (1.), deren Coefficienten als beliebige stetige Functionen von x vorausgesetzt sind, zu der Differentialgleichung

$$(2.)\qquad \frac{d^m M}{dx^m}-\frac{d^{m-1}p_1M}{dx^{m-1}}+\cdots+(-1)^m p_m M = 0$$

des integrirenden Multiplicators der ersteren entwickelt. Es wird in der No. 1 gezeigt, dass die Integrale der einen Differentialgleichung solche Ausdrücke annehmen, aus welchen die der anderen sich unmittelbar herleiten lassen, wobei in der Herleitungsweise der Integrale der einen aus denen der anderen Reciprocität zwischen beiden Differentialgleichungen besteht. In der No. 2 wird dargestellt, in welcher Weise eine Differentialgleichung, deren Integrale sämmtlich in der Differentialgleichung (2.) enthalten sind,

$$(3.)\qquad \frac{d^k S}{dx^k}-\frac{d^{k-1}g_1S}{dx^{k-1}}+\cdots+(-1)^k g_k S = 0$$

zur Reduction der Ordnung bei den Differentialgleichungen (1.) und (2.) dient, und gezeigt, dass diese Reduction unabhängig von der Wahl der Integrale der Differentialgleichung (3.) und nur abhängig von den Coefficienten g_a von S ist. Auf diesem Satze beruhen die weiteren Sätze in den No. 3, 4 u. 5 für die Differentialgleichungen (1.) und (2.), deren Coefficienten analytische Functionen der oben angegebenen Beschaffenheit sind, welche Sätze dann zur weiteren Untersuchung der regulären Integrale (Abh. Bd. 75 No. 1) der Differentialgleichung (1.) dienen.

1.

Es sei

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = F_m(y) = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten beliebige stetige Functionen von x sind, und die m linearunabhängigen Integrale derselben y_1 bis y_m seien auf die Form

$$(2.)\qquad y_1 = v_1,\quad y_2 = v_1\int v_2 dx,\quad \ldots\quad y_m = v_1\int dx\, v_2\ldots\int v_m dx$$

gebracht. Bildet man mittels dieser Ausdrücke der $m-1$ ersten Integrale die homogene lineare Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der dieselben genügen

$$(3.)\qquad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+p_1^{(1)}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+p_{m-1}^{(1)}y = F_{m-1}(y) = 0,$$

und alsdann die Differentialgleichung

$$(4.)\qquad F_{m-1}(y) = c_m v_1.v_2\ldots v_m,$$

wo c_m eine willkürliche Constante ist, so enthält letztere dieselben Integrale, wie (1.) (vgl. Abh. Bd. 75, No. 2).

Die Gleichung

$$(5.)\qquad \frac{d}{dx}\{(v_1v_2\ldots v_m)^{-1}F_{m-1}(y)\} = (v_1v_2\ldots v_m)^{-1}F_m(y)$$

ist demnach eine identische und also

$$(6.)\qquad (v_1v_2\ldots v_m)^{-1}$$

integrirender Factor zu $F_m(y)$.

Ist $F_\alpha(y) = 0$ die homogene lineare Differentialgleichung α^{ter} Ordnung, der y_1 bis y_α genügen und worin $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$ den Coefficienten Eins hat, so ist ebenso $(v_1v_2\ldots v_\alpha)^{-1}$ integrirender Factor zu $F_\alpha(y)$.

Setzt man also

$$(7.)\qquad \mu_1 = v_1,\quad \mu_2 = \mu_1 v_2,\quad \ldots\quad \mu_m = \mu_{m-1}v_m,$$

so dass die Integrale (2.) die Form annehmen

$$(8.)\qquad y_1 = \mu_1,\quad y_2 = \mu_1\int \mu_1^{-1}\mu_2 dx,\quad \ldots\quad y_m = \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\ldots\int \mu_{m-1}^{-1}\mu_m dx,$$

so ist μ_α^{-1} integrirender Factor zu $F_\alpha(y)$.

Bezeichnet man nun

$$(9.)\qquad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+l_1\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+l_{m-1}y$$

durch $f_{m-1}(y)$, so dient die identische Gleichung

$$(10.)\qquad \frac{d}{dx}\{Mf_{m-1}(y)\} = MF_m(y)$$

allgemein zur Definition des integrirenden Multiplicators von $F_m(y)$. Man erhält aus derselben durch Gleichstellung der Coefficienten der gleichen Ableitungen:

$$(11.)\qquad \frac{d}{dx}(Ml_\alpha)+Ml_{\alpha+1}=Mp_{\alpha+1},\quad (\alpha=0,\dots m-2),\quad \frac{d}{dx}(Ml_{m-1})=Mp_m,$$

wo $l_0=1$ ist, von denen die $m-1$ ersten die Grössen l eindeutig bestimmen. Aus (11.) erhält man durch Elimination von Ml_α:

$$(12.)\qquad \frac{d^mM}{dx^m}-\frac{d^{m-1}p_1M}{dx^{m-1}}+\cdots+(-1)^m p_mM = 0,$$

eine homogene lineare Differentialgleichung, der der integrirende Multiplicator genügt. Und umgekehrt, ist dieselbe erfüllt, und bestimmt man aus den $m-1$ ersten Gleichungen (11.) die Grössen l_α, so ist auch die letzte Gleichung (11.) erfüllt und nach Gleichung (10.) wird M integrirender Multiplicator zu $F_m(y)$. (Vgl. Abh. Bd. 75 No. 2.)

Es sei jetzt M_1 irgend ein Integral der Differentialgleichung (12.). Setzt man alsdann in derselben $M=M_1\int Z\,dx$ und bestimmt aus den Gleichungen (11.) die Grössen l, so erhält man mittels dieser Gleichungen

$$\frac{d^mM_1\int Z\,dx}{dx^m} = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left\{\frac{dM_1}{dx}\int Z\,dx+M_1Z\right\},$$

$$\frac{d^{m-1-\alpha}p_{\alpha+1}M_1\int Z\,dx}{dx^{m-1-\alpha}} = \frac{d^{m-1-\alpha}}{dx^{m-1-\alpha}}\left\{\frac{dM_1l_\alpha}{dx}\int Z\,dx+M_1l_{\alpha+1}\int Z\,dx\right\}$$

$$= \frac{d^{m-1-\alpha}}{dx^{m-1-\alpha}}\left\{\frac{dM_1l_\alpha}{dx}\int Z\,dx\right\}+\frac{d^{m-2-\alpha}}{dx^{m-2-\alpha}}\left\{\frac{dM_1l_{\alpha+1}}{dx}\int Z\,dx+M_1l_{\alpha+1}Z\right\},$$

$$\alpha = 0,\ \dots\ m-2$$

$$p_mM_1\int Z\,dx = \frac{dM_1l_{m-1}}{dx}\int Z\,dx.$$

Hierdurch geht die Differentialgleichung (12.) über in

$$(13.)\qquad \frac{d^{m-1}M_1Z}{dx^{m-1}}-\frac{d^{m-2}l_1M_1Z}{dx^{m-2}}+\cdots+(-1)^{m-1}l_{m-1}M_1Z=0.$$

Wird hier $M_1 Z = M^{(1)}$ gesetzt, so erhält man

$$(14.)\qquad \frac{d^{m-1}M^{(1)}}{dx^{m-1}} - \frac{d^{m-2}l_1 M^{(1)}}{dx^{m-2}} + \cdots + (-1)^{m-1} l_{m-1} M^{(1)} = 0.$$

Dieses ist aber die Differentialgleichung des integrirenden Factors zu $f_{m-1}(y) = 0$; dieselbe wird also aus (12.) erhalten durch die Substitution $M = M_1 \int M_1^{-1} M^{(1)} dx$.

Nun genügt der Differentialgleichung (12.) μ_m^{-1}. Nimmt man dieses für M_1, so wird $f_{m-1}(y) = F_{m-1}(y)$, und dann genügt der Gleichung (14.) μ_{m-1}^{-1}, also der Gleichung (12.) $\mu_m^{-1}\int \mu_m \mu_{m-1}^{-1} dx$. Reducirt man dann (14.) durch die Substitution $M^{(1)} = \mu_{m-1}^{-1}\int \mu_{m-1} M^{(2)} dx$, so ergiebt sich in gleicher Weise, dass der neuen Gleichung μ_{m-2}^{-1} genügt, und daher der Gleichung (12.) $\mu_m^{-1}\int dx\, \mu_m \mu_{m-1}^{-1}\int \mu_{m-1}\mu_{m-2}^{-1} dx$. Auf diese Weise findet man, dass die Integrale der Differentialgleichung (12.) sind:

$$(15.)\qquad M_1 = \mu_m^{-1},\ M_2 = \mu_m^{-1}\int \mu_m \mu_{m-1}^{-1} dx,\ \ldots\ M_m = \mu_m^{-1}\int dx\, \mu_m \mu_{m-1}^{-1} \ldots \int \mu_2 \mu_1^{-1} dx.$$

Statt dass man hier von den Integralen der Differentialgleichung (1.) unter der Form (8.) ausgegangen ist und mit Hülfe des Zusammenhanges der Differentialgleichungen (12.) und (14.) die Integrale (15.) der Gleichung (12.) hergeleitet hat, hätte man auch umgekehrt von letzteren Integralen ausgehen und mit Hülfe des genannten Zusammenhanges die Integrale (8.) herleiten können. Denn aus (10.) ergiebt sich, dass $F_m(y) = 0$ durch $f_{m-1}(y) = c_m \mu_m$ ersetzt wird, wo c_m eine Constante ist; dann genügt μ_{m-1}^{-1} der Gleichung (14.), und setzt man

$$\mu_{m-1}^{-1} f_{m-1}(y) = \frac{d}{dx}\left(\mu_{m-1}^{-1} f_{m-2}(y)\right),$$

so wird die vorige Differentialgleichung durch

$$f_{m-2}(y) = c_{m-1}\mu_{m-1} + c_m \mu_{m-1}\int \mu_{m-1}^{-1}\mu_m dx$$

ersetzt, etc. bis man schliesslich

$$y = c_1\mu_1 + c_2\mu_1\int \mu_1^{-1}\mu_2 dx + \cdots + c_m \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1}\mu_2 \ldots \int \mu_{m-1}^{-1}\mu_m dx$$

erhält, wo die Grössen c willkürliche Constanten sind.

Die Differentialgleichung (1.) ist umgekehrt die Differentialgleichung des integrirenden Factors zur Differentialgleichung (12.), wie schon *Lagrange* (Miscellanea Taurinensia T. III p. 181) bewiesen (vgl. Abh. Bd. 75 No. 3);

dieses lässt sich unmittelbar aus der Form der Coefficienten der beiden Differentialgleichungen zeigen. Da nun, wie hier bewiesen, die Integrale der einen sich aus den Ausdrücken der anderen herleiten lassen, so muss in der Herleitungsweise eine Reciprocität bestehen; was unmittelbar aus den Formen (8.) und (15.) hervortritt.

Man hat also das Resultat:

Die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = 0$$

und

$$\frac{d^m M}{dx^m}-\frac{d^{m-1}p_1 M}{dx^{m-1}}+\cdots+(-1)^m p_m M = 0,$$

von denen die eine die Differentialgleichung des integrirenden Multiplicators der anderen ist, haben die Eigenschaft, dass die Integrale der einen sich aus den Ausdrücken derer der anderen unmittelbar herleiten lassen; und zwar nehmen die Integrale die Form an

$$y_1=\mu_1,\quad y_2=\mu_1\int\mu_1^{-1}\mu_2\,dx,\quad \ldots\quad y_m=\mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\ldots\int\mu_{m-1}^{-1}\mu_m\,dx,$$

$$M_1=\mu_m^{-1},\quad M_2=\mu_m^{-1}\int\mu_m\mu_{m-1}^{-1}\,dx,\quad \ldots\quad M_m=\mu_m^{-1}\int dx\,\mu_m\mu_{m-1}^{-1}\ldots\int\mu_2\mu_1^{-1}\,dx,$$

aus welcher Form die Reciprocität in der Herleitungsweise der einen Integrale aus den anderen hervortritt. Dies beruht darauf, dass, wenn durch den integrirenden Factor M_1 die erste Differentialgleichung auf

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+l_1\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+l_{m-1}y = c_m M_1^{-1}$$

reducirt wird, wo c_m eine Constante ist, alsdann die Substitution

$$M=M_1\int M_1^{-1}M^{(1)}\,dx$$

die zweite auf

$$\frac{d^{m-1}M^{(1)}}{dx^{m-1}}-\frac{d^{m-2}l_1 M^{(1)}}{dx^{m-2}}+\cdots+(-1)^{m-1}l_{m-1}M^{(1)} = 0$$

reducirt, wo die Grössen l mit den Grössen p durch die Gleichungen (11.) *zusammenhängen.*

2.

Die beiden Differentialgleichungen

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = 0$$

und

$$(2.)\qquad \frac{d^m M}{dx^m}-\frac{d^{m-1}p_1 M}{dx^{m-1}}+\cdots+(-1)^m p_m M = 0$$

werden nach No. 1, wenn M_1 ein Integral der letzteren ist, und man die Gleichungen

$$(3.)\qquad \frac{d}{dx}(M_1 l_\alpha)+M_1 l_{\alpha+1} = M_1 p_{\alpha+1}\quad (\alpha=0,\dots m-2),\quad \frac{d}{dx}(M_1 l_{m-1}) = M_1 p_m,$$

wo $l_0=1$ ist, aufstellt, so reducirt, dass (1.) übergeht in

$$(4.)\qquad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+l_1\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+l_{m-1}y = c_m M_1^{-1},$$

wo c_m eine Constante, und (2.) durch die Substitution $M=M_1\int M_1^{-1}M^{(1)}dx$ übergeht in

$$(5.)\qquad \frac{d^{m-1}M^{(1)}}{dx^{m-1}}-\frac{d^{m-2}l_1 M^{(1)}}{dx^{m-2}}+\cdots+(-1)^{m-1}l_{m-1}M^{(1)} = 0.$$

Es werde nun diese Reduction successive k mal an den beiden Differentialgleichungen vorgenommen mittels der k Integrale der Differentialgleichung (2.):

$$(6.)\ M_1=\mu_m^{-1},\ M_2=\mu_m^{-1}\int\mu_m\mu_{m-1}^{-1}dx,\ \dots\ M_k=\mu_m^{-1}\int dx\,\mu_m\mu_{m-1}^{-1}\dots\int\mu_{m-k+2}\mu_{m-k+1}^{-1}dx.$$

Die homogene lineare Differentialgleichung k^{ter} Ordnung, die diese k Integrale enthält und die man von der Differentialgleichung erster Ordnung, der μ_{m-k+1}^{-1} genügt, ausgehend unter successiver Anwendung desselben Zusammenhanges, der zwischen (2.) und (5.) besteht, bildet, sei

$$(7.)\qquad \frac{d^k S}{dx^k}-\frac{d^{k-1}g_1 S}{dx^{k-1}}+\cdots+(-1)^k g_k S = 0.$$

Die abhängigen Variablen, in den Differentialgleichungen, die man durch die genannte Reduction aus (2.) herleitet, werden durch M, $M^{(1)}$, ... $M^{(k)}$ und die Coefficienten dieser Variablen bezüglich durch p_α, $p_\alpha^{(1)}$, ... $p_\alpha^{(k)}$ bezeichnet, so dass man nach k-maliger Reduction aus (2.) die Gleichung erhält:

$$(8.)\qquad \frac{d^{m-k}M^{(k)}}{dx^{m-k}}-\frac{d^{m-k-1}p_1^{(k)}M^{(k)}}{dx^{m-k-1}}+\cdots+(-1)^{m-k}p_{m-k}^{(k)}M^{(k)} = 0.$$

Ebenso werden bei Gleichung (7.) die entsprechenden Grössen durch S, $S^{(1)}$, ... $S^{(k)}$ und g_α, $g_\alpha^{(1)}$, ... $g_\alpha^{(k)}$ bezeichnet. Die Formeln, welche die Coefficienten der Variablen bestimmen, ergeben sich aus (3.):

$$(9.)\quad \begin{cases} p_\alpha \;\;= p_\alpha^{(1)}+\dfrac{dp_{\alpha-1}^{(1)}}{dx}+p_{\alpha-1}^{(1)}\dfrac{d\log\mu_m^{-1}}{dx}, & \alpha=1,\dots m, p_0^{(1)}=1, p_m^{(1)}=0,\\ p_\alpha^{(1)} = p_\alpha^{(2)}+\dfrac{dp_{\alpha-1}^{(2)}}{dx}+p_{\alpha-1}^{(2)}\dfrac{d\log\mu_{m-1}^{-1}}{dx}, & \alpha=1,\dots m-1, p_0^{(2)}=1, p_{m-1}^{(2)}=0,\\ \vdots & \\ p_\alpha^{(k-1)} = p_\alpha^{(k)}+\dfrac{dp_{\alpha-1}^{(k)}}{dx}+p_{\alpha-1}^{(k)}\dfrac{d\log\mu_{m-k+1}^{-1}}{dx}, & \alpha=1,\dots m-k+1, p_0^{(k)}=1, p_{m-k+1}^{(k)}=0. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung (1.) wird gleichzeitig durch successive Anwendung der integrirenden Factoren, die aus den Ausdrücken (6.) hervorgehen, reducirt auf

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{m-k}y}{dx^{m-k}}+p_1^{(k)}\dfrac{d^{m-k-1}y}{dx^{m-k-1}}+\cdots+p_{m-k}^{(k)}y \\ = c_{m-k+1}\mu_{m-k+1}+c_{m-k+2}\mu_{m-k+1}\int\mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}\,dx+\cdots \\ \cdots+c_m\mu_{m-k+1}\int dx\,\mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}\cdots\int\mu_{m-1}^{-1}\mu_m\,dx, \end{cases}$$

wo die c willkürliche Constanten. Die rechte Seite der Gleichung (10.) ist nach No. 1 das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$(11.)\quad \frac{d^k s}{dx^k}+g_1\frac{d^{k-1}s}{dx^{k-1}}+\cdots+g_k s = 0.$$

Bei einer anderen Wahl der Integrale der Gleichung (7.) bleibt die Grösse auf der rechten Seite von Gleichung (10.) dem Werthe nach die nämliche, und man kann ihr die nämliche Form geben, wenn man für die vorigen willkürlichen Constanten k neue einsetzt. Daher müssen auch die Coefficienten $p_\alpha^{(k)}$ auf der linken Seite in der neuen Differentialgleichung dieselben bleiben. Denn sonst erhielte man, wenn man letztere von Gleichung (10.) abzieht, alsdann k mal differentiirt, nachdem vorher jedesmal durch die Grösse μ, die nicht unter dem Integralzeichen steht, dividirt worden ist, eine homogene lineare Differentialgleichung von niedrigerer, als der m^{ten} Ordnung, der die m linearunabhängigen Integrale von Gleichung (1.) genügen müssen.

Die Grössen $p_\alpha^{(k)}$ sind also von der Wahl der Integrale der Gleichung (7.) *unabhängig.*

Um andererseits aus (9.) die Formel zu finden, die p_α durch $p_\alpha^{(k)}$ ausdrückt, wenden wir die Induction an. Es ist zuerst nach der letzten der Gleichungen (9.):

$$p_\alpha^{(k-1)} = p_\alpha^{(k)}+\frac{dp_{\alpha-1}^{(k)}}{dx}+p_{\alpha-1}^{(k)}g_1^{(k-1)},\quad \alpha=1,\ldots m-k+1,\quad p_0^{(k)}=1,\quad p_{m-k+1}^{(k)}=0.$$

Setzt man diesen Ausdruck von $p_\alpha^{(k-1)}$ in die vorletzte Gleichung (9.) ein, so erhält man:

$$p_\alpha^{(k-2)} = p_\alpha^{(k)}+2\frac{dp_{\alpha-1}^{(k)}}{dx}+\frac{d^2p_{\alpha-2}^{(k)}}{dx^2}+\left\{p_{\alpha-1}^{(k)}+\frac{d}{dx}p_{\alpha-2}^{(k)}\right\}\left\{g_1^{(k-1)}+\frac{d\log\mu_{m-k+2}^{-1}}{dx}\right\}$$
$$+p_{\alpha-2}^{(k)}\left\{\frac{dg_1^{(k-1)}}{dx}+g_1^{(k-1)}\frac{d\log\mu_{m-k+2}^{-1}}{dx}\right\}$$

oder

$$p_a^{(k-2)} = p_a^{(k)}+2\frac{dp_{a-1}^{(k)}}{dx}+\frac{d^2p_{a-2}^{(k)}}{dx^2}+\left\{p_{a-1}^{(k)}+\frac{d}{dx}p_{a-2}^{(k)}\right\}g_1^{(k-2)}+p_{a-2}^{(k)}g_2^{(k-2)},$$

$a=1, \dots m-k+2$, wo

$$p_0^{(k)}=1,\quad p_{-1}^{(k)}=p_{m-k+1}^{(k)}=p_{m-k+2}^{(k)}=0$$

ist.

Man findet nun auf diese Weise durch Induction folgenden Ausdruck für p_a durch $p_a^{(k)}$, den wir durch den Schluss von $k-1$ auf k beweisen werden. Man bezeichne symbolisch den Ausdruck

$$(12.)\qquad z_a+r\frac{dz_{a-1}}{dx}+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{d^2z_{a-2}}{dx^2}+\cdots+\frac{d^rz_{a-r}}{dx^r}$$

durch

$$\left(1+\frac{dz_a}{dx}\right)_{(r)},$$

wo $\frac{d^0z_a}{dx^0}=z_a$ zu nehmen ist. Für denselben gilt die Relation

$$(13.)\qquad \left(1+\frac{dz_a}{dx}\right)_{(r)} = \left(1+\frac{dz_a}{dx}\right)_{(r-1)}+\frac{d}{dx}\left(1+\frac{dz_{a-1}}{dx}\right)_{(r-1)}.$$

Dann wird die Formel für p_a folgende:

$$(14.)\qquad \begin{cases} p_a = \left(1+\frac{d}{dx}p_a^{(k)}\right)_{(k)}+\left(1+\frac{d}{dx}p_{a-1}^{(k)}\right)_{(k-1)}g_1+\left(1+\frac{d}{dx}p_{a-2}^{(k)}\right)_{(k-2)}g_2+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+p_{a-k}^{(k)}g_k = \sum_0^k{}_b\left(1+\frac{d}{dx}p_{a-b}^{(k)}\right)_{(k-b)}g_b, \end{cases}$$

$a=1, \dots m$, wo

$$g_0=p_0^{(k)}=1,\quad p_{-1}^{(k)}=\cdots=p_{-k+1}^{(k)}=p_{m-k+1}^{(k)}=\cdots=p_m^{(k)}=0$$

zu setzen ist. Um diese Formel durch den Schluss von $k-1$ auf k zu beweisen, nehmen wir an, dass sie bereits bewiesen sei für den Ausdruck der Grössen $p_a^{(1)}$ durch $p_a^{(k)}$. Man würde dann die Formel haben

$$(15.)\qquad p_a^{(1)} = \sum_0^{k-1}{}_b\left(1+\frac{d}{dx}p_{a-b}^{(k)}\right)_{(k-1-b)}g_b^{(1)},$$

$a=1, \dots m-1$, wo

$$g_0^{(1)}=p_0^{(k)}=1,\quad p_{-1}^{(k)}=\cdots=p_{-k+2}^{(k)}=p_{m-k+1}^{(k)}=\cdots=p_{m-1}^{(k)}=0$$

ist. Setzt man diesen Ausdruck von $p_a^{(1)}$ in die erste der Gleichungen (9.) ein, so erhält man, wenn noch $p_{-k+1}^{(k)}=p_m^{(k)}=0$ gesetzt werden, für $a=1, \dots m$

$$(16.)\qquad \begin{cases} p_a = \sum_0^{k-1}{}_b\left\{\left(1+\frac{d}{dx}p_{a-b}^{(k)}\right)_{(k-1-b)}+\frac{d}{dx}\left(1+\frac{d}{dx}p_{a-1-b}^{(k)}\right)_{(k-1-b)}\right\}g_b^{(1)} \\ \qquad +\sum_0^{k-1}{}_b\left(1+\frac{d}{dx}p_{a-1-b}^{(k)}\right)_{(k-1-b)}\left\{\frac{dg_b^{(1)}}{dx}+g_b^{(1)}\frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx}\right\} \end{cases}$$

oder unter Berücksichtigung von (13.), wenn $g_{-1}^{(1)} = g_k^{(1)} = 0$ gesetzt wird:

$$(17.)\qquad p_{\mathfrak{a}} = \sum_0^k{}_{\mathfrak{b}} \left(1+\frac{d}{dx} p_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}^{(k)}\right)_{(k-\mathfrak{b})} \left\{g_{\mathfrak{b}}^{(1)} + \frac{dg_{\mathfrak{b}-1}^{(1)}}{dx} + g_{\mathfrak{b}-1}^{(1)} \frac{d\log \mu_m^{-1}}{dx}\right\},$$

und dies giebt, wenn $g_0 = 1$ genommen wird,

$$(18.)\qquad p_{\mathfrak{a}} = \sum_0^k{}_{\mathfrak{b}} \left(1+\frac{d}{dx} p_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}^{(k)}\right)_{(k-\mathfrak{b})} g_{\mathfrak{b}},$$

was mit Formel (14.) genau übereinstimmt.

In Formel (14.) *treten als Coefficienten die Grössen $g_{\mathfrak{a}}$ aus Differentialgleichung* (7.) *ein, und durch die $m-k$ ersten Gleichungen* (14.) *werden die Grössen $p_{\mathfrak{a}}^{(k)}$ successive eindeutig und zwar als ganze rationale Functionen der Grössen $p_{\mathfrak{a}}$ und $g_{\mathfrak{a}}$ und deren Differentialquotienten bestimmt. Es ergiebt sich also wiederum, dass die Grössen $p_{\mathfrak{a}}^{(k)}$ unabhängig von der Wahl der Integrale der Gleichung* (7.) *und ausser von $p_{\mathfrak{a}}$ nur von den Coefficienten $g_{\mathfrak{a}}$ abhängig sind.*

Die Grössen $g_{\mathfrak{a}}$ gehen aus den k ersten Gleichungen (14.) eindeutig hervor.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass in den Integralen der Differentialgleichung (2.), die durch Formel (15.) in No. 1 gegeben sind, die k ersten Grössen μ durch solche ersetzt werden können, welche aus beliebigen k Integralen der Gleichung (7.) successive hervorgehen, während die folgenden Grössen μ *unverändert* bleiben.

Wenn man die Grössen $p_{\mathfrak{a}}^{(k)}$ und $g_{\mathfrak{a}}$ willkürlich giebt, alsdann die Ordnung der Gleichung (8.) successive um k erhöht, indem man die Integrale von (7.) einführt, vermittelst der Formeln (9.) von der letzten angefangen, so erhält man eine Differentialgleichung von der Form (2.), worin $p_{\mathfrak{a}}$ durch (14.) gegeben werden. Und wenn man entsprechend mittels der Grössen $p_{\mathfrak{a}}^{(k)}$ und der Integrale von Gleichung (7.) die Gleichung (10.) bildet und dieselbe k mal differentiirt, nachdem vorher jedesmal durch die Grösse μ, die nicht unter dem Integralzeichen steht, dividirt worden ist, so erhält man eine Gleichung der Form (1.), welche dasselbe vollständige Integral wie (10.) enthält, und deren Coefficienten $p_{\mathfrak{a}}$ durch (14.) bestimmt werden.

Wird in der Folge *von einer homogenen linearen Differentialgleichung* (7.), *deren Integrale sämmtlich in einer anderen* (2.) *enthalten sind,* gesagt, dass *vermittelst der Integrale jener diese Differentialgleichung* (2.) *oder diejenige* (1.), *zu welcher die letztere* (2.) *die Differentialgleichung des integrirenden Factors ist, reducirt werde,* so wird darunter bei der ersteren (2.) dieser beiden das Verfahren verstanden, welches auf Gleichung (8.) führt, bei der zweiten

(1.) dasjenige, welches die Gleichung (10.) ergiebt, wo in dieser, wenn von homogenen Differentialgleichungen die Rede ist, die Constanten der rechten Seite gleich Null zu setzen sind.

3.

In den Differentialgleichungen

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = 0$$

und

$$(2.)\qquad \frac{d^m M}{dx^m}-\frac{d^{m-1}p_1 M}{dx^{m-1}}+\cdots+(-1)^m p_m M = 0$$

werden nun die Grössen p_α als in der Umgebung von $x=a$ einwerthige und abgesehen von diesem Punkte stetige Functionen des complexen Argumentes x vorausgesetzt, ferner seien sie für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich. Dasselbe finde für die Coefficienten g_α von S in der Differentialgleichung

$$(3.)\qquad \frac{d^k S}{dx^k}-\frac{d^{k-1}g_1 S}{dx^{k-1}}+\cdots+(-1)^k g_k S = 0$$

statt, deren Integrale der Differentialgleichung (2.) genügen sollen.

Einem beliebigen System linearunabhängiger Integrale einer solchen Differentialgleichung (Vgl. Abh. Bd. 74, No. 1) kann man sofort die Form der Integrale (8.) in No. 1 geben, wo alsdann die Grössen μ Functionen des complexen Argumentes x sind, die in der Umgebung von $x=a$, in Punkten unstetig, sich um $x=a$ herum verzweigen (Vgl. ausserdem Abh. Bd. 75, No. 8). Man reducire nun mittels der Differentialgleichung (3.) die Gleichungen (1.) und (2.) nach der vorigen Nummer, dann sind die neuen Coefficienten $p_\alpha^{(k)}$ durch die $m-k$ ersten Gleichungen (14.) der No. 2 eindeutig als ganze rationale Functionen von p_α und g_α und deren Differentialquotienten bestimmt und haben daher in der Umgebung von $x=a$ dasselbe Verhalten, welches von letzteren Grössen vorausgesetzt ist.

Es sei nun der charakteristische Index (Abh. Bd. 75, No. 1 u. 4) *in der Differentialgleichung* (3.) *h' und in den reducirten*

$$(4.)\qquad \frac{d^{m-k} y}{dx^{m-k}}+p_1^{(k)}\frac{d^{m-k-1}y}{dx^{m-k-1}}+\cdots+p_{m-k}^{(k)} y = 0$$

und

$$(5.)\qquad \frac{d^{m-k} M^{(k)}}{dx^{m-k}}-\frac{d^{m-k-1}p_1^{(k)} M^{(k)}}{dx^{m-k-1}}+\cdots+(-1)^{m-k} p_{m-k}^{(k)} M^{(k)} = 0$$

gleich $h-h'$, so ist derselbe in den Gleichungen (1.) *und* (2.) *gleich h.*

Dieses ergiebt sich aus Formel (14.) der vorigen Nummer. Man hat also die zu den Coefficienten $p_\mathfrak{a}$ der Differentialgleichung (1.) gehörigen Zahlen (Abh. Bd. 75, No. 1) $\pi_\mathfrak{a}+m-\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=0,\dots m)$ zu untersuchen, und zuzusehen, bei welchem Index $\mathfrak{a}$ zuerst die grösste dieser Zahlen auftritt. Die zu den Coefficienten $g_\mathfrak{a}$ der Differentialgleichung

$$(6.)\qquad \frac{d^k s}{dx^k}+g_1\frac{d^{k-1}s}{dx^{k-1}}+\cdots+g_k s = 0$$

gehörigen Zahlen seien $\gamma_\mathfrak{a}+k-\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=0,\dots k)$ und die zu den Coefficienten $p_\mathfrak{a}^{(k)}$ der Gleichung (4.) gehörigen $\pi_\mathfrak{a}^{(k)}+m-k-\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=0,\dots m-k)$.

Bildet man nun aus Formel (14.) in No. 2 den Ausdruck

$$(7.)\qquad p_\mathfrak{a}(x-a)^{-(m-\mathfrak{a})} = \sum_0^k{}_\mathfrak{b}\Big(1+\frac{d}{dx}p_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}^{(k)}\Big)_{(k-\mathfrak{b})}(x-a)^{-(m-\mathfrak{a})+k-\mathfrak{b}}g_\mathfrak{b}(x-a)^{-(k-\mathfrak{b})}$$

für $\mathfrak{a}=0,\dots m$, worin noch $p_0=1$, $p_{-k}^{(k)}=0$ zu setzen ist, und untersucht denselben in Bezug auf den höchsten positiven Exponenten von $(x-a)^{-1}$, bezeichnet die grösste der zu den Coefficienten $p_0^{(k)}$ bis $p_\mathfrak{c}^{(k)}$ gehörigen Zahlen durch $P_\mathfrak{c}$ und setzt $P_{-1}=\cdots=P_{-k}=0$, $P_{m-k}=\cdots=P_{m-k+1}=P_m$, so ergiebt sich, dass jener höchste Exponent auf der rechten Seite höchstens gleich sein kann der grössten der Zahlen

$$P_\mathfrak{a}+\gamma_0+k,\quad P_{\mathfrak{a}-1}+\gamma_1+k-1,\quad \dots\quad P_{\mathfrak{a}-k}+\gamma_k.$$

Der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$, der für $\mathfrak{a}=0,\dots m$ in der That auf der rechten Seite vorkommt, kann demnach höchstens gleich der Summe der grössten der zu den Coefficienten $p_\mathfrak{a}^{(k)}$ und $g_\mathfrak{a}$ gehörigen Zahlen sein. Diese Summe wird aber erreicht und zuerst für $\mathfrak{a}=h$ in $P_{h-h'}+\gamma_{h'}+k-h'$ aus den Summanden $p_{h-h'}^{(k)}$, $g_{h'}$. Die Summe der grössten der zu den Coefficienten $p_\mathfrak{a}^{(k)}$ und $g_\mathfrak{a}$ gehörigen Zahlen ist demnach die grösste der zu den Coefficienten $p_\mathfrak{a}$ gehörigen Zahlen und der charakteristische Index derselben h, und da also

$$\pi_h+m-h = (\pi_{h-h'}^{(k)}+m-k-(h-h'))+(\gamma_{h'}+k-h'),$$

so wird $\pi_h=\pi_{h-h'}^{(k)}+\gamma_{h'}$ und es ist

$$[p_{h-h'}^{(k)}(x-a)^{\pi_{h-h'}^{(k)}}]_{x=a}\cdot[g_{h'}(x-a)^{\gamma_{h'}}]_{x=a} = [p_h(x-a)^{\pi_h}]_{x=a}.$$

Es folgt hieraus: *Wenn der Differentialgleichung* (2.) *mit dem charakteristischen Index h die sämmtlichen Integrale einer Differentialgleichung k^{ter} Ordnung* (3.) *mit dem charakteristischen Index h' genügen, so genügen der Differentialgleichung* (1.) *die sämmtlichen Integrale einer Differentialgleichung $(m-k)^{ter}$ Ordnung mit dem charakteristischen Index $h-h'$ und umgekehrt, da* *die Differentialgleichung* (1.) *Differentialgleichung des integrirenden Factors von* (2.) *ist.*

Wenn in Differentialgleichung (3.) *der charakteristische Index gleich der Ordnung k ist und man mittels derselben die Differentialgleichung* (1.) *reducirt, so dass man die Differentialgleichung* (10.) *der No. 2 erhält, so können die regulären Integrale* (Abh. Bd. 75, No. 1) *der Differentialgleichung* (1.) *der vorliegenden Nummer nur in Differentialgleichung* (4.) *dieser Nummer enthalten sein.* Denn die rechte Seite der Gleichung (10.) der No. 2 kann für Werthe der Constanten, die von Null verschieden sind, keinem Ausdruck von der Form der regulären Integrale gleich sein, weil sie Integral der Gleichung (6.) der vorliegenden Nummer ist, die, weil der charakteristische Index mit der Ordnung übereinstimmt, keine regulären Integrale hat (Abh. Bd. 75, No. 1). —

Die algebraische Gleichung, welche die Exponenten der etwa vorhandenen regulären Integrale von Differentialgleichung (1.) bestimmt, ist, wenn der charakteristische Index h ist, (Abh. Bd. 74, No. 6)

$$(8.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-(m-h)+1)[p_h(x-a)^{\pi_h}]_{x=a} \\ +r(r-1)\dots(r-(m-h)+2)[p_{h+1}(x-a)^{\pi_h+1}]_{x=a}+\dots+[p_m(x-a)^{\pi_h+m-h}]_{x=a}=0. \end{cases}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien

$$(9.)\quad r_1,\; r_2,\; \dots\; r_{m-h}.$$

Die dieser algebraischen Gleichung entsprechende, welche zur Differentialgleichung (2.) gehört, geht, wie man durch eine einfache Rechnung findet, aus (8.) hervor, wenn man r durch $-\varrho-1+\pi_h+m-h$ ersetzt, wo $\pi_h+m-h=G$ die grösste der zu den Coefficienten p_α gehörigen Zahlen ist, so dass die Wurzeln von letzterer Gleichung werden

$$(10.)\quad \varrho_1=-r_1-1+G,\quad \dots\quad \varrho_{m-h}=-r_{m-h}-1+G.$$

Stellt man nun bei den Differentialgleichungen (4.) und (6.) die entsprechenden, die Exponenten der regulären Integrale bestimmenden algebraischen Gleichungen auf, so findet man, wenn man in Gleichung (8.) für $p_{h+\alpha}$ die Ausdrücke (14.) in No. 2 einsetzt, nach einigen einfachen Umformungen, dass die Wurzeln (9.) der Gleichung (8.) folgende sind: Die Wurzeln der zu der reducirten Differentialgleichung (4.) gehörenden algebraischen Gleichung unverändert, und die Wurzeln der zu der Differentialgleichung (6.) gehörenden Gleichung, letztere Wurzeln vermehrt um die grösste der zu den Coefficienten $p_\alpha^{(k)}$ gehörenden Zahlen. Die Wurzeln der zu den Differentialgleichungen (2.), (3.) und (5.) gehörenden algebraischen Gleichungen sind vermittelst der Ausdrücke (10.) und der entsprechenden zu den Differentialgleichungen (3.) und (5.) gehörigen Ausdrücke bestimmt durch die Wurzeln der zu den Differentialgleichungen (1.), (4.) und (6.) gehörenden Gleichungen, und es ist nach dem Vorstehenden $\pi_h = \pi^{(k)}_{h-h'} + \gamma_{h'}$. Daraus ergiebt sich alsdann entsprechend, dass die Wurzeln (10.) folgende sind: die Wurzeln der zur reducirenden Differentialgleichung (3.) gehörigen algebraischen Gleichung unverändert und die Wurzeln der zur reducirten Differentialgleichung (5.) gehörenden Gleichung, letztere Wurzeln vermehrt um die grösste der zu den Coefficienten g_α gehörigen Zahlen.

4.

Die Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0,$$

über deren Coefficienten dieselben Voraussetzungen wie in der vorigen Nummer gemacht werden und die den charakteristischen Index h hat, besitze nun $m-h$ linearunabhängige reguläre Integrale, so viele, als sie deren überhaupt haben kann (Abh. Bd. 75, No. 1). Diese genügen einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem charakteristischen Index gleich Null (Abh. Bd. 75, No. 5). Alsdann müssen nach der vorigen Nummer in der Differentialgleichung

$$(2.)\qquad \frac{d^m M}{dx^m} - \frac{d^{m-1} p_1 M}{dx^{m-1}} + \cdots + (-1)^m p_m M = 0$$

die sämmtlichen Integrale einer Differentialgleichung h^{ter} Ordnung mit dem charakteristischen Index h

$$(3.)\qquad \frac{d^h S}{dx^h} - \frac{d^{h-1} g_1 S}{dx^{h-1}} + \cdots + (-1)^h g_h S = 0$$

enthalten sein. Und umgekehrt ist dieses der Fall, so enthält die Differentialgleichung (1.) die Integrale einer Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem charakteristischen Index Null und besitzt $m-h$ linearunabhängige reguläre Integrale. Man hat also den Satz:

Wenn die Differentialgleichung (1.) *mit dem charakteristischen Index h $m-h$ linearunabhängige reguläre Integrale hat, so enthält* (2.) *die Integrale einer Differentialgleichung h^{ter} Ordnung mit dem charakteristischen Index h und* *umgekehrt*: Für den Fall $h=1$ war dieser Satz in No. 5 der Abh. Bd. 75 dieses Journals enthalten. Es kann nur *eine* Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem charakteristischen Index gleich Null geben, deren Integrale in (1.) enthalten sind; da diese die $m-h$ regulären von (1.) sind. Und daher kann es auch nur *eine* Differentialgleichung h^{ter} Ordnung mit dem charakteristischen Index gleich h geben, deren Integrale in (2.) enthalten sind. Denn reducirt man mit dieser die Gleichung (1.) und setzt in Formel (14.) No. 2 für $k=h$ in $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ die Coefficienten der Differentialgleichung der regulären Integrale, so werden die Grössen $g_\mathfrak{a}$ durch die h ersten Gleichungen successive eindeutig als Functionen von $p_\mathfrak{a}$ und $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ bestimmt.

Wenn die Gleichung (3.) existirt, so müssen die Integrale jeder Gleichung, deren Ordnung gleich dem charakteristischen Index ist, die in Gleichung (2.) enthalten sind, auch in (3.) enthalten sein. Denn reducirt man mit den Integralen der neuen Gleichung die Gleichung (2.), alsdann die durch diese Reduction erhaltene Gleichung mittels der regulären Integrale von Gleichung (1.), was nach No. 3 angeht, und stellt auf diese Weise die Integrale von (2.) schliesslich unter der Form (15.) in No. 1 auf, so ergiebt sich, dass die untersuchten Integrale in Gleichung (3.) enthalten sein müssen. —

Wenn die Differentialgleichung (1.) $m-h$ linearunabhängige reguläre Integrale enthalten soll und die Gleichung, der dieselben genügen,

$$(4.)\qquad \frac{d^{m-h}y}{dx^{m-h}}+p_1^{(h)}\frac{d^{m-h-1}y}{dx^{m-h-1}}+\cdots+p_{m-h}^{(h)}y = 0$$

ist, so muss nach Abh. Bd. 75 No. 5

$$[p_\mathfrak{a}^{(h)}(x-a)^\mathfrak{a}]_{x=a} = \left[\frac{p_{h+\mathfrak{a}}}{p_h}(x-a)^\mathfrak{a}\right]_{x=a}$$

sein. Bestimmt man mit diesen Anfangswerthen der Grössen $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ aus den h ersten Gleichungen in Formel (14.) No. 2 für $h=k$, die Werthe der h Grössen $g_\mathfrak{a}$, so weit dieselben sich ermitteln lassen, so sind die folgenden Gleichungen in (14.) immer, so weit die Werthe der Summanden bekannt sind, auch erfüllt. Denn da der charakteristische Index bei den Coefficienten $g_\mathfrak{a}$ gleich h ist, so ist (No. 3) $\pi_h=\gamma_h$ und $[p_h(x-a)^{\pi_h}]_{x=a}=[g_h(x-a)^{\pi_h}]_{x=a}$. Auf der rechten Seite in der $h+1$ Gleichung in Formel (14.) in No. 2 und den folgenden Gleichungen ist aus dem letzten Summanden $p_{\mathfrak{a}-h}^{(h)}g_h(\mathfrak{a}-h=\mathfrak{c}=1,\dots m-h)$ nur der Coëfficient von $(x-a)^{-(\pi_h+\mathfrak{c})}$ der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in der Gleichung vorkommen kann, bekannt, nämlich

$$[p_\mathfrak{c}^{(h)}(x-a)^\mathfrak{c}]_{x=a}\cdot[g_h(x-a)^{\pi_h}]_{x=a} = [p_{h+\mathfrak{c}}(x-a)^{\pi_h+\mathfrak{c}}]_{x=a}.$$

Auf der linken Seite steht $p_{h+\varepsilon}$, worin die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$, die vorkommen kann, dieselbe ist, mit demselben Coefficienten. —

Man kann nun, wenn eine beliebige Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem charakteristischen Index gleich 0, deren Integrale in Gleichung (1.) enthalten sein sollen und eine Differentialgleichung h^{ter} Ordnung mit dem charakteristischen Index gleich h, deren Integrale in Gleichung (2.) enthalten sein sollen, gegeben sind, nach den Sätzen am Schlusse von No. 2 die Differentialgleichungen (1.) und (2.) mit dem charakteristischen Index gleich h so bestimmen, dass sie diese Eigenschaften haben. Will man demnach, um zu erkennen, ob Gleichung (1.) soviele regulären Integrale hat, als sie höchstens haben kann, untersuchen, ob der Gleichung (2.) die Integrale einer Gleichung h^{ter} Ordnung mit dem charakteristischen Index gleich h Genüge leisten, so ist zu bemerken, dass letztere jede beliebige dieser Art sein kann. Es würde daher, wenn $h>1$ ist (der Fall $h=1$ ist in Abh. Bd. 75 No. 5 behandelt) allgemein genommen die umgekehrte Untersuchung leichter sein, da (vgl. Abh. Bd. 74 No. 8) für die regulären Integrale formelle Entwickelungen existiren, auf deren Convergenz es ankommt.

Nun kann man aber mit den in No. 2 entwickelten Grundsätzen allgemeinere Integrale, als die regulären, solche, die letztere umfassen, untersuchen, wodurch zugleich Mittel gewonnen werden, in vielen Fällen zu erkennen, ob die Differentialgleichung (2.) die Integrale einer Differentialgleichung h^{ter} Ordnung mit dem charakteristischen Index h enthält. Hierzu dienen die Sätze der folgenden Nummer.

5.

In der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^m M}{dx^m}-\frac{d^{m-1}p_1 M}{dx^{m-1}}+\cdots+(-1)^m p_m M = 0$$

seien die Coefficienten von M in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und p_1 bis p_{m-k} für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich. Die Differentialgleichung besitze nun k Integrale

$$(2.)\quad M_1=\mu_m^{-1},\ M_2=\mu_m^{-1}\int\mu_m\mu_{m-1}^{-1}dx,\ \ldots\ M_k=\mu_m^{-1}\int dx\,\mu_m\mu_{m-1}^{-1}\ldots\int\mu_{m-k+2}\mu_{m-k+1}^{-1}dx,$$

in denen die Grössen $\mu_{m-\alpha}^{-1}$ so beschaffen seien, dass $\dfrac{d\log\mu_{m-\alpha}^{-1}}{dx}$ in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich sei.

Wenn dies der Fall ist, so folgt zunächst aus den Formeln (9.) in No. 2, dass *die Grössen* p_{m-k+1} *bis* p_m *für* $x=a$ *ebenfalls in endlicher Ordnung unendlich werden.* Ferner ergiebt sich aus No. 3, dass bei der Reduction der Gleichung (1.) durch die Integrale M_1 bis M_k, so oft $\frac{d\log\mu_{m-\alpha}^{-1}}{dx}$ in nicht höherer, als der ersten Ordnung unendlich ist, der charakteristische Index der vorhergehenden Differentialgleichung in der neuen unverändert bleibt, wenn dagegen $\frac{d\log\mu_{m-\alpha}^{-1}}{dx}$ in höherer, als der ersten Ordnung unendlich ist, derselbe um eine Einheit erniedrigt wird. Wenn demnach von letzteren Grössen μ, h' vorkommen, so muss der *charakteristische Index in Gleichung* (1.) $\geqq h'$ *und* $\leqq m-k+h'$ *sein.*

Die Integrale (2.) genügen einer Differentialgleichung k^{ter} Ordnung:

$$(3.)\qquad \frac{d^kS}{dx^k}-\frac{d^{k-1}g_1S}{dx^{k-1}}+\cdots+(-1)^kg_kS = 0,$$

in welcher die Grössen g_α für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich werden.

Es soll nun die Differentialgleichung, die man aus (1.) *nach der Reduction durch die Integrale* (2.) *erhält:*

$$(4.)\qquad \frac{d^{m-k}M^{(k)}}{dx^{m-k}}-\frac{d^{m-k-1}p_1^{(k)}M^{(k)}}{dx^{m-k-1}}+\cdots+(-1)^{m-k}p_{m-k}^{(k)}M^{(k)} = 0,$$

kein Integral mehr von der Beschaffenheit von M_1 *besitzen.*

I. *Wenn man dann irgend ein Integral der Gleichung* (1.) $\mathfrak{M}$ *hat, so dass* $\frac{d\log\mathfrak{M}}{dx}$ *in der Umgebung von* $x=a$ *einwerthig und für* $x=a$ *in endlicher Ordnung unendlich ist, so kann man immer k Integrale der Gleichung* (3.) *unter der Form* (2.) *aufstellen, worin die Grössen* μ *die bei* (2.) *angegebene Beschaffenheit haben, und wo* $M_1=\mathfrak{M}$ *ist.*

Um dies zu zeigen, ist zu bemerken, dass $\mathfrak{M}$, welches von der Form

$$e^w(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha,\quad w = 0 \quad\text{oder}\quad \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$$

ist, in dem Ausdrucke

$$(5.)\qquad \mathfrak{M} = \mu_m^{-1}\int dx\,\mu_m\mu_{m-1}^{-1}\ldots\int c\,\mu_{m-r+2}\mu_{m-r+1}^{-1}dx,$$

$r\leqq k$, wo c eine bestimmte, von Null verschiedene Constante ist, enthalten sein muss; wie sich aus der Form von $\mathfrak{M}$ und der Voraussetzung ergiebt, dass Gleichung (4.) kein Integral dieser Form mehr enthalten soll. Durch Reduction der Gleichung (3.) mittels der Integrale M_1 bis M_r entsteht eine

Gleichung, in welcher die Coefficienten nach No. 2 unabhängig von der Wahl der Integrale M_1 bis M_r sind und ausser von g_α nur abhängig von den Coefficienten der Differentialgleichung r^{ter} Ordnung, der M_1 bis M_r genügen. Man kann also zur Reduction von Gleichung (3.) die Integrale M_1 bis M_r durch andere dieser Differentialgleichung r^{ter} Ordnung ersetzen; wobei in den Integralen (2.) μ_{m-r}^{-1} und die folgenden Grössen μ unverändert bleiben. Bildet man nun aus Gleichung (5.) die Grösse

$$\mu_{m-r+2}^{-1}\int c\,\mu_{m-r+2}\,\mu_{m-r+1}^{-1}\,dx = \mathfrak{M}^{(r-2)},$$

so ist diese so beschaffen, dass $\dfrac{d\log\mathfrak{M}^{(r-2)}}{dx}$ in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich ist. Man kann daher μ_{m-r+2}^{-1} durch $\mathfrak{M}^{(r-2)}\int(\mathfrak{M}^{(r-2)})^{-1}\mathfrak{M}^{(r-1)}\,dx$ ausdrücken, wo $\dfrac{d\log\mathfrak{M}^{(r-1)}}{dx}$ ebenso beschaffen ist: also den ganzen Ausdruck

$$\mu_{m-r+2}^{-1}\int k\,\mu_{m-r+2}\,\mu_{m-r+1}^{-1}\,dx$$

durch

$$\mathfrak{M}^{(r-2)}\int k'(\mathfrak{M}^{(r-2)})^{-1}\mathfrak{M}^{(r-1)}\,dx$$

ersetzen, wo k und k' willkürliche Constanten sind. Dann hat man statt der Integrale M_1 bis M_r zur Reduction die Integrale aus dem Ausdrucke

$$(6.)\qquad \mu_m^{-1}\int dx\,\mu_m\,\mu_{m-1}^{-1}\ldots\int dx\,\mu_{m-r+3}\,\mathfrak{M}^{(r-2)}\int k'(\mathfrak{M}^{(r-2)})^{-1}\mathfrak{M}^{(r-1)}\,dx$$

zu nehmen, wobei

$$(7.)\qquad \mathfrak{M} = \mu_m^{-1}\int dx\,\mu_m\,\mu_{m-1}^{-1}\ldots\int\mu_{m-r+3}\,\mathfrak{M}^{(r-2)}\,dx.$$

Man kann nun in gleicher Weise die $r-1$ ersten Integrale in (6.) durch andere der Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ersetzen, welchen dieselben genügen, und indem dasselbe Verfahren fortgesetzt wird, tritt $\mathfrak{M}$ zuletzt an die Spitze der Integrale der Gleichung (3.)

II. *Aus dem genannten Satze folgt, dass, wenn man ein Integral der Gleichung* (1.) *von der Form*

$$(8.)\qquad \mu_1'\int dx\,(\mu_1')^{-1}\mu_2'\ldots\int(\mu_{i-1}')^{-1}\mu_i'\,dx$$

hat, worin die Grössen μ' dieselbe Beschaffenheit, wie bei den Integralen (2.) *haben, es k Integrale der Differentialgleichung* (3.) *von der Form und Be-*

schaffenheit der Integrale (2.) *giebt, worin* $k \geqq i$ *ist und die* i *ersten Grössen* μ *der Reihe nach mit den Grössen* μ' *in* (8.) *übereinstimmen.*

Nach dem vorigen Satze hat man nämlich k Integrale von der Form und Beschaffenheit der Integrale (2.) von der Gleichung (3.), worin $M_1 = \mu'_1$. Reducirt man mit diesen die Gleichung (1.), so erhält man, da die Coefficienten der reducirten ausser von p_a nur von g_a abhängen, Gleichung (4.), die kein Integral von der Beschaffenheit von M_1 enthält. Reducirt man nun die beiden Differentialgleichungen (1.) und (3.) mittels des Integrales μ'_1, so enthält die aus Gleichung (1.) hervorgehende $k-1$ Integrale von der Form und der Beschaffenheit der Integrale (2.), diese genügen der aus Gleichung (3.) entstehenden. Alsdann werden diese $k-1$ Integrale durch andere derselben Art ersetzt, an deren Spitze μ'_2 steht, und indem man in gleicher Weise fortfährt, erhält man den zu beweisenden Satz.

III: *Die Sätze* I. *und* II. *gelten unverändert und werden auf dieselbe Weise bewiesen, wenn man voraussetzt, dass bei den sämmtlichen Grössen* μ *in* (2.) $\frac{d \log \mu}{dx}$ *in endlicher, aber höherer, als der ersten Ordnung unendlich werde, die Gleichung* (4.) *kein Integral mehr von dieser Beschaffenheit von* M_1 *besitze, und wenn man über die Grösse* $\mathfrak{M}$ *in Satz* I. *und die Grössen* μ' *in Satz* II. *dieselben Voraussetzungen wie über* μ *macht.*

Bei dem Beweise ist zu berücksichtigen, dass die Grössen μ, $\mathfrak{M}$, μ' die Form

$$e^{w}(x-a)^{r}\sum_{0}^{\infty} c_a (x-a)^{a}, \quad w = \sum_{1} c_{-a}(x-a)^{-a}$$

haben, und dass die Grössen w bei den Umformungen der Integrale unverändert bleiben.

IV. *Ebenso gelten die Sätze* I. *und* II. *unverändert, wenn man voraussetzt, dass bei sämmtlichen* μ *in* (2.) $\frac{d \log \mu}{dx}$ *in nicht höherer, als der ersten Ordnung unendlich wird, die Gleichung* (4.) *kein solches Integral von der Beschaffenheit von* M_1 *enthalte, und die Grössen* $\mathfrak{M}$ *und* μ' *sich wie* μ *verhalten. Dieses sind die regulären Integrale.*

V. *Wenn man mehrere Functionen hat von den Ausdrücken*

$$(9.) \quad \begin{cases} e^{w_1}\varphi_1,\ e^{w_2}\varphi_2, \text{ etc.}, \ e^{w'_1}\psi_1,\ e^{w'_1}\psi_1 \int (e^{w'_1}\psi_1)^{-1} e^{w'_1}\psi_2\, dx, \ \ldots \\ e^{w'_2}\psi'_1,\ e^{w'_2}\psi'_1 \int (e^{w'_2}\psi'_1)^{-1} e^{w'_2}\psi'_2\, dx, \ \ldots \text{ etc.} \end{cases}$$

worin die Grössen w und w' die Form 0 oder $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, die Grössen φ und ψ die Form $(x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ haben, und worin die Grössen $w_1, w_2, \dots w'_1, w'_2, \dots$ alle von einander verschieden sind, so *kann man aus diesen ebenso viele Integrale der Form* (2.) *zusammensetzen, worin die Grössen μ alle die dort angegebene Beschaffenheit haben. Die Exponenten w und w' kommen in μ unverändert vor.*

Denn die Ausdrücke der Form $e^{w_1}\varphi_1, \dots e^{w_s}\varphi_s$, worin die w von einander verschieden, sind in einem Integrale der Form

$$(10.)\qquad e^{w_1}\varphi_1\int dx\,(e^{w_1}\varphi_1)^{-1}e^{w_2}\chi_1\dots\int k\,(e^{w_{s-1}}\chi_{s-2})^{-1}e^{w_s}\chi_{s-1}\,dx$$

enthalten, wo k eine willkürliche Constante ist und die Grössen χ Ausdrücke von der Form $(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ besitzen. Will man nun Functionen der Form $e^{w'_1}\psi_1$, $e^{w'_1}\psi_1\int(e^{w'_1}\psi_1)^{-1}e^{w'_1}\psi_2\,dx$ etc. mit dem Integrale (10.) verbinden, so erhält man zunächst

$$(11.)\qquad e^{w'_1}\psi_1 = e^{w_1}\varphi_1\int dx\,(e^{w_1}\varphi_1)^{-1}e^{w_2}\chi_1\dots\int c\,(e^{w_s}\chi_{s-1})^{-1}e^{w'_1}\chi_s\,dx,$$

wo c eine von Null verschiedene Constante ist. Wendet man nun das Verfahren, welches zum Beweise von Satz I. dieser Nummer gedient hat, an, so wird das Integral der rechten Seite, wenn c eine willkürliche Constante ist, ersetzt durch eines der Form

$$(12.)\qquad e^{w'_1}\psi_1\int dx\,(e^{w'_1}\psi_1)^{-1}e^{w_1}t_1\dots\int k'\,(e^{w_{s-1}}t_{s-1})^{-1}e^{w_s}t_s\,dx,$$

worin k' eine willkürliche Constante ist, die Grössen t wie φ und ψ beschaffen sind, $e^{w'_1}\psi_1$ an die Spitze tritt, die Grössen w unverändert bleiben. Dann hat man ferner

$$(13.)\qquad e^{w'_1}\psi_2 = e^{w_1}t_1\int dx\,(e^{w_1}t_1)^{-1}e^{w_2}t_2\dots\int c'(e^{w_s}t_s)^{-1}e^{w'_1}t_{s+1}\,dx,$$

wo c' eine von Null verschiedene Constante ist. Und nachdem man auf dieselbe Weise wie vorhin dieses Integral, wenn c' eine willkürliche Constante ist, durch ein anderes ersetzt hat, worin $e^{w'_1}\varphi_2$ an die Spitze tritt, wird letzteres Integral als Grösse u in $e^{w'_1}\psi_1\int(e^{w'_1}\psi_1)^{-1}u\,dx$ eingesetzt, und so erhält man schliesslich sämmtliche Ausdrücke (9.) unter der Form der Integrale (2.).

Dieses werde nun auf die Untersuchungen der vorigen Nummer angewandt. Wenn der Differentialgleichung (1.), in welcher der charakteristische Index $h > 0$ ist, h Integrale der Form (2.) genügen, worin die Grössen μ so beschaffen sind, dass $\frac{d\log\mu}{dx}$ für $x = a$ in endlicher aber höherer, als der ersten Ordnung unendlich wird, so genügen diese Integrale einer Differentialgleichung h^{ter} Ordnung mit dem charakteristischen Index h. Alsdann enthält die Gleichung

$$(14.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = 0$$

$m-h$ reguläre Integrale, und man erhält diese Differentialgleichung durch Formel (10.) in No. 2 so weit aufgelöst, dass die linke Seite dieser Formel gleich Null gesetzt, die regulären Integrale enthält, und nach No. 1 erhält man entsprechend die Differentialgleichung (1.) der vorliegenden Nummer aufgelöst. Kennt man weniger als h solcher Integrale, so reducirt man die Gleichung (14.) mit denselben und erhält eine homogene Differentialgleichung, die nach No. 3 die regulären Integrale noch enthält. Nach Satz V. sind nun Integrale der Gleichung (1.) von der Form (9.) zu suchen, worin w, w' etc. die Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ besitzen; und wenn die Gleichung (1.) weniger als h solcher Integrale liefert, so ist dieselbe mit den vorhandenen zu reduciren, und die reducirte Gleichung in derselben Weise zu untersuchen.

6.

Es ist nun bei der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m M}{dx^m}-\frac{d^{m-1}p_1 M}{dx^{m-1}}+\cdots+(-1)^m p_m M = 0,$$

deren charakteristischer Index $h > 0$ ist, zu untersuchen, ob sie Integrale der Form $e^w(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$, $w=\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ besitzt.

Es werde

$$(2.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^r e^w t}{dx^r} = \frac{d^{r-1}e^w t_1}{dx^{r-1}} = \cdots = e^w t_r,\\ &t_1 = \frac{dw}{dx}t+\frac{dt}{dx},\quad t_2 = \frac{dw}{dx}t_1+\frac{dt_1}{dx},\quad \ldots\quad t_r = \frac{dw}{dx}t_{r-1}+\frac{dt_{r-1}}{dx},\end{aligned}\right.$$

$w = \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ und zur Abkürzung $\frac{dw}{dx} = z$ gesetzt.

Ist hier

$$t_{r-1} = \frac{d^{r-1}t}{dx^{r-1}}+k_1^{(r-1)}\frac{d^{r-2}t}{dx^{r-2}}+\cdots+k_{r-1}^{(r-1)}t,$$

so wird

$$t_r = \frac{d^r t}{dx^r} + \left.\begin{array}{l} k_1^{(r-1)} \\ +z \\ \\ \\ \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \frac{d^{r-1}t}{dx^{r-1}} + k_2^{(r-1)} \\ \qquad + \frac{dk_1^{(r-1)}}{dx} \\ \qquad + k_1^{(r-1)} z \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \frac{d^{r-2}t}{dx^{r-2}} + \cdots + k_{r-1}^{(r-1)} \\ \qquad\qquad + \frac{dk_{r-2}^{(r-1)}}{dx} \\ \qquad\qquad + k_{r-2}^{(r-1)} z \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \frac{dt}{dx} + \\ \quad + \frac{dk_{r-1}^{(r-1)}}{dx} \\ \quad + k_{r-1}^{(r-1)} z \end{array}\right| t.$$

Hieraus ergiebt sich für den Coefficienten $k_1^{(r-1)}+z$ der Werth rz, für $k_2^{(r-1)}+(r-1)\left(\frac{dz}{dx}+z^2\right)$ der Werth $\frac{r(r-1)}{1.2}\left(\frac{dz}{dx}+z^2\right)$, und auf diese Weise findet man für t_r folgende Formel, die durch den Schluss von $r-1$ auf r sich ohne Weiteres verificiren lässt:

$$(3.)\quad \begin{cases} t_r = \dfrac{d^r t}{dx^r} + r a_1 \dfrac{d^{r-1}t}{dx^{r-1}} + \dfrac{r(r-1)}{2} a_2 \dfrac{d^{r-2}t}{dx^{r-2}} + \cdots + a_r t, \\ a_1 = z, \quad a_2 = z a_1 + \dfrac{da_1}{dx}, \quad \ldots \quad a_r = z a_{r-1} + \dfrac{da_{r-1}}{dx}. \end{cases}$$

Der Ausdruck von $a_\mathfrak{a}$ fängt mit $z^\mathfrak{a}$ an und hierauf folgen Glieder, bei denen die Ordnung, in welchen sie für $x=a$ unendlich werden, wenigstens um n niedriger ist; das erste derselben ist $\frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{1.2} z^{\mathfrak{a}-2}\frac{dz}{dx}$, auf welches weitere Glieder folgen, die für $x=a$ in niedrigerer Ordnung unendlich werden. Bringt man jetzt die Differentialgleichung (1.) auf die Form

$$(4.)\qquad \frac{d^m M}{dx^m} + r_1 \frac{d^{m-1}M}{dx^{m-1}} + \cdots + r_m M = 0,$$

wo

$$(5.)\quad \begin{cases} r_1 = -p_1, \\ r_\mathfrak{a} = -\dfrac{(m-1)\ldots(m-\mathfrak{a}+1)}{1.2\ldots(\mathfrak{a}-1)} \dfrac{d^{\mathfrak{a}-1}p_1}{dx^{\mathfrak{a}-1}} + \dfrac{(m-2)\ldots(m-\mathfrak{a}+1)}{1.2\ldots(\mathfrak{a}-2)} \dfrac{d^{\mathfrak{a}-2}p_2}{dx^{\mathfrak{a}-2}} - \cdots + (-1)^\mathfrak{a} p_\mathfrak{a} \end{cases}$$

$(\mathfrak{a}=2,\ldots m)$ ist, und setzt $M = e^w N$, so geht (4.) über in

$$(6.)\quad \frac{d^m N}{dx^m} + \left.\begin{array}{l} ma_1 \\ +r_1 \end{array}\right| \frac{d^{m-1}N}{dx^{m-1}} + \left.\begin{array}{l} \frac{m(m-1)}{1.2}a_2 \\ +(m-1)a_1 r_1 \\ +r_2 \end{array}\right| \frac{d^{m-2}N}{dx^{m-2}} + \cdots + \left.\begin{array}{l} m a_{m-1} \\ +(m-1)a_{m-2}r_1 \\ +(m-2)a_{m-3}r_2 \\ +\cdots \\ +r_{m-1} \end{array}\right| \frac{dN}{dx} + \left.\begin{array}{l} a_m \\ +a_{m-1}r_1 \\ +a_{m-2}r_2 \\ +\cdots \\ +a_1 r_{m-1} \\ +r_m \end{array}\right| N = 0.$$

Es ist nun zuzusehen, ob die Grösse z sich so bestimmen lässt, dass Glei-

chung (6.) *ein Integral von der Form* $(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ *haben kann. Hierzu muss der charakteristische Index dieser Differentialgleichung kleiner als die Ordnung sein.* (Abh. Bd. 75 dieses Journals No. 1.)

Nun ist in a_α der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$ gleich $\alpha(n+1)$. Daher wird in einer Horizontalreihe in (6.) $r_\mathfrak{b}(1,(m-\mathfrak{b})a_1,\dots a_{m-\mathfrak{b}})$ in welcher entweder $r_0=1$ oder $r_\mathfrak{b}$ für $x=a$ von Null verschieden ist, das folgende Glied in einer Ordnung für $x=a$ unendlich, die um $n+1$ höher ist, als bei dem vorhergehenden. Wenn man daher die Coefficienten zweier aufeinander folgenden Differentialquotienten von N betrachtet und bei jedem von beiden Coefficienten von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den Gliedern vorkommen, die höchste herausnimmt, so ist dieselbe bei dem Coefficienten des niedrigeren Differentialquotienten wenigstens um $n+1$ höher. *Damit also der charakteristische Index kleiner als m werde, ist folgende Bedingung nothwendig:*

Nimmt man bei dem Ausdrucke

$$(7.)\qquad a_m+a_{m-1}r_1+\dots+r_m$$

von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, *die in den Summanden desselben vorkommen, die höchste heraus, so muss diese mit den n—1 niedrigeren aus dem Gesammtausdruck* (7.) *ausfallen.*

Da in a_α die Glieder, die auf z^α folgen, in einer Ordnung für $x=a$ unendlich werden, die wenigstens um n niedriger ist, als in z^α, so ergiebt sich, dass wenn man bei beliebigem $z=\frac{dw}{dx}$ von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden des Ausdruckes (7.) vorkommen, die höchste und die $n-1$ niedrigeren herausnimmt, diese in den einzelnen Summanden des Ausdruckes (7.) dieselben sind, die aus den Summanden des Ausdruckes

$$(8.)\qquad z^m+r_1z^{m-1}+\dots+r_m$$

hervorgehen, und diese stimmen wieder, wie sich aus den Formeln (5.) ergiebt, mit denjenigen überein, die die Summanden des Ausdruckes

$$(9.)\qquad z^m-p_1z^{m-1}+\dots+(-1)^mp_m$$

liefern. Wenn ferner der charakteristische Index in Gleichung (1.) h ist, so kommt die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ von allen, die sich in den Summanden von (9.) finden, nebst den $n-1$ niedrigeren nur in den Summanden des Ausdruckes

$$(10.)\qquad z^m-p_1z^{m-1}+\dots+(-1)^hp_hz^{m-h}$$

vor, und damit dieselben aus diesem Ausdrucke, wenn $h > 0$ ist, ausfallen, ist nothwendig und hinreichend, dass dieselbe Bedingung erfüllt sei bei dem Ausdrucke

$$(11.)\qquad z^h - p_1 z^{h-1} + \cdots + (-1)^h p_h.$$

Aus dem Ausdrucke (11.) *müssen also, wenn man* $z = \frac{dw}{dx}$, $w = \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ *einsetzt, von allen Potenzen von* $(x-a)^{-1}$, *die in den Summanden vorkommen, die höchste und die* $n-1$ *niedrigeren verschwinden. Diese Bedingung bestimmt zunächst den Exponenten* $n+1$ *der höchsten Potenz von* $(x-a)^{-1}$ *in* z *und den Coefficienten dieser Potenz.*

Die Ordnungszahl, in der p_α für $x = a$ unendlich ist, wird wie früher (No. 3) durch π_α bezeichnet, wo $\pi_\alpha = 0$ ist, wenn p_α für $x = a$ nicht unendlich. Die Exponenten der höchsten Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den einzelnen Summanden von (11.) vorkommen, sind dann in der Reihe:

$$(12.)\qquad h(n+1),\quad \pi_1+(h-1)(n+1),\quad \pi_2+(h-2)(n+1),\quad \ldots\quad \pi_h$$

enthalten, wenn $\pi_\alpha > 0$ ist; und wenn $\pi_\alpha = 0$ ist, so ist in dem betreffenden Summanden der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$ kleiner als die erste der Zahlen der Reihe (12.). Demnach geht der höchste Exponent von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden des Ausdrucks (11.) vorkommen, immer aus der Reihe (12.) hervor. Er muss nun, damit die entsprechende Potenz von $(x-a)^{-1}$ aus (11.) ausfällt, wenigstens zweimal in der Reihe (12.) vorkommen. Bringt man diese Reihe auf die Form:

$$(13.)\qquad h(n+1),\quad \pi_1+(h-1)(n+1),\quad 2\cdot\frac{\pi_2}{2}+(h-2)(n+1),\quad \ldots\quad h\cdot\frac{\pi_h}{h},$$

so sind hier die positiven Zahlen

$$(14.)\qquad \pi_1,\quad \frac{\pi_2}{2},\quad \ldots\quad \frac{\pi_h}{h}$$

zu untersuchen, von denen die letzte $\geqq \frac{h+1}{h}$ ist. Bezeichnet man die grösste dieser Zahlen durch g, so kann $n+1$ nicht grösser als g sein, weil sonst $h(n+1)$ grösser, als alle anderen Zahlen in der Reihe (13.) würde. *Es muss daher, damit ein brauchbarer Werth von* $n+1$ *möglich ist,* $g \geqq 2$ *sein,* worin enthalten ist, dass π_h jedenfalls $\geqq h+2$. Es sei nun $g \geqq 2$ und trete zuletzt bei $\frac{\pi_c}{c}$ auf. Ist dasselbe ganzzahlig, so bestimmt es einen Werth von $n+1$ und der Coefficient von $(x-a)^{-g}$ in z wird bestimmt durch die

Gleichung:

(15.) $\sigma^c - [p_1(x-a)^g]_{x=a}\sigma^{c-1} + [p_2(x-a)^{2g}]_{x=a}\sigma^{c-2} - \cdots + (-1)^c[p_c(x-a)^{cg}]_{x=a} = 0.$

Setzt man hierauf, wenn $g > 2$ ist, kleinere Zahlen als g für $n+1$ in die Reihe (13.) ein, so ist immer $c\frac{\pi_c}{c}+(h-c)(n+1)$ grösser, als die vorhergehenden Zahlen, daher kann ein weiterer Werth von $n+1$ nur aus der Reihe

$$(16.)\qquad \pi_c+(h-c)(n+1),\quad \pi_{c+1}+(h-c-1)(n+1),\quad \ldots\quad \pi_h$$

für $n+1 < g$ hervorgehen. Hier hat man nun in derselben Weise wie vorher die Reihe

$$(17.)\qquad (h-c)(n+1),\quad \pi_{c+1}-\pi_c+(h-c-1)(n+1),\quad \ldots\quad \pi_h-\pi_c$$

zu untersuchen. Von den Zahlen

$$(18.)\qquad \pi_{c+1}-\pi_c,\quad \frac{\pi_{c+2}-\pi_c}{2},\quad \ldots\quad \frac{\pi_h-\pi_c}{h-c},$$

wovon die letzte jedenfalls positiv, sei die grösste positive g'. $n+1$ kann nicht grösser, als g' sein, weil sonst die erste Zahl in (16.) grösser als die folgenden. Nun ist g' kleiner, als $g=\frac{\pi_c}{c}$; denn $g'=\frac{\pi_{c'}-\pi_c}{c'-c}<\frac{\pi_c}{c}$, $c<c'$, weil $\frac{\pi_{c'}}{c'}<\frac{\pi_c}{c}$. Es sei $g'\geqq 2$ und trete zuletzt bei $\frac{\pi_{c'}-\pi_c}{c'-c}$ auf. Dasselbe bestimmt, wenn es ganzzahlig ist, einen Werth von $n+1$ und der Coefficient von $(x-a)^{-g'}$ in z ist Wurzel der Gleichung

$$(19.)\qquad \sigma^{c'-c}-\left[\frac{p_{c+1}}{p_c}(x-a)^{g'}\right]_{x=a}\sigma^{c'-c-1}+\cdots+(-1)^{c'-c}\left[\frac{p_{c'}}{p_c}(x-a)^{(c'-c)g'}\right]_{x=a}=0.$$

Ist $g'>2$, so hat man in gleicher Weise die Reihe

$$(20.)\qquad \pi_{c'+1}-\pi_{c'},\quad \frac{\pi_{c'+2}-\pi_{c'}}{2},\quad \ldots\quad \frac{\pi_h-\pi_{c'}}{h-c'}$$

zu untersuchen, in der die grösste positive ganze Zahl $g''<g'$ ist, da

$$g''=\frac{\pi_{c''}-\pi_{c'}}{c''-c'}<g'=\frac{\pi_{c'}-\pi_c}{c'-c}$$

ist, $c'<c''$, weil

$$\frac{\pi_{c''}-\pi_c}{c''-c}<\frac{\pi_{c'}-\pi_c}{c'-c}.$$

Auf diese Weise erhält man also eindeutig die möglichen Werthe von $n+1$ *aus den Zahlen* g, g' *etc. und die zugehörigen Coefficienten von* $(x-a)^{-(n+1)}$ *in* z *bezüglich als Wurzeln der Gleichungen* (15.), (19.) *etc.*

Es werde nun zunächst dieselbe Untersuchung an derjenigen Differentialgleichung angestellt, die man aus (1.) durch die Substitution

$$M = \mu_m^{-1}\int \mu_m M^{(1)}\,dx$$

erhält:

$$(21.)\qquad \frac{d^{m-1}M^{(1)}}{dx^{m-1}} - \frac{d^{m-2}p_1^{(1)}M^{(1)}}{dx^{m-2}} + \cdots + (-1)^{m-1}p_{m-1}^{(1)}M^{(1)} = 0,$$

wenn $\frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx}$ in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich wird. Die Coefficienten von $M^{(1)}$ in dieser Gleichung sind (No. 2)

$$(22.)\qquad p_\alpha = p_\alpha^{(1)} + \frac{dp_{\alpha-1}^{(1)}}{dx} + p_{\alpha-1}^{(1)}\frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx},\quad \alpha = 1,\dots m,\quad p_0^{(1)} = 1,\quad p_m^{(1)} = 0.$$

Der dem Ausdrucke (11.) entsprechende Ausdruck bei der Gleichung (21.) wird, wenn $\frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx}$ für $x=a$ in höherer, als der ersten Ordnung unendlich, so dass der charakteristische Index h der Gleichung (1.) um 1 vermindert worden ist,

$$(23.)\qquad u^{h-1} - p_1^{(1)}u^{h-2} + \cdots + (-1)^{h-1}p_{h-1}^{(1)},$$

und wenn $\frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx}$ für $x=a$ in nicht höherer, als der ersten Ordnung unendlich,

$$(24.)\qquad u^h - p_1^{(1)}u^{h-1} + \cdots + (-1)^h p_h^{(1)}.$$

Setzt man aber für p_α den Werth (22.) in die Formel (11.) ein, so sieht man, dass die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ von allen, die in den Summanden von (11.) vorkommen und die $n-1$ niedrigeren in dem ersteren Falle, wo $\frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx}$ in höherer als der ersten Ordnung unendlich wird, dieselben sein müssen in den Summanden des Ausdruckes

$$(25.)\qquad \begin{cases} z^h - \left(p_1^{(1)} + \frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx}\right)z^{h-1} + \left(p_2^{(1)} + p_1^{(1)}\frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx}\right)z^{h-2} - \cdots \\ \cdots + (-1)^{h-1}\left(p_{h-1}^{(1)} + p_{h-2}^{(1)}\frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx}\right)z + (-1)^h p_{h-1}^{(1)}\frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx} \\ = \left(z - \frac{d\log\mu_m^{-1}}{dx}\right)\left\{z^{h-1} - p_1^{(1)}z^{h-2} + \cdots + (-1)^{h-1}p_{h-1}^{(1)}\right\}, \end{cases}$$

in dem zweiten Falle dieselben in den Summanden des Ausdruckes:

$$(26.)\qquad z^h - p_1^{(1)}z^{h-1} + p_2^{(1)}z^{h-2} - \cdots + (-1)^h p_h^{(1)}.$$

Sucht man nun durch die Bedingung, die bei (11.) angegeben ist, die höchste

Potenz von $(x-a)^{-1}$ in u und z aus den beiden Ausdrücken (23.) und (25.) zu bestimmen, so sieht man aus dem Vergleiche dieser beiden Ausdrücke, dass jeder Exponent der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$ und der zugehörige Coefficient in den Grössen u bei der Differentialgleichung (21.), auch in den Grössen z bei Gleichung (1.) vorkommen und ausserdem bei letzterer Gleichung die entsprechenden Werthe aus μ_m^{-1}. Und vergleicht man (24.) mit (26.), so ergiebt sich, dass jene Exponenten und Coefficienten bei beiden Differentialgleichungen dieselben sind. Daraus folgt:

Wenn man die Integrale (2.) *in* No. 5 *aufstellt und diejenigen Grössen* μ^{-1} *untersucht, bei welchen* $\frac{d\log\mu^{-1}}{dx}$ *in endlicher, aber höherer, als der ersten Ordnung für* $x=a$ *unendlich wird, so ergiebt sich, dass der Exponent und Coefficient der höchsten Potenz von* $(x-a)^{-1}$ *in* $\frac{d\log\mu^{-1}}{dx}$ *unter den entsprechenden Werthen enthalten sind, die bei der Grösse* z *von Gleichung* (1.) *auftreten und aus Formel* (11.) *nach dem Vorhergehenden bestimmt sind. Die Anzahl der genannten Grössen* μ *kann nicht grösser sein, als die Summe der Wurzeln der Gleichungen* (15.), (19.) *etc., die bei Bestimmung von* z *auftreten.*

Es ist nun die Grösse z *bei Gleichung* (1.) *aus der Bedingung, die bei* (11.) *angegeben, weiter zu bestimmen.* Aus den Zahlen g, g' etc. sei also ein brauchbarer Exponent $n+1$ von $(x-a)^{-1}$ gefunden und man nehme als Coefficienten dieser Potenz eine *einfache* Wurzel der zugehörigen Gleichungen (15.), (19.) etc. Es werde der Ausdruck (11.) durch $f(z)$ bezeichnet. Unter der gemachten Voraussetzung verschwindet in $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ der Coefficient K der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$ von allen Potenzen, die in den Summanden vorkommen, nicht. Die n Coefficienten in $z = \frac{dw}{dx}$, $w = \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ sind dann durch die Bedingung, die bei (11.) angegeben, *eindeutig* bestimmt. Denn stellt man die diese Bedingung, ausdrückenden n Gleichungen auf, so führt jede neue einen folgenden Coefficienten von z im ersten Grade ein, multiplicirt mit der von Null verschiedenen Grösse K. Es ist nun ebenfalls von Null verschieden der Coefficient der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$ aus allen Summanden von

$$\frac{\partial z^{m-h} f(z)}{\partial z} = z^{m-h-1}\Big((m-h)f(z)+z\frac{\partial f(z)}{\partial x}\Big).$$

Letztere Potenz mit ihrem Coefficienten ist aber im Factor von $\frac{dN}{dx}$ in Gleichung (6.)

gleich der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$ von allen, die in den Summanden enthalten sind. Und da von den $n+1$ höheren Potenzen von $(x-a)^{-1}$, den höchsten, die in den Summanden des Factors von N enthalten sind, die höchste und die $n-1$ niedrigeren aus diesem Factor ausfallen, so wird der *charakteristische Index in Gleichung* (6.) *gleich* $m-1$. Zugleich ergiebt sich aus Formel (25.) und (26.), dass die Ausdrücke von z, die einfachen Wurzeln der Gleichungen (15.), (19.) etc. entsprechen und nicht bei der Reduction verwandt werden, in der neuen Differentialgleichung unverändert erhalten bleiben. Wenn eine Wurzel der Gleichungen (15.), (19.) etc. mehrfach r mal vorkommt, so verschwindet in $\frac{\partial^r f(z)}{\partial z^r}$ die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ von allen, die in den einzelnen Summanden vorkommen, nicht. Der Coefficient der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$ aus allen Summanden in dem Factor von $\frac{d^r N}{dx^r}$ verschwindet nicht, während dies der Fall ist bei den Factoren von $\frac{d^{r-1}N}{dx^{r-1}} \cdots N$. Die Bestimmung der Coefficienten in z wird im Allgemeinen mehrdeutig; es treten ausser den durch die Bedingung bei Formel (11.) gegebenen n Gleichungen noch so viele hinzu, dass der charakteristische Index in Gleichung (6.) kleiner als die Ordnung wird. —

Wenn man voraussetzt, dass die Gleichung (1.) in No. 4

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0$$

$m-h$ reguläre Integrale habe, so müssen die Integrale der Gleichung (1.) der vorliegenden Nummer von der Form

$$e^w (x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha, \quad w = \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$$

auch der Gleichung (3.) in No. 4

$$(27.) \qquad \frac{d^h S}{dx^h} - \frac{d^{h-1} g_1 S}{dx^{h-1}} + \cdots + (-1)^h g_h S = 0$$

genügen. Dann hängen durch Formel (14.) in No. 2 die Grössen g_α mit p_α und $p_\alpha^{(h)}$ zusammen, und es ist

$$[p_\alpha^{(h)}(x-a)^\alpha]_{x=a} = \left[\frac{p_{h+\alpha}}{p_h}(x-a)^\alpha\right]_{x=a}.$$

Es werde nun dieser Zusammenhang der Grössen g_α mit p_α und $p_\alpha^{(h)}$ durch Formel (14.) in No. 2 als bestehend vorausgesetzt, wobei die Grössen $p_\alpha^{(h)}$ den charakteristischen Index Null und g_α den charakteristischen Index h haben.

Alsdann ist der Ausdruck

$$(28.)\qquad v^h - g_1 v^{h-1} + \cdots + (-1)^h g_h,$$

$v = \dfrac{dw'}{dx}$, $w' = \sum\limits_1^n k_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, der bei Gleichung (27.) dem Ausdrucke (11.) bei Gleichung (1.) entspricht, zu untersuchen und zuzusehen, inwiefern sich aus (11.) und (28.) durch die Bedingung, die bei (11.) angegeben ist, übereinstimmende Werthe von z und v ergeben. Setzt man aber in (11.) für p_α seinen Ausdruck durch Formel (14.) in No. 2, so ergiebt sich, dass bei einem beliebigen z die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ aus allen Summanden und die $n-1$ niedrigeren, die in den einzelnen Summanden von (11.) vorkommen, dieselben sein müssen, die für $z=v$ aus den Summanden von (28.) hervorgehen. Daraus folgt, dass die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ aus allen Summanden von (28.), die aus dem Gesammtausdrucke (28.) ausfällt, dieselben Exponenten hat und zur Bestimmung der Coefficienten dieser Potenz dieselben Gleichungen bestehen wie bei (11.). Einer einfachen Wurzel einer solchen Gleichung entspricht dann derselbe vollständig bestimmte Ausdruck von z und v, und der charakteristische Index wird bei Gleichung (27.) nach Substitution von $S = e^{w'}T$, $\dfrac{dw'}{dx} = v$ um Eins weniger als die Ordnung, wie bei Gleichung (6.). Man erhält alsdann aus beiden Differentialgleichungen Entwickelungen der Form $(x-a)^r \sum\limits_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo c_0 von Null verschieden ist, wo man von der Grösse r noch nachweisen kann, dass sie für beide Gleichungen dieselbe ist. Denn $-r$ wird (vgl. Abh. Bd. 74, No. 6) bei Gleichung (6.) gleich einem Quotienten, dessen Nenner der von Null verschiedene Coefficient der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$ von allen ist, die in den Summanden des Factors von $\dfrac{dN}{dx}$ vorkommen, und dessen Zähler der Coefficient der um Eins höheren Potenz von $(x-a)^{-1}$ im Factor von N ist. Nun wird dieser Quotient bei Gleichung (6.), wenn der Ausdruck (11.) gleich $f(z)$ gesetzt wird, gleich der Grösse:

$$(29.)\qquad \left[\left(z^{m-h}f(z) + \frac{d}{dx}\frac{\partial z^{m-h}f(z)}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z^{m-h}f(z)}{\partial z^2}\frac{dz}{dx} + (-1)^{h+1}p_{h+1}z^{m-h-1}\right)\frac{x-a}{\dfrac{\partial z^{m-h}f(z)}{\partial z}}\right]_{x=a}$$

und diese wird gleich:

$$(30.)\qquad \left[\left(f(z) + \frac{d}{dx}\frac{\partial f(z)}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}\frac{dz}{dx} + (-1)^{h+1}p_{h+1}z^{-1}\right)\frac{x-a}{\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}}\right]_{x=a}.$$

Der entsprechende Quotient bei Gleichung (27.) wird, wenn der Ausdruck (28.)

gleich $\varphi(v)$ gesetzt wird:

$$(31.)\qquad \left[\left(\varphi(v)+\frac{d}{dx}\frac{\partial\varphi(v)}{\partial v}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(v)}{\partial v^2}\frac{dv}{dx}\right)\frac{x-a}{\frac{\partial\varphi(v)}{\partial v}}\right]_{x=a}.$$

Da nun $z=v$ ist und in $f(z)$ und $\varphi(v)$ die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ aus allen Summanden in den entsprechenden Summanden vorkommt mit übereinstimmenden Coefficienten, so hat man

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f(z)}{\partial z}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}\frac{dz}{dx}\right)\frac{x-a}{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}\right]_{x=a}=\left[\left(\frac{d}{dx}\frac{d\varphi(v)}{\partial v}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(v)}{\partial v^2}\frac{dx}{dv}\right)\frac{x-a}{\frac{\partial\varphi(v)}{\partial v}}\right]_{x=a}.$$

Und setzt man in $\left[\frac{f(z)(x-a)}{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}\right]_{x=a}$ für p_a in $f(z)$ den Ausdruck durch Formel (14.) in No. 2, so erhält man

$$\left[\frac{\varphi(z)(x-a)}{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}\right]_{x=a}-\left[\frac{z^{h-1}-g_1 z^{h-2}+\cdots+(-1)^{h-1}g_{h-1}}{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}p_1^{(h)}(x-a)\right]_{x=a}$$

und dieses wird $\left[\frac{\varphi(v)(x-a)}{\frac{\partial\varphi(v)}{\partial v}}\right]_{x=a}-(-1)^{h+1}\left[\frac{p_{h+1}(x-a)}{z\frac{\partial f(z)}{\partial z}}\right]_{x=a}$, wodurch die Uebereinstimmung der Werthe von r erwiesen ist. —

Ist nun z so bestimmt, dass der charakteristische Index in Gleichung (6.) kleiner als m wird, so kommt es auf die Convergenz der formellen Entwickelungen der regulären Integrale von (6.) an, welche Entwickelungen man nach Abhandlung Bd. 74 No. 8 bildet. Nach dem Vorhergehenden wird zu einem Werthe von z der charakteristische Index der Gleichung (6.) im Allgemeinen $m-1$; zu diesem Werthe von z hat man dann eine einzige Entwickelung der Form

$$(x-a)^r\sum_0^\infty c_a(x-a)^a$$

in Bezug auf die Convergenz zu untersuchen. Findet man mehrere Integrale von der Form (9.) in No. 5, worin w, w' von Null verschieden, so kann man nach No. 5 Satz V. mit diesen die Gleichung (1.) ebenso oft reduciren, und hat, wenn die Anzahl jener Integrale kleiner als h war, die reducirte Gleichung in derselben Weise zu untersuchen. *Ergeben sich aus den Ausdrücken* (14.), (18.) *etc. solche Werthe des Exponenten* $n+1$ *der höchsten Potenz von* $(x-a)^{-1}$ *in* z, *dass die Wurzeln der die Coefficienten dieser Potenz bestimmenden Gleichungen* (15.), (19.) *etc. in der Anzahl* h *auftreten* *und jede einfach in der betreffenden Gleichung vorkommt, so erhält man h vollständig bestimmte Entwickelungen der Form* $e^w (x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, *worin die Grössen w von einander verschieden sind, welche Entwickelungen, wenn sie convergiren, ebenso viele Integrale der Gleichung* (1.) *darstellen.* Mittels derselben wird nach No. 5 die Differentialgleichung (14.) in No. 5, die alsdann $m-h$ reguläre Integrale enthält, durch die Formel (10.) in No. 2 aufgelöst, in welcher Formel die rechte Seite mittels der vorhin genannten h Integrale dargestellt wird und die linke Seite, gleich Null gesetzt, die regulären Integrale enthält. Nach No. 1 ist dadurch auch die Differentialgleichung (1.) der vorliegenden Nummer aufgelöst.

Berlin, den 7. Mai 1873.