Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen.

Dem Andenken an Hermann Minkowski gewidmet.

Von

Alfred Haar in Kolozsvár (Klausenburg).

1. Minkowski hat in seiner „Geometrie der Zahlen“ die Grundlagen einer neuen nicht-Euklidischen Geometrie entworfen. „Wie die Bolyai-Lobatschefskysche Geometrie“ — schreibt Hilbert in seiner Gedächtnisrede auf Minkowski — „in verschiedenen mathematischen Disziplinen, besonders in der Theorie der analytischen Funktionen mit linearen Transformationen in sich die fruchtbarste Anwendung findet, so zeigt sich die Minkowskische Geometrie besonders für die Zahlentheorie von hervorragender Bedeutung.“

Durch die zahlentheoretischen Anwendungen ist aber die Fruchtbarkeit der Minkowskischen Geometrie nicht erschöpft. Sie findet eine wichtige Anwendung — wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird — in der Theorie der reellen Funktionen, bei Problemen in denen es sich um die Annäherung einer stetigen Funktion durch ein System gegebener Funktionen handelt; zu diesen Fragen gehört insbesondere das vielbehandelte Tschebyscheffsche Problem. Deutet man Aufgaben dieser Art geometrisch in einem mehrdimensionalen Raum, und wendet dabei Minkowskis Geometrie an, so erhalten Sätze dieses Gedankenkreises ein anschauliches geometrisches Bild.

Wir werden uns in dieser Note größtenteils mit Annäherungen beschäftigen, bei denen als Maß der Annäherung das von Tschebyscheff eingeführte ist*). Dabei werden sich durch rein geometrische Betrachtungen die ursprünglichen Tschebyscheffschen Resultate ergeben — die in unserer

*) Das *Tschebyscheffsche Maß* der Annäherung wird bekanntlich folgendermaßen definiert: Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige beschränkte abgeschlossene Punktmenge, $f(P)$ und $F(P)$ daselbst definierte stetige Funktionen, so wird das Maximum von $|f(P)+F(P)|$

Zeit von den Herren Kirchberger*) und Borel**) neu begründet wurden — sowie auch die daran anschließenden schönen Untersuchungen der Herren Tonelli***) und J. W. Young†); man erhält auf diese Weise außerdem Theoreme von weit größerer Allgemeinheit, die ein einheitliches Bild dieser Probleme ermöglichen. Außer den von Minkowski geschaffenen Begriffen kommt dabei insbesondere ein Satz von Herrn Carathéodory über kleinste konvexe Bereiche zur Anwendung, mit dessen Untersuchungen über positive harmonische Funktionen die vorliegende Arbeit manche Berührungspunkte aufweist.††)

I. Der Eichkörper der Tschebyscheffschen Annäherung. Existenz der Lösungen.

2. Wir legen unseren Untersuchungen irgend eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ eines Raumes von beliebiger Dimensionzahl zugrunde, und bezeichnen mit P irgend einen Punkt dieser Menge. Wir betrachten ferner $n+1$ in dieser Punktmenge definierte Funktionen:

$$f(P), f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P)$$

und setzen voraus, daß diese Funktionen in $\mathfrak{M}$ stetig und linear unabhängig sind, d. h. daß außer dem trivialen Wertsystem

---

(wobei P irgend einen Punkt von $\mathfrak{M}$ bedeuten kann) als Maß der Approximation der Funktion $f(P)$ durch die Funktion $-F(P)$ bezeichnet. Sind insbesondere

$$f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P)$$

n in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ definierte stetige Funktionen, und gibt es ein Wertsystem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ derart, daß das Maximum von

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$$

— wobei $x_1, \ldots, x_n$ beliebige reelle Konstanten bedeuten — stets größer oder gleich dem Maximum von

$$|f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)|$$

ist, so wird die Funktion $-(a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P))$ eine *Tschebyscheffsche Annäherung* in $\mathfrak{M}$ der Funktion $f(P)$ durch das Funktionensystem $x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$ genannt.

*) „Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden". Math. Ann. 57 (1903).

**) „Leçons sur les fonctions de variables réelles", S. 82. Vgl. auch M. Fréchet: „Sur l'approximation des fonctions continues . . .". Annales de l'École Normale Supérieure. III. Bd. 25 (1908).

***) „I polinomi d'approssimazione di Tchebychev." Annali di Matematica. III. Bd. XV (1908).

†) „General theory of approximation by functions involving a given number of arbitrary parameters." Trans. of the Am. Math. Society. Bd. 8 (1907).

††) „Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen." Math. Ann. 64 (1907), und „Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen." Rend. del Circ. Mat. di Palermo. Bd. 32 (1911).

$$x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

kein anderes Wertsystem $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ existiert, für das die Funktion

$$xf(P) + x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

für jeden Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ gleich Null ausfällt.

Unter diesen Voraussetzungen fassen wir diejenigen Wertsysteme

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

ins Auge, für die das Maximum der in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktion

$$|af(P) + a_1 f_1(P) + a_2 f_2(P) + \cdots + a_n f_n(P)|$$

kleiner oder gleich 1 ausfällt. Betrachten wir die zugehörigen Punkte

$$x = a,\ x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \cdots,\ x_n = a_n$$

eines $(n+1)$-dimensionalen Raumes, in dem $x, x_1, \ldots, x_n$ die gewöhnlichen Punktkoordinaten bedeuten, so *bildet die Gesamtheit der so erhaltenen Punkte einen ganz im Endlichen gelegenen konvexen Körper* $\mathfrak{K}$.*)

In der Tat, aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen $f, f_1, \ldots, f_n$, folgt unmittelbar, daß die betrachteten Wertsysteme $a, a_1, \ldots, a_n$ eine abgeschlossene Punktmenge bilden. Sind ferner

$$a', a_1', \ldots, a_n' \quad \text{und} \quad a'', a_1'', \ldots, a_n''$$

irgend zwei Punkte, die $\mathfrak{K}$ angehören, für die also die Maxima der Funktionen

$$|a'f(P) + a_1' f_1(P) + \cdots + a_n' f_n(P)| \quad \text{und} \quad |a''f(P) + a_1'' f_1(P) + \cdots + a_n'' f_n(P)|$$

nicht größer als 1 ausfallen, so gehört — sobald θ eine die Ungleichung

$$0 \leqq \theta \leqq 1$$

erfüllende Zahl bedeutet — der Punkt mit den Koordinaten

$$a = \theta a' + (1-\theta) a'',\ a_1 = \theta a_1' + (1-\theta) a_1'',\ \ldots,\ a_n = \theta a_n' + (1-\theta) a_n''$$

ebenfalls dem Körper $\mathfrak{K}$ an, denn es besteht die Ungleichung

$$\begin{aligned} |af(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)| &\leqq \theta |a'f(P) + a_1' f_1(P) + \cdots + a_n' f_n(P)| \\ &+ (1-\theta) |a''f(P) + a_1'' f_1(P) + \cdots + a_n'' f_n(P)| \leqq 1. \end{aligned}$$

*) Eine abgeschlossene Punktmenge unseres $(n+1)$-dimensionalen Raumes ist ein konvexer Körper, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt: Sind

$$x', x_1', \ldots, x_n' \quad \text{und} \quad x'', x_1'', \ldots, x_n''$$

irgend zwei Punkte dieser Punktmenge, so gehört der Punkt mit den Koordinaten

$$x = \theta x' + (1-\theta) x'',\quad x_1 = \theta x_1' + (1-\theta) x_1'',\ \ldots,\ x_n = \theta x_n' + (1-\theta) x_n''$$

— sowie θ irgend eine die Ungleichung $0 \leqq \theta \leqq 1$ erfüllende Zahl bedeutet — ebenfalls dieser Punktmenge an.

Ein konvexer Körper ist „ganz im Endlichen gelegen", wenn die Koordinaten seiner Punkte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen Grenze bleiben.

Es erübrigt noch zu zeigen, daß sämtliche Koordinaten jedes Punktes von $\mathfrak{K}$ unterhalb einer festen oberen Grenze liegen.*)

Im entgegengesetzten Falle würden unendlich viele Wertsysteme

$$a^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

existieren, die alle die Bedingung

$$|a^{(\nu)} f(P) + a_1^{(\nu)} f_1(P) + \cdots + a_n^{(\nu)} f_n(P)| \leqq 1$$

für jeden Punkt P von $\mathfrak{M}$ erfüllen, von der Beschaffenheit, daß die absolut größte Zahl des ν^{ten} Wertsystems mit wachsendem ν über alle Grenzen wächst. Es sei $\alpha^{(\nu)}$ gleich der größten der positiven Zahlen

$$|a^{(\nu)}|, |a_1^{(\nu)}|, \ldots, |a_n^{(\nu)}|; \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

bilden wir für jedes ν die Quotienten

$$c^{(\nu)} = \frac{a^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}}, \; c_1^{(\nu)} = \frac{a_1^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}}, \; \ldots, \; c_n^{(\nu)} = \frac{a_n^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}},$$

so ist eine dieser Größen sicherlich gleich ± 1, während alle anderen dem Betrage nach nicht größer als 1 ausfallen; es gilt ferner für jeden Punkt P von $\mathfrak{M}$ die Ungleichung:

$$|c^{(\nu)} f(P) + c_1^{(\nu)} f_1(P) + \cdots + c_n^{(\nu)} f_n(P)| \leqq \frac{1}{\alpha^{(\nu)}}$$

und es ist

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha^{(\nu)} = \infty .$$

Von den unendlich vielen Wertsystemen

$$c^{(\nu)}, c_1^{(\nu)}, \ldots, c_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

können wir in mannigfacher Weise eine konvergente Teilreihe herausgreifen; da ferner für jedes ν mindestens eine der Größen $c^{(\nu)}, \ldots, c_n^{(\nu)}$ gleich ± 1 ist, so können wir diese Auswahl derart vollziehen, daß der Limes der betrachteten Teilreihe

$$c, c_1, \ldots, c_n,$$

mindestens eine Zahl enthält, die ebenfalls gleich ± 1 ist, also von Null verschieden ausfällt. Es würde dann dementsprechend für jeden Punkt von $\mathfrak{M}$

$$c f(P) + c_1 f_1(P) + \cdots + c_n f_n(P) = 0$$

sein, im Gegensatz zu unserer Voraussetzung.

Damit ist also gezeigt, daß $\mathfrak{K}$ in der Tat ein ganz im Endlichen gelegener konvexer Körper ist.

---

*) Eine ähnliche Betrachtung wird bei Herrn F. Riesz in seiner Arbeit: „Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales", Annales de l'École Norm. Sup. III. Bd. 28 (1911), auf ein analoges Problem angewandt.

Die *Begrenzung**) dieses konvexen Körpers wird durch diejenigen Wertsysteme $a, a_1, \ldots, a_n$ gebildet, für die das Maximum von

$$(1) \qquad |af(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)|$$

genau gleich 1 ist.

Ist nämlich jenes Maximum kleiner als 1, so bleibt — wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen $f, f_1, \ldots, f_n$ — diese Bedingung erhalten, falls man das zugehörige Wertsystem $a, a_1, \ldots, a_n$, zwischen hinreichend engen Grenzen variiert, d. h. der entsprechende Punkt ist ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}$. Wenn aber jenes Maximum gleich 1 ist, so gibt es eine Stelle P_0 in $\mathfrak{M}$, so daß

$$af(P_0) + a_1 f_1(P_0) + \cdots + a_n f_n(P_0) = 1$$

wird; mindestens eine der Funktionen $f, f_1, \ldots, f_n$ muß daher an der Stelle P_0 von Null verschieden sein; ist etwa $f(P_0) \gtrless 0$, so wird das Maximum von

$$|(a+\delta)f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)|,$$

wenn man das Vorzeichen von δ passend wählt, jedenfalls größer als 1 ausfallen. Mit andern Worten, der Punkt mit den Koordinaten

$$a + \delta,\ a_1, \ldots, a_n$$

liegt außerhalb des Körpers $\mathfrak{K}$, falls das Vorzeichen von δ passend gewählt ist und es ist also der Punkt $a, a_1, \ldots, a_n$ — als Häufungspunkt von äußeren Punkten — ein Grenzpunkt von $\mathfrak{K}$.

Der Körper $\mathfrak{K}$ ist schließlich *symmetrisch* um den Nullpunkt; d. h. mit dem Punkt $a, a_1, \ldots, a_n$ gehört ihm auch der Punkt mit den Koordinaten $-a, -a_1, \ldots, -a_n$ an.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß *diejenigen Punkte unseres* $(n+1)$ *dimensionalen Raumes, deren Koordinaten* $a, a_1, \ldots, a_n$ *so beschaffen sind, daß das Maximum von* (1) *nicht größer als* 1 *ausfällt, einen ganz im Endlichen gelegenen konvexen Körper um den Nullpunkt als Symmetriepunkt ausfüllen, dessen Begrenzung aus denjenigen Punkten besteht, für die jenes Maximum genau gleich* 1 *ist.*

3. Wir betrachten nun diejenige *Minkowskische Geometrie* in der der soeben gewonnene konvexe Körper $\mathfrak{K}$ die Rolle des *Eichkörpers* spielt. Diese Geometrie ist also durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert: Die Entfernung jedes Punktes des Eichkörpers vom Nullpunkt ist gleich 1; um die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Nullpunkt zu erhalten, konstruiere man diejenigen konvexen Körper $\mathfrak{K}_M$, die aus $\mathfrak{K}$ vermöge

*) Die „*Begrenzung*" oder „*Oberfläche*" eines konvexen Körpers wird durch diejenigen Punkte des Körpers gebildet, die Häufungsstellen von Punkten, die nicht dem Körper angehören, sind.

einer „Dilatation“ um den Nullpunkt entstehen. Die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{K}_M$ ergeben sich also aus den Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{K}$, indem man diese mit der positiven Größe M multipliziert, d. h. wenn $a, a_1, \ldots, a_n$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{K}$ ist, so ist $Ma, Ma_1, \ldots, Ma_n$ ein Punkt von $\mathfrak{K}_M$. Offenbar ist $\mathfrak{K}_M$ für jeden positiven Wert von M ebenfalls ein endlicher konvexer Körper um den Nullpunkt, dessen Begrenzung durch diejenigen Wertsysteme $a, a_1, \ldots, a_n$ gebildet ist, für die das Maximum der Funktion (1) genau gleich M ausfällt, während für das Innere von $\mathfrak{K}_M$ jenes Maximum kleiner als M ist. Man erkennt auch, daß jeder Punkt $x, x_1, \ldots, x_n$ des Raumes auf der Begrenzung desjenigen Körpers dieser einparametrigen Körperschar $\mathfrak{K}_M$ liegt, dessen Parameterwert M das Maximum von $|xf(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$ liefert. Dieser Parameterwert möge der „Entfernung“ des betreffenden Punktes vom Nullpunkte gleich sein; es besteht also die Begrenzung des konvexen Körpers $\mathfrak{K}_M$ aus denjenigen Punkten, deren „Entfernung“ vom Nullpunkte gleich M ist.

Das *Tschebyscheffsche Problem* verlangt nun diejenigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu bestimmen, für die das Maximum von

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$$

möglichst klein wird; da dieses Maximum in unserer Geometrie die „Entfernung“ des Punktes

$$x = 1, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

vom Nullpunkte bedeutet, so kommt dies darauf hinaus, diejenigen Punkte der n dimensionalen Ebene

$$x = 1$$

zu bestimmen, deren „Entfernung“ vom Nullpunkte möglichst klein ist. Diese Punkte erhalten wir durch die folgende Konstruktion:

Wir konstruieren diejenige Stützebene*) unseres Eichkörpers $\mathfrak{K}$, deren Gleichung die Form

$$x = d$$

besitzt $(d > 0)$; dann ist offenbar die Ebene

$$x = 1$$

*) Betrachten wir irgend eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge; sind $u, u_1, \ldots, u_n$ irgend welche Größen, die nicht alle gleich Null sind, so hat der Ausdruck

$$ux + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n,$$

wobei $x, x_1, \ldots, x_n$ die Koordinaten irgend eines Punktes der betrachteten Menge sein können, ein bestimmtes Maximum; ist dies $= d$, so wird

$$ux + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = d$$

eine *Stützebene* der zugrunde gelegten abgeschlossenen Punktmenge genannt. Zu jedem Wertsystem $u, u_1, \ldots, u_n$ (außer dem trivialen $u = u_1 = \cdots = u_n = 0$) *gehört* daher eine und nur eine Stützebene. (Minkowski: „Volumen und Oberfläche“, Math. Ann. 57.)

eine Stützebene desjenigen Körpers der oben konstruierten Schar $\mathfrak{K}_M$, für den

$$M = \frac{1}{d}$$

ist. Diejenigen Punkte dieses konvexen Körpers $\mathfrak{K}_{\frac{1}{d}}$, die auf der Stützebene $x = 1$ liegen, bilden ebenfalls einen endlichen konvexen Bereich von der Beschaffenheit, daß die Minkowskische Entfernung jedes dieser Punkte vom Nullpunkt $= \frac{1}{d}$ ist. Da jeder andere Punkt der Ebene $x = 1$ außerhalb dieses konvexen Körpers liegt, so ist seine Minkowskische Entfernung vom Nullpunkt jedenfalls größer als $\frac{1}{d}$. Die Punkte des betrachteten Bereiches sind daher diejenigen Punkte der Ebene $x = 1$, deren Entfernung vom Nullpunkt möglichst klein ist; daher sind die zugehörigen Wertsysteme

$$1,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

— und nur diese — die Lösungen des Tschebyscheffschen Problems.

Wir erkennen also, daß das Tschebyscheffsche Problem unter den gemachten Voraussetzungen ($f, f_1, \ldots, f_n$ stetig und linear unabhängig in $\mathfrak{M}$) mindestens eine Lösung zuläßt. Man kann auch leicht zeigen, daß die zweite Annahme unwesentlich ist. In der Tat, wenn eine lineare Abhängigkeit

$$cf(P) + c_1 f_1(P) + \cdots + c_n f_n(P) = 0$$

bestehen würde, wo $c \gtrless 0$ wäre, so würde es ein Wertsystem $a_1, \ldots, a_n$ geben, für das das Maximum von

$$f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)$$

gleich Null wäre und dieses Wertsystem ist gewiß eine Lösung des Prolems. Wenn aber in der obigen Relation $c = 0$ ist, so können wir von den Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ diejenigen fortlassen, die als lineare Kombination (mit konstanten Koeffizienten) aus den übrigbleibenden darstellbar sind. Auf diese Weise gelangen wir zu Funktionen, die linear unabhängig sind; wenden wir daher das Ergebnis unserer Untersuchungen auf die Funktion $f(P)$ und auf die nun erhaltenen Funktionen an, so ergibt sich — in Anbetracht dessen, daß alle Funktionen von der Form

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

auch als lineares Aggregat (mit konstanten Koeffizienten) unserer neuen Funktionen darstellbar sind und umgekehrt — die Lösbarkeit des Tschebyscheffschen Problems für die Annäherung der Funktion $f(P)$ durch die Funktionen $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P)$.

Wir erhalten also das folgende Theorem:

Sind $f(P), f_1(P), \ldots, f_n(P)$ in einer abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ definierte stetige Funktionen, so existiert ein Wertsystem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ derart, daß das Maximum der Funktion

$$|f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)|$$

nicht größer ist als das Maximum von

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|,$$

*wie auch die reellen Konstanten $x_1, \ldots, x_n$ gewählt sind; das Wertsystem $a_1, \ldots, a_n$ liefert also das Minimum jener Maxima.**)

Wir werden später (III und IV) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufstellen, daß *nur ein* derartiges Wertsystem existiere.

Bei den vorangehenden — wie auch bei den folgenden — Untersuchungen bedeutet $\mathfrak{M}$ irgendeine abgeschlossene Punktmenge des ein- oder mehrdimensionalen Raumes. Wir erwähnen nur den interessanten Spezialfall, in dem $\mathfrak{M}$ aus einer endlichen Anzahl von Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_m$ besteht; die Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ repräsentieren sodann m Wertsysteme

$$f(P_\nu),\ f_1(P_\nu),\ \ldots,\ f_n(P_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

und die soeben gelöste Aufgabe liefert einen leicht formulierbaren Satz über die approximative Lösung eines linearen Gleichungssystems.

II. Die reziproke Polare des Eichkörpers. Andere Annäherungen.

4. Indem wir nun wieder die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $f(P), f_1(P), \ldots, f_n(P)$ voraussetzen, können wir den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ noch in einer anderen Weise geometrisch interpretieren; zu dieser neuen geometrischen Deutung, der bei der Weiterführung unserer Untersuchungen eine entscheidende Rolle zukommt, gelangen wir durch die folgende Überlegung:

Es sei $a, a_1, \ldots, a_n$ irgendein Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{K}$; für dieses Wertsystem ist also: 1) für jeden Punkt P von $\mathfrak{M}$

$$-1 \leqq a f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P) \leqq 1;$$

*) Dieser Satz wurde für den speziellen Fall, daß die Funktionen $f(P), f_1(P), \ldots, f_n(P)$ in einem Intervall definierte Funktionen einer Veränderlichen sind von J. W. Young a. a. O. unter der weiteren Einschränkung bewiesen, daß jede der unendlich vielen Funktionen

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

($x_1, \ldots, x_n$ beliebige reelle Größen, von denen mindestens eine von Null verschieden ist) in dem zugrunde gelegten Intervall höchstens $n-1$ Nullstellen besitzt, wobei *eine Nullstelle an der kein Zeichenwechsel stattfindet, doppelt zu zählen ist.*

während 2) ein Punkt P_0 in $\mathfrak{M}$ existiert, für den

$$af(P_0) + a_1 f_1(P_0) + \cdots + a_n f_n(P_0)$$

gleich $+1$ oder -1 ausfällt.

Fassen wir nun die Gesamtheit derjenigen Punkte unseres $(n+1)$-dimensionalen Raumes ins Auge, deren Koordinaten $x, x_1, \ldots, x_n$ durch die Gleichungen

$$x = f(P),\ x_1 = f_1(P),\ \ldots,\ x_n = f_n(P),$$

bzw.

$$x = -f(P),\ x_1 = -f_1(P),\ \ldots,\ x_n = -f_n(P)$$

erklärt sind, wobei P die Menge $\mathfrak{M}$ durchläuft. Die auf diese Weise definierte Punktmenge $\mathfrak{F}$ ist offenbar abgeschlossen; sie ist ferner symmetrisch um den Nullpunkt. Die Ebene

$$(2) \qquad ax + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 1$$

besitzt die folgenden Eigenschaften:

1) ist $x^{(\mathfrak{F})}, x_1^{(\mathfrak{F})}, \ldots, x_n^{(\mathfrak{F})}$ ein der Punktmenge $\mathfrak{F}$ angehörender Punkt, so ist

$$ax^{(\mathfrak{F})} + a_1 x_1^{(\mathfrak{F})} + \cdots + a_n x_n^{(\mathfrak{F})} \leqq 1;$$

2) es existiert ein Punkt der Punktmenge $\mathfrak{F}$, für den

$$ax^{(\mathfrak{F})} + a_1 x_1^{(\mathfrak{F})} + \cdots + a_n x_n^{(\mathfrak{F})} = 1$$

ist. Mit anderen Worten, die betrachtete Ebene ist eine *Stützebene* der Punktmenge $\mathfrak{F}$. Es sei nun $\bar{\mathfrak{K}}$ der kleinste konvexe Körper, der die Punktmenge $\mathfrak{F}$ enthält*); dieser Körper ist offenbar symmetrisch um den Nullpunkt, da bereits $\mathfrak{F}$ diese Eigenschaft besaß. Unsere Ebene (2) ist sicherlich auch eine Stützebene von $\bar{\mathfrak{K}}$. Nun ist aber diese Ebene die Polarebene des Punktes $a, a_1, \ldots, a_n$ in bezug auf die Einheitskugel um den Anfangspunkt:

$$(3) \qquad x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

und es ergibt sich also, daß *die Polarebenen* (in bezug auf diese Kugel) *der Begrenzungspunkte des konvexen Körper* $\mathfrak{K}$ *Stützebenen von* $\bar{\mathfrak{K}}$ *sind.* Man erkennt unmittelbar, daß man auf diese Weise *sämtliche* Stützebenen von $\bar{\mathfrak{K}}$ erhält. Sind nämlich $u, u_1, \ldots, u_n$ irgendwelche Größen, die nicht alle gleich Null sind, so besitzt $\mathfrak{K}$ — da der Anfangspunkt ein innerer

*) Der kleinste konvexe Körper, der eine abgeschlossene Punktmenge enthält, besteht aus denjenigen Punkten, die allen, die gegebene Punktmenge enthaltenden konvexen Körpern angehören. Die Stützebenen einer abgeschlossenen Punktmenge und des kleinsten konvexen Körpers, der sie enthält, sind dieselben. Diese Definitionen rühren von Minkowski her. („Volumen und Oberfläche". Math. Ann. 57 (1903).)

Punkt dieses Körpers ist — sicherlich einen Randpunkt $a, a_1, \ldots, a_n$ derart, daß

$$\frac{u}{a} = \frac{u_1}{a_1} = \cdots = \frac{u_n}{a_n}$$

sei; ist λ der gemeinschaftliche Wert dieser Brüche, so ist — auf Grund des soeben Bewiesenen —

$$ax + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 1,$$

oder

$$ux + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = \lambda$$

die zugehörige Stützebene von $\overline{\mathfrak{K}}$, die andererseits die Polarebene des Punktes $a, a_1, \ldots, a_n$ ist.

Wir zeigen, daß auch umgekehrt *die Polarebene jedes Punktes der Begrenzung von* $\overline{\mathfrak{K}}$ (in bezug auf die Kugel (3)) *eine Stützebene von* $\mathfrak{K}$ *ist.*

In der Tat, ist $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ irgendein Punkt der Begrenzung von $\overline{\mathfrak{K}}$, so liegt dieser sicherlich auf einer Stützebene dieses konvexen Körpers, also auf der Polarebene eines Randpunktes von $\mathfrak{K}$. Es enthält daher — auf Grund der einfachsten Sätze über polare Reziprozität — die Polarebene dieses Punktes $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$

$$\bar{a}x + \bar{a}_1 x_1 + \cdots + \bar{a}_n x_n = 1 \tag{4}$$

jedenfalls denjenigen Punkt von $\mathfrak{K}$, dessen Polarebene durch den Punkt $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ hindurchgeht. Wenn daher diese letzte Ebene keine Stützebene von $\mathfrak{K}$ wäre, so hätte dieser konvexe Körper eine Stützebene, deren Gleichung

$$\bar{a}x + \bar{a}_1 x_1 + \cdots + \bar{a}_n x_n = d$$

wäre, wobei $d > 1$ sein müßte. Ist nun $a, a_1, \ldots, a_n$ ein solcher Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{K}$, der dieser Stützebene angehört, für den also

$$a\bar{a} + a_1\bar{a}_1 + \cdots + a_n\bar{a}_n = d$$

ist, so müßte — nach dem vorher Bewiesenen —

$$ax + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 1$$

ein Stützebene von $\overline{\mathfrak{K}}$ sein, d. h. für jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{K}}$ müßte die Ungleichung

$$ax + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leqq 1$$

stattfinden. Da dies für den Punkt $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ nicht der Fall ist, so sind wir zu einem Widerspruch gelangt und (4) ist in der Tat die Gleichung einer Stützebene von $\mathfrak{K}$; man erkennt auch — wörtlich wie oben —, daß man auf diese Weise sämtliche Stützebenen von $\mathfrak{K}$ erhält.

Die beiden ganz im Endlichen gelegenen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ *und* $\overline{\mathfrak{K}}$ *sind daher polar reziproke Figuren in bezug auf die Kugel*

$$x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1;$$

*d. h. die Begrenzungspunkte des einen Körpers sind die Pole der Stützebenen des anderen Körpers und umgekehrt.**)

5. Die vorangehenden Überlegungen gestatten eine analoge Behandlung vieler ähnlicher Probleme, von denen wir einige hier andeuten wollen.

Betrachten wir etwa einerseits diejenigen Wertsysteme $a, a_1, \ldots, a_n$, für die die Ungleichung

$$af(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P) \leqq 1,$$

andrerseits diejenigen Wertsysteme, für die die Ungleichung

$$af(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P) \geqq -1$$

für jeden Punkt P der Menge $\mathfrak{M}$ statthat, so erkennt man durch eine ähnliche Überlegung, wie wir in 2. angestellt haben, daß die Gesamtheiten dieser Wertsysteme im $(n+1)$-dimensionalen Raum je einen im Endlichen gelegenen konvexen Körper erfüllen, wenn die in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktionen $f(P), f_1(P), \ldots, f_n(P)$ so beschaffen sind, daß für jedes Wertsystem $x, x_1, \ldots, x_n$ (außer dem trivialen $x = x_1 = \cdots = x_n = 0$) der Ausdruck

$$xf(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P) \tag{5}$$

eine solche Funktion darstellt, die nicht überall in $\mathfrak{M}$ größer oder gleich Null ausfällt.**) Die vorangehenden Betrachtungen zeigen auch, daß die polare Reziproke in bezug auf die Kugel (3) des ersten der so erhaltenen konvexen Körper derjenige kleinste konvexe Körper ist, der die Punktmenge

$$x = f(P), \quad x_1 = f_1(P), \quad \ldots, \quad x_n = f_n(P)$$

enthält; die polare Reziproke des zweiten konvexen Körpers ergibt sich auf dieselbe Weise aus der Punktmenge:

$$x = -f(P), \quad x_1 = -f_1(P), \quad \ldots, \quad x_n = -f_n(P).$$

In ähnlicher Weise ergibt sich auch, daß die Gesamtheit derjenigen Wertsysteme, für die die *Schwankung****) in $\mathfrak{M}$ der Funktion (5) kleiner oder gleich 1 ist, wiederum einen im Endlichen gelegenen konvexen Körper erfüllen, falls dieser Ausdruck (5) für kein Wertsystem $x, x_1, \ldots, x_n$ (außer dem trivialen $x = x_1 = \cdots = x_n = 0$) eine solche Funktion darstellt, die in $\mathfrak{M}$ konstant ist. Unter derselben Bedingung erfüllen auch diejenigen

---

*) Solche konvexe Körper betrachtet schon Minkowski in seiner posthumen Abhandlung: „Theorie der konvexen Körper insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs." Gesammelte Abhandlungen (Nachlaß), Bd. II, S. 130; er führt daselbst für solche Körper den Namen „*polare Körper*" ein (vgl. S. 146, l. c.).

**) Die Funktionen

$$\cos ks, \quad \sin ks \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen im Intervall $0 \leqq s \leqq 2\pi$ offenbar diese Bedingung; daraus resultiert ein Satz von Carathéodory (l. c.).

***) Unter der *Schwankung* einer stetigen Funktion versteht man den absoluten Betrag der Differenz ihres größten und kleinsten Wertes.

Wertsysteme einen im Endlichen gelegenen konvexen Körper, für die die *Totalvariation* von (5) nicht größer als 1 ist. Diesen konvexen Körpern kommt die Rolle des Eichkörpers zu, falls man statt des Tschebyscheffschen Maßes der Annäherung die Schwankung oder die Totalvariation als Maß der Approximation wählt.

Bei diesen Untersuchungen würden dann die polaren Reziproken dieser Körper in bezug auf die Kugel (3) wieder eine Rolle spielen. Man erkennt z. B. ohne Schwierigkeit, daß die polare Reziproke des ersten der jetzt aufgestellten konvexen Körper derjenige kleinste konvexe Körper ist, der die Punktmenge

$$x = f(P) - f(Q),\ x_1 = f_1(P) - f_1(Q),\ \ldots,\ x_n = f_n(P) - f_n(Q)$$

enthält, wobei P und Q unabhängig voneinander die Punktmenge $\mathfrak{M}$ durchlaufen.

III. Die eindeutige Lösbarkeit des Tschebyscheffschen Problems. Die aufgestellte Bedingung ist hinreichend.

6. Anknüpfend an die vorangehenden geometrischen Entwicklungen werden wir nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufstellen, daß die Tschebyscheffsche Annäherung jeder in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktion $f(P)$, die nicht in der Form

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

darstellbar ist, durch die Funktionen eindeutig sei; d. h. daß für jede solche Funktion $f(P)$ ein und nur ein Wertsystem existiere, für das das Maximum von

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$$

seinen kleinsten Wert annimmt.

Wir werden zunächst eine hinreichende Bedingung hierfür aufstellen und in IV. zeigen, daß diese Bedingung auch notwendig ist.

Zu diesem Ende kehren wir zu unserem Eichkörper $\mathfrak{K}$ zurück, der aus denjenigen Punkten $a, a_1, \ldots, a_n$ besteht, für die das Maximum der stetigen Funktion

$$|af(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)|$$

nicht größer als 1 ausfällt. Wir haben gesehen, daß man die Tschebyscheffsche Annäherung der Funktion $f(P)$ durch die Funktionen $x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$ erhält, wenn man diejenigen Punkte des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ bestimmt, die auf derjenigen Stützebene liegen, deren Gleichung

$$x = d$$

ist ($d > 0$). Damit die Tschebyscheffsche Annäherung eindeutig sei, ist also notwendig und hinreichend, daß diese Stützebene nur einen Punkt des Körpers $\mathfrak{K}$ enthalte.

Wir betrachten nun die polare Reziproke $\bar{\mathfrak{K}}$ dieses Körpers $\mathfrak{K}$ in bezug auf die Kugel (3). Der Pol der Ebene $x = d$ ist der Punkt $\bar{A}$ mit den Koordinaten

$$x = \frac{1}{d}, \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

der auf der Begrenzung von $\bar{\mathfrak{K}}$ liegt. Die Polarebenen derjenigen Punkte von $\mathfrak{K}$, die auf der oben betrachteten Stützebene liegen, enthalten offenbar alle den Punkt $\bar{A}$; umgekehrt ist der Pol jeder durch $\bar{A}$ gehenden Stützebene von $\bar{\mathfrak{K}}$ ein gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{K}$ und seiner Stützebene $x = d$. Daraus ergibt sich also, daß die Stützebene $x = d$ dann und nur dann nur einen Punkt mit dem Körper $\mathfrak{K}$ gemein hat, wenn durch den Punkt $\bar{A}$ nur eine Stützebene des konvexen Körpers $\bar{\mathfrak{K}}$ hindurchgeht.

Wir werden sehen, daß dies stets der Fall ist, *wenn es außer dem trivialen Wertsystem $x_1 = \cdots = x_n = 0$ kein anderes Wertsystem $x_1, \cdots, x_n$ gibt, für das die in $\mathfrak{M}$ stetige Funktion*

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

an mehr als $n - 1$ Stellen dieser Punktmenge verschwindet, d. h. wenn jede dieser unendlichvielen Funktionen höchstens $n - 1$ verschiedene Nullstellen in $\mathfrak{M}$ besitzt.

Bei dem Beweise dieser Behauptung werden wir von einem wichtigen Satze von Carathéodory Gebrauch machen, demzufolge die Punkte des kleinsten konvexen Körpers, der eine abgeschlossene Punktmenge enthält als Schwerpunkte von Massenbelegungen auf dieser Menge gedeutet werden können, wobei alle Massen positiv sind und die Gesamtmasse 1 besitzen: seine Beweisführung ergibt auch, daß — wenn dieser kleinste konvexe Körper ein n-dimensionaler Körper ist — jeder innere Punkt des Körpers als Schwerpunkt von höchstens $n + 1$ positiven Massen, jeder Punkt der Begrenzung aber schon als Schwerpunkt von n positiven Massen angesehen werden kann, die sämtlich in Punkten der in Frage stehenden abgeschlossenen Punktmenge angebracht sind.*)

Wir legen nun durch den Punkt $\bar{A}\left(\frac{1}{d}, 0, \cdots, 0\right)$ des konvexen Körpers $\bar{\mathfrak{K}}$ *eine* Stützebene an diesen Körper. Die gemeinsamen Punkte dieser Ebene mit $\bar{\mathfrak{K}}$ bilden einen konvexen Körper $\bar{\mathfrak{K}}_n$, dessen Dimensionszahl — in unserem Falle — höchstens gleich n ist; dieser Körper ist — wie Carathéodory a. a. O. zeigt — der kleinste konvexe Körper, der diejenige abgeschlossene Punktmenge enthält, die aus den gemeinsamen Punkten der Punktmenge $\mathfrak{F}$ und der betrachteten Stützebene besteht. Der betrach-

*) Carathéodory a. a. O.

tete Punkt $\bar{A}$ ist jedenfalls ein Punkt dieses konvexen Körpers $\bar{\mathfrak{K}}_n$ und wir wollen zeigen, daß — zufolge unserer Annahme über die Funktionen $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ — $\bar{A}$ ein *innerer* Punkt von $\bar{\mathfrak{K}}_n$ ist, also nicht auf der Begrenzung dieses n-dimensionalen konvexen Körpers liegt. Im entgegengesetzten Falle nämlich könnte dieser Punkt $\bar{A}$, nach dem oben genannten Carathéodoryschen Satze, als Schwerpunkt von $\nu(\nu \leqq n)$ positiven Massen gedeutet werden, die in Punkten der Punktmenge $\mathfrak{F}$ angebracht sind. Da die Punktmenge $\mathfrak{F}$ aus den Punkten besteht, deren Koordinaten

$$x = f(P), \quad x_1 = f_1(P), \quad \ldots, \quad x_n = f_n(P),$$

bzw.

$$x = -f(P), \quad x_1 = -f_1(P), \quad \ldots, \quad x_n = -f_n(P)$$

sind (P beliebiger Punkt in $\mathfrak{M}$), so würde es demzufolge n Punkte*) P_1, $P_2, \ldots, P_n$ der Punktmenge $\mathfrak{M}$ und n nicht negative Konstanten λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von der Summe 1 geben, derart, daß

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d} &= \lambda_1 \varepsilon_1 f(P_1) + \lambda_2 \varepsilon_2 f(P_2) + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n f(P_n) \\
0 &= \lambda_1 \varepsilon_1 f_1(P_1) + \lambda_2 \varepsilon_2 f_1(P_2) + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n f_1(P_n) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \lambda_1 \varepsilon_1 f_n(P_1) + \lambda_2 \varepsilon_2 f_n(P_2) + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n f_n(P_n)
\end{aligned}$$

wird; in diesen Gleichungen sind die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ gleich $+1$ oder -1, je nachdem der entsprechende Punkt, an dem die positive Masse λ_1 bzw. $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ angebracht wird, dem ersten oder zweiten Teile der Punktmenge $\mathfrak{F}$ angehört. Aus den letzten n Gleichungen dieses Gleichungssystems würde man aber auf das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix}
f_1(P_1) & f_1(P_2) & \ldots & f_1(P_n) \\
f_2(P_1) & f_2(P_2) & \ldots & f_2(P_n) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_n(P_1) & f_n(P_2) & \ldots & f_n(P_n)
\end{vmatrix}$$

schließen, und daraus, daß ein nicht triviales Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existiert, für das die Funktion

$$x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

an den n Stellen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ der Menge $\mathfrak{M}$ verschwindet — im Widerspruch mit unserer Annahme.

Ist nun

$$ux + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = 1 \tag{6}$$

* In dem Falle, daß $\nu < n$ ist, wähle man die fehlenden $n - \nu$ Punkte von $\mathfrak{F}$ beliebig und belege diese mit der Masse Null.

irgendeine von der betrachteten Stützebene verschiedene Ebene, die den Punkt $\bar{A}$ enthält, so können — da $\bar{A}$ ein innerer Punkt von $\bar{\mathfrak{K}}_n$ ist — nicht sämtliche Punkte von $\bar{\mathfrak{K}}_n$ auf derselben Seite dieser Ebene liegen. Da aber $\bar{\mathfrak{K}}_n$ ein Teil von $\bar{\mathfrak{K}}$ ist, so folgt daraus, daß die Ebene (6) auch keine Stützebene von $\bar{\mathfrak{K}}$ sein kann, und wir erhalten daher das Resultat, daß unter den gemachten Voraussetzungen durch den Punkt $\bar{A}$ nur eine Stützebene des Körpers $\bar{\mathfrak{K}}$ hindurchgeht.

Damit ist also die Eindeutigkeit der Tschebyscheffschen Annäherung durch das Funktionensystem $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ für jede in $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $f(P)$ bewiesen, die nicht in der Form

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

darstellbar ist; ist aber $f(P)$ in dieser Form darstellbar, so ist dies — wiederum wegen unserer zugrunde gelegten Annahme*) über die Funktionen $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ — nur auf eine einzige Art möglich und das entsprechende Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ liefert die einzige Tschebyscheffsche Annäherung in diesem Falle.

*Erfüllen**) daher die Funktionen $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ die Bedingung, daß mit Ausnahme des Wertsystems $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, jede der unendlich vielen in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktionen*

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

in der Menge $\mathfrak{M}$ höchstens $n-1$ verschiedene Nullstellen besitzt (aus dieser Bedingung folgt bereits die lineare Unabhängigkeit der betrachteten Funktionen), *so gibt es für jede in $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $f(P)$ ein und nur ein Wertsystem, für das das Maximum der Funktion*

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$$

*seinen kleinsten Wert annimmt.***)*

---

*) Da für jedes nicht triviale Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ die Funktion

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

in $\mathfrak{M}$ höchstens $n-1$ Nullstellen besitzt, so folgt aus dieser Annahme die lineare Independenz dieser Funktionen in $\mathfrak{M}$ und daher kann $f(P)$ nicht auf zwei verschiedene Arten als lineares Aggregat der Funktionen $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ darstellbar sein.

**) Unter den in der Anmerkung *) S. 301 gemachten Voraussetzungen ist ein entsprechender Satz von J. W. Young a. a. O. bewiesen worden.

***) Die Potenzen $1, s, s^2, \ldots, s^{n-1}$ erfüllen in jedem Intervall —, die Funktionen

$$1, \quad \cos ks, \quad \sin ks \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen in dem Intervall $0 \leq s \leq 2\pi$ die Bedingungen unseres Theorems; daraus ergibt sich der ursprüngliche Satz von Tschebyscheff und der Satz von Fréchet (l. c.).

IV. Die aufgestellte Bedingung ist notwendig für die eindeutige Lösbarkeit des Tschebyscheffschen Problems.

7. Wir zeigen endlich, daß die zuletzt gewonnene hinreichende Bedingung auch notwendig ist, d. h. *wenn ein Wertsystem* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *existiert, dessen Größen nicht alle gleich Null sind, von der Beschaffenheit, daß die in* $\mathfrak{M}$ *stetige Funktion*

$$F_0(P) = \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P) + \cdots + \alpha_n f_n(P)$$

in dieser Punktmenge (mindestens) n *verschiedene Nullstellen*

$$P_1, P_2, \ldots P_n$$

besitzt, so existiert eine in $\mathfrak{M}$ *stetige Funktion* $f(P)$, *deren Tschebyscheffsche Annäherung durch die betrachteten Funktionen nicht eindeutig ist.*

Diese Funktion $f(P)$ konstruieren wir, wie folgt:

Auf Grund unserer Voraussetzungen besitzt das lineare homogene Gleichungssystem

$$x_1 f_1(P_q) + x_2 f_2(P_q) + \cdots + x_n f_n(P_q) = 0 \quad (q = 1, 2 \ldots, n)$$

die nicht triviale Lösung

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, \quad x_n = \alpha_n;$$

daher besitzt auch das transponierte Gleichungssystem eine Lösung, d. h. es existiert ein Wertsystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (dessen Größen nicht alle gleich Null sind), das für jedes q die Gleichungen

$$c_1 f_q(P_1) + c_2 f_q(P_2) + \cdots + c_n f_q(P_n) = 0 \quad (q = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigt. Lassen wir aus diesen Gleichungen diejenigen Glieder, für die der entsprechende Koeffizient c gleich Null ist, fort, so erhalten wir — indem wir nötigenfalls die Reihenfolge der Punkte $P_1, P_2 \ldots, P_n$ umordnen — ein Wertsystem $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$, dessen Größen sämtlich von Null verschieden sind und für das die Gleichungen

$$c_1 f_q(P_1) + c_2 f_q(P_2) + \cdots + c_\nu f_q(P_\nu) = 0 \qquad (\nu \leqq n)$$

bestehen. Da diese homogene Relation für jede der Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ richtig ist, so gilt sie auch für jede lineare Kombination dieser Funktionen mit konstanten Koeffizienten, d. h. es ist

$$(7) \qquad c_1 F(P_1) + c_2 F(P_2) + \cdots + c_\nu F(P_\nu) = 0,$$

wobei

$$F(P) = x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

gesetzt ist.

Es sei nun $f(P)$ eine willkürliche, in $\mathfrak{M}$ definierte stetige Funktion, die zunächst nur der Bedingung unterworfen wird, an den Stellen

$P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ gleich $+1$ oder -1 zu sein, je nachdem die entsprechende Größe c_1, bzw. $c_2, \ldots, c_\nu$ positiv oder negativ ist; es ist also für jedes q

$$c_q f(P_q) = |c_q| > 0 \qquad (q = 1, 2 \ldots \nu).$$

Man kann nun leicht zeigen, daß in diesem Falle das Maximum der Funktion

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|, \tag{8}$$

wie auch die Konstanten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gewählt sind, größer oder gleich 1 ausfallen muß. Denn im entgegengesetzten Falle müßte die Funktion

$$F(P) = x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

an jeder der Stellen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ das entgegengesetzte Vorzeichen als $f(P)$ besitzen, d. h. es müßte jedes der Produkte

$$c_1 F(P_1), \quad c_2 F(P_2) \ldots, \quad c_\nu F(P_\nu)$$

negativ sein, was mit der Relation (7) im Widerspruch steht.

Unterwerfen wir daher die Funktion $f(P)$ der Einschränkung in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ dem absoluten Betrage nach nirgends größer als 1 zu sein, so erreicht das Maximum von (8) seinen kleinstmöglichsten Wert $(= 1)$ jedenfalls für das Wertsystem

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0;$$

dieses Wertsystem liefert also eine Tschebyscheffsche Annäherung der Funktion $f(P)$ durch die Funktionen $x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$.

Wir müssen die Funktion $f(P)$ noch einer weiteren Ungleichung unterwerfen, damit wir eine zweite Tschebyscheffsche Annäherung erhalten. Wir betrachten zu diesem Ende die Funktion

$$F_0(P) = \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P) + \cdots + \alpha_n f_n(P),$$

die an den Stellen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ der Menge $\mathfrak{M}$ gleich Null ist, und wir können annehmen, daß die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, von denen mindestens eine nicht Null ist, so gewählt sind, daß für jeden Punkt P in $\mathfrak{M}$

$$|F_0(P)| \leqq 1$$

sei, was man ja nötigenfalls durch Multiplikation stets erreichen kann.

Die in $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $f(P)$, deren Werte an den Stellen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ vorgeschrieben wurden, und die überall in $\mathfrak{M}$ die Ungleichung

$$-1 \leqq f(P) \leqq 1$$

erfüllt, wird in derselben Punktmenge $\mathfrak{M}$ noch der Ungleichung

$$-1 - F_0(P) \leqq f(P) \leqq 1 - F_0(P)$$

unterworfen; diese Ungleichung ist mit den obigen beiden Bedingungen in Einklang. Da nun für jeden Punkt P von $\mathfrak{M}$

$$|f(P) + F_0(P)| \leqq 1$$

ist (an den Stellen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ gilt das Gleichheitszeichen), so folgt — wie oben — daß

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad x_n = \alpha_n$$

ein zweites — von dem obigen verschiedenes — Wertsystem ist, für das das Maximum von (8) seinen kleinsten Wert (= 1) annimmt. Mit anderen Worten, die Tschebyscheffsche Annäherung der soeben konstruierten Funktion $f(P)$ durch die Funktionen $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ ist nicht eindeutig.

Wir erhalten also das folgende Theorem:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zu jeder in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktion $f(P)$ ein und nur ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existiere, für das das Minimum der Funktion

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$$

seinen kleinsten Wert annimmt, ist die, daß mit Ausnahme des trivialen, Wertsystems $x_1 = x_2 \cdots = x_n = 0$ für kein anderes Wertsystem die in $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)$ in dieser Punktmenge mehr als $n - 1$ Nullstellen besitze.

Ist $\mathfrak{M}$ ein zweidimensionales Gebiet, so sind die Bedingungen unseres Satzes für $n \geqq 2$ nie erfüllt. In der Tat, man kann in diesem Falle die Größen $x_1, \ldots, x_n$ derart bestimmen, daß die Funktion $x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$ an einer inneren Stelle dieses Gebietes positiv, an einer anderen inneren Stelle aber negativ ausfalle; es muß daher diese stetige Funktion an unendlich vielen Stellen den Wert Null annehmen.

Für zwei- (und mehr-) dimensionale Gebiete also existiert kein Funktionensystem

$$f_1(P), \quad f_2(P), \quad \ldots, \quad f_n(P) \qquad (n \geqq 2)$$

*von der Beschaffenheit, daß die Tschebyscheffsche Annäherung jeder stetigen Funktion in diesem Gebiet durch diese Funktionen eindeutig sei.**)

*) Daß die Polynome von zwei Veränderlichen keine eindeutige Tschebyscheffsche Annäherung liefern, hat bereits Tonelli a. a. O. bewiesen.