20.

De curvis et superficiebus secundi ordinis.

(Auctore Dr. *Ottone Hesse* Regiom.)

Sectio prima.

De relationibus inter coefficientes duorum systematum substitutionum linearium, quorum utrumque efficit ut data functio quaelibet homogenea secundi ordinis transformetur in aliam, quae solis variabilium quadratis constet.

1.

Propositis inter variabiles:

$$x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_n \quad \text{et} \quad y_1\ y_2\ y_3 \ldots\ldots y_n$$

n aequationibus linearibus hujusmodi:

$$1.\quad x_\lambda = x_\lambda^{(1)} y_1 + x_\lambda^{(2)} y_2 + \ldots\ldots x_\lambda^{(n)} y_n$$

coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}$, quorum numerus est $n.n$, ita determinari possunt, ut data functio quaelibet homogenea secundi ordinis variabilium $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$ transformetur in aliam variabilium $y_1\ y_2 \ldots\ldots y_n$ de qua binorum producta evanuerunt. Cui conditioni ut aequationes (1) satisfaciant, $\frac{n(n-1)}{2}$ aequationes inter coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}$ valere necesse est, quod substitutionibus (1.) factis $\frac{n(n-1)}{2}$ termini in binas variabiles $y_1\ y_2 \ldots\ldots y_n$ ducti evanescere et soli n termini earum quadrata continentes remanere debent.

Jam ut aequationes, de quibus dictum est, nanciscamur, $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} . x_\varkappa . x_\lambda$ functionem esse datam statuamus. Qua in summa numeris $\varkappa$, λ valores $1\ 2 \ldots\ldots n$ omnes ita tribuantur, ut posita aequatione $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$ termini in $x_\varkappa x_\lambda$ ducti, ubi $\varkappa$, λ diversi sunt, duplices, sin vero $\varkappa$, λ aequales, simplices appareant. Si porro ponamus:

$$G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \ldots\ldots G_n y_n^2$$

expressionem esse, in quam summa $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ substitutione (1) facta abit, nihil impedit quominus substituendo valores $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$ e (1) in aequatione

$$2.\quad \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda = G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \ldots\ldots G_n y_n^2$$

et comparando singulos terminos aequationes deducemus sequentes:

$$3.\quad 0 = x_1^{(p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(q)}\, x_\lambda^{(q)}}{d x_1^{(q)}} + x_2^{(p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(q)}\, x_\lambda^{(q)}}{d x_2^{(q)}} + \dots + x_n^{(p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(q)}\, x_\lambda^{(q)}}{d x_n^{(q)}},$$

$$4.\quad G_p = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(p)}\, x_\lambda^{(p)}$$

quarum prior, positis e numerorum $1\ 2 \dots n$ serie loco p et q diversis numeris, illas $\frac{n(n-1)}{2}$ aequationes conditionales suppeditat, quibus in aequationibus fugere non potest, numeris p, q inter se commutatis, eas integras manere. E posteriori formula, posito $1\ 2 \dots n$ loco p, n aequationes fluunt, quibus coefficientes G_p quadratorum ipsarum variabilium $y_1 . y_2 \dots y_n$ tanquam functiones coefficientium $x_\lambda^{(\varkappa)}$ determinantur.

2.

Repraesentetur per formulam:

$$5.\quad x_\lambda = x_\lambda^{(n+1)} . y_{n+1} + x_\lambda^{(n+2)} . y_{n+2} + \dots x_\lambda^{(2n)} . y_{2n}$$

alterum n aequationum systema, quibus eadem functio data $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda$ in formam redigatur sequentem:

$$-G_{n+1}\, y_{n+1}^2 - G_{n+2}\, y_{n+2}^2 - \dots - G_{2n}\, y_{2n}^2$$

eadem ratione atque antea sequuntur aequationes:

$$6.\quad 0 = x_1^{(n+p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(n+q)}\, x_\lambda^{(n+q)}}{d x_1^{(n+q)}} + x_2^{(n+p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(n+q)}\, x_\lambda^{(n+q)}}{d x_2^{(n+q)}} + \dots$$
$$\dots + x_n^{(n+p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(n+q)}\, x_\lambda^{(n+q)}}{d x_n^{(n+q)}},$$

$$7.\quad -G_{n+p} = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(n+p)}\, x_\lambda^{(n+p)}$$

qua ex aequatione priori, positis valoribus $1\ 2 \dots n$ diversis loco p, q, aequationes $\frac{n(n-1)}{2}$ conditionales fluunt, posteriori n coefficientes G_{n+p} determinantur.

Contemplemur illas $n(n-1)$ formulas (3), (6) quibus solis coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}$ et $x_\lambda^{(n+\varkappa)}$ satisfaciant necesse est, ita ut de functione $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda$ substitutionibus (1) vel (5) factis variabilium $y_1\ y_2 \dots y_n$ vel $y_{n+1}\ y_{n+2} \dots y_{2n}$ binarum producta evanescant. Facile patet aequationibus (3), (6) $\frac{n(n+1)}{2}$ constantes $a_{\varkappa,\lambda}$ inesse, vel potius $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, quippe e quarum numero unam aliquam $= 1$ ponere licet. Unde sequitur illarum $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ constantium eliminatione $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes inter coefficientes substitutionum (1), (5) solas existere. Sed hae $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes alio aequationum systemate repraesentari possunt, quae neque inter omnes coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}.x_\lambda^{(n+\varkappa)}$ symmetria careant, nec tam multas constantes eliminandae praebeant. Quas aequationes ut nanciscamur antecedentibus formulis alias quasdam addi convenit.

3.

Quum ad finem si supponimus ex aequationibus (1) vice versa sequi:

$$8.\qquad y_\lambda = X_1^{(\lambda)} x_1 + X_2^{(\lambda)} x_2 + \dots + X_n^{(\lambda)}$$

inter coefficientes $X_\varkappa^{(\lambda)}$ et $x_\lambda^{(\varkappa)}$ duo aequationum systemata valent haec:

$$9.\qquad \begin{cases} 1 = x_1^{(\lambda)} X_1^{(\lambda)} + x_2^{(\lambda)} X_2^{(\lambda)} + \dots + x_n^{(\lambda)} X_n^{(\lambda)} \\ 0 = x_1^{(\varkappa)} X_1^{(\lambda)} + x_2^{(\varkappa)} X_2^{(\lambda)} + \dots + x_n^{(\varkappa)} X_n^{(\lambda)} \\ \text{et}\ 1 = x_\lambda^{(1)} X_\lambda^{(1)} + x_\lambda^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \dots + x_\lambda^{(n)} X_\lambda^{(n)} \\ 0 = x_\varkappa^{(1)} X_\lambda^{(1)} + x_\varkappa^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \dots + x_\varkappa^{(n)} X_\lambda^{(n)} \end{cases}$$

in quorum posterioribus aequationibus numeris $\varkappa$, λ e numerorum serie $1\ 2 \dots n$ valores diversi tribuendi sunt. Quibus expressionibus (8) variabilium $y_1\ y_2 \dots y_n$ substitutis in aequatione (2) singulos comparando terminos adipiscimur:

$$10.\qquad a_{\varkappa,\lambda} = G_1 X_\varkappa^{(1)} X_\lambda^{(1)} + G_2 X_\varkappa^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \dots G_n X_\varkappa^{(n)} X_\lambda^{(n)}.$$

Facile patet ex aequatione proposita, si multiplicetur per $x_\lambda^{(p)}$ et pro λ deinceps ponetur $1\ 2 \dots n$, aequationum systema prodire, quod additione facta abit in:

$$a_{\varkappa,1} x_1^{(p)} + a_{\varkappa,2} x_2^{(p)} + \dots a_{\varkappa,n} x_n^{(p)} = G_p X_\varkappa^{(p)}.$$

Qua ex aequatione numeros $1\ 2 \dots n$ loco $\varkappa$ deinceps ponendo sequuntur n aequationes:

$$11.\qquad \begin{cases} a_{1,1} x_1^{(p)} + a_{1,2} x_2^{(p)} + \dots + a_{1,n} x_n^{(p)} = G_p X_1^{(p)} \\ a_{2,1} x_1^{(p)} + a_{2,2} x_2^{(p)} + \dots + a_{2,n} x_n^{(p)} = G_p X_2^{(p)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1} x_1^{(p)} + a_{n,2} x_2^{(p)} + \dots + a_{n,n} x_n^{(p)} = G_p X_n^{(p)} \end{cases}$$

quarum solutio secundum $x_1^{(p)}\ x_2^{(p)} \dots x_n^{(p)}$ suppeditat n aequationes sequentis formae:

$$12. \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^{(p)}}{G_p} = A_{1,1} X_1^{(p)} + A_{1,2} X_2^{(p)} + \dots + A_{1,n} X_n^{(p)} \\ \dfrac{x_2^{(p)}}{G_p} = A_{2,1} X_1^{(p)} + A_{2,2} X_2^{(p)} + \dots + A_{2,n} X_n^{(p)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{x_n^{(p)}}{G_p} = A_{n,1} X_1^{(p)} + A_{n,2} X_2^{(p)} + \dots + A_{n,n} X_n^{(p)} \end{cases}$$

ubi adnotandum est, cum sit $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$, etiam $A_{\varkappa,\lambda}$ et $A_{\lambda,\varkappa}$ functiones quasdam coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ inter se aequales esse. Aequationum vero (12) loco hanc statui licet:

$$\frac{x_\varkappa^{(p)}}{G_p} = A_{\varkappa,1} X_1^{(p)} + A_{\varkappa,2} X_2^{(p)} + \dots + A_{\varkappa,n} X_n^{(p)}$$

quam si multiplicamus per $x_\lambda^{(p)}$ et numeros $1\ 2 \dots n$ loco p deinceps ponimus n aequationes nanciscimur, e quibus facta additione procrescit:

$$13. \quad A_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(1)} x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)} x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \dots + \frac{x_\varkappa^{(n)} x_\lambda^{(n)}}{G_n}.$$

Eadem ratione e substitutionibus (5) formula sequitur haec:

$$14. \quad -A_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(n+1)} x_\lambda^{(n+1)}}{G_{n+1}} + \frac{x_\varkappa^{(n+2)} x_\lambda^{(n+2)}}{G_{n+2}} + \dots + \frac{x_\varkappa^{(2n)} x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}}$$

quam si addimus ad (13) fit:

$$15. \quad \frac{x_\varkappa^{(1)} x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)} x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \dots + \frac{x_\varkappa^{(2n)} x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}} = 0.$$

Hac ex aequatione, positis loco $\varkappa$, λ valoribus $1\ 2 \dots n$ et diversis et aequalibus, fluunt $\frac{n(n+1)}{2}$ aequationes et inter coefficientes omnes $x_\lambda^{(\varkappa)} x_\lambda^{(n+\varkappa)}$ et inter quantitates $G_1\, G_2 \dots G_{2n}$ symmetricas. E quibus, facta eliminatione illarum $2n$ quantitatum, quippe quae $2n-1$ quantitatum vicem impleant, eaedem inter substitutionum (1), (5) coefficientes $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ relationes sequuntur, quas ex aequationibus (3), (6) eliminatione constantium prodire adnotavimus.

4.

Sed facile est perspecta ab aequatione (15) vice versa ad (3), (6) nos redire posse. Quem ad finem assequendum convenit aequationem (15) in duas (13) et (14) dirimi, quarum e priori, positis aequationibus (9), aequationes (12) derivantur, quarum solutio secundum $X_1^{(p)}\, X_2^{(p)} \dots X_n^{(p)}$

suppeditat aequationes (11) e quibus facile sequuntur (3), (4); et simili modo e posteriori (14) aequationes (6), (7) invenimus. Quibus in aequationibus constantes, quas functio $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ continet, ita insitae reperiuntur, ut functio ipsa ex iis facile restitui possit.

Cum vero aequatio (15) $\frac{1\,2\,3\ldots.(2n)}{2.1\,2\,3\ldots.n.1\,2\ldots.n}$ modis in duas aequationes formae (13) et (14) dirimi possit, totidem functiones $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ diversas cognoscimus, e quarum quaelibet duo aequationum systemata nascantur, quae quomodo (3), (6) eodem modo et ipsae loco (15) poni possunt.

Id quo melius perspiciatur aequatio (15) exempli gratia dividatur in duas has:

$$A'_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(1)} x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)} x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \ldots. + \frac{x_\varkappa^{(n-1)} x_\lambda^{(n-1)}}{G_{n-1}} + \frac{x_\varkappa^{(n+1)} x_\lambda^{(n+1)}}{G_{n+1}}$$

$$-A'_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(n)} x_\lambda^{(n)}}{G_n} + \frac{x_\varkappa^{(n+2)} x_\lambda^{(n+2)}}{G_{n+2}} + \ldots. + \frac{x_\varkappa^{(2n-1)} x_\lambda^{(2n-1)}}{G_{2n-1}} + \frac{x_\varkappa^{(2n)} x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}},$$

e quarum priori, positis aequationibus:

$$\begin{aligned}
1 &= x_1^{(p)} Y_1^{(p)} + x_2^{(p)} Y_2^{(p)} + \ldots. + x_n^{(p)} Y_n^{(p)} \\
0 &= x_1^{(p)} Y_1^{(q)} + x_2^{(p)} Y_2^{(q)} + \ldots. + x_n^{(p)} Y_n^{(q)} \\
1 &= x_\lambda^{(1)} Y_\lambda^{(1)} + x_\lambda^{(2)} Y_\lambda^{(2)} + \ldots. + x_\lambda^{(n-1)} Y_\lambda^{(n-1)} + x_\lambda^{(n+1)} Y_\lambda^{(n+1)} \\
0 &= x_\varkappa^{(1)} Y_\lambda^{(1)} + x_\varkappa^{(2)} Y_\lambda^{(2)} + \ldots. + x_\varkappa^{(n-1)} Y_\lambda^{(n-1)} + x_\varkappa^{(n+1)} Y_\lambda^{(n+1)}
\end{aligned}$$

ubi numeris p, q diversi valores $1\;2\ldots.(n-1)\;(n+1)$, numeris $\varkappa$, λ diversi valores $1\;2\ldots.n$ tribuendi sunt, facile prodit:

$$\frac{x_\varkappa^p}{G_p} = A'_{\varkappa,1} Y_1^{(p)} + A'_{\varkappa,2} Y_2^{(p)} + \ldots. + A'_{\varkappa,n} Y_n^{(p)}$$

e qua aequatione vice versa sequatur:

$$a'_{\varkappa,1} x_1^{(p)} + a'_{\varkappa,2} x_2^{(p)} + \ldots. + a'_{\varkappa,n} x_n^{(p)} = G_p X_\varkappa^{(p)}$$

unde, cum sit $a'_{\varkappa,\lambda} = a'_{\lambda,\varkappa}$ quia est $A_{\varkappa,\lambda} = A_{\lambda,\varkappa}$ prodeunt:

$$a.\quad 0 = x_1^{(p)} \frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_1^{(q)}} + x_2^{(p)} \frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_2^{(q)}} + \ldots. + x_n^{(p)} \frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_n^{(q)}},$$

$$G_p = \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(p)} x_\lambda^{(p)},$$

ubi loco p, q diversi valores $1\;2\ldots.(n-1)\;(n+1)$, loco λ, $\varkappa$ diversi valores $1\;2\ldots.n$ omnes ponendi sunt. Simili modo e secunda aequatione, quam supra statuimus, sequuntur:

$$b.\quad 0 = x_1^{\mu} \frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa}^{(\nu)} x_{\lambda}^{(\nu)}}{d x_1^{(\nu)}} + x_2^{\mu} \frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa}^{(\nu)} x_{\lambda}^{(\nu)}}{d x_2^{(\nu)}} + \dots + x_n^{(\mu)} \frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa}^{(\nu)} x_{\lambda}^{(\nu)}}{d x_n^{(\nu)}}$$

$$-G_{\mu} = \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa}^{\mu} x_{\lambda}^{\mu}$$

ubi numeris μ, ν diversi valores n, $(n+2)$, ... $(2n)$ omnes tribuendi sunt.

His quatuor aequationibus efficitur ut functio $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a'_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa} x_{\lambda}$ substitutionibus:

$$x_{\lambda} = x_{\lambda}^{(1)} y_1 + x_{\lambda}^{(2)} y_2 + \dots + x_{\lambda}^{(n-1)} y_{n-1} + x_{\lambda}^{(n+1)} y_{n+1}$$

$$\text{et}\quad x_{\lambda} = x_{\lambda}^{(n)} y_n + x_{\lambda}^{(n+2)} y_{n+2} + \dots + x_{\lambda}^{(2n-1)} y_{2n-1} + x_{\lambda}^{(2n)} y_{2n}$$

transeat in:

$$G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \dots + G_{n-1} y_{n-1}^2 + G_{n+1} y_{n+1}^2$$

$$\text{et}\quad -G_n y_n^2 - G_{n+2} y_n^2 - \dots - G_{2n-1} y_{2n-1}^2 - G_{2n} y_{2n}^2$$

qua ratione functionem $\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa} x_{\lambda}$ unam ex iis reperimus, quarum mentionem fecimus, e qua nascuntur aequationes (a), (b), quae aeque ac (3), (6) aequationem (15) repraesentant.

5.

Si aequationem (15) per $b_{\varkappa,\lambda}$ multiplicamus et numeris $\varkappa$, λ valores 1 2 .... n omnes et diversos et aequales ex ordine tribuimus, $\frac{n(n+1)}{2}$ aequationes prodire videmus, quarum summam hunc in modum designari licet:

$$16.\quad \frac{\Sigma b_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa}^{(1)} x_{\lambda}^{(1)}}{G_1} + \frac{\Sigma b_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa}^{(2)} x_{\lambda}^{(2)}}{G_2} + \dots + \frac{\Sigma b_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa}^{(2n)} x_{\lambda}^{(2n)}}{G_{2n}} = 0.$$

Facile vero patet $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficientes $b_{\varkappa,\lambda}$ multimodis ita determinari posse, ut ex $(2n)$ summis, e quibus conflata est aequatio antecedens, $(2n-1)$ earum evanescant, unde fit ut reliquam semper sponte evanescat.

Sed et in aequationibus (15) quantitates G_1 G_2 .... G_{2n} et in (3), (6) quantitates $a_{\varkappa,\lambda}$ ut indeterminatas habere licet. Unde satis elucet e quantitatum $x_{\varkappa}^{(p)}$ numero, cum conditionibus $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ solis satisfaciant, $\frac{3n^2+3n-2}{2}$ earum ex arbitrio determinari posse. Quas quantitates omnes si tanquam $2n$ systemata valorum variabilium X_1 X_2 .... X_n consideramus, ex antecedentibus theorema fluit hoc:

Theorema 1.

Si functio aliqua secundi ordinis variabilium X_1 X_2 .... X_n homogenea pro $(2n-1)$ systematis valorum evanescit sequentium $X_1 = x_1^{(1)}$, $X_2 = x_2^{(1)}$, ... $X_n = x_n^{(1)}$; $X_1 = x_1^{(2)}$, $X_2 = x_2^{(2)}$, ... $X_n = x_n^{(2)}$; ....

$X_1 = x_1^{(2n)}$, $X_2 = x_2^{(2n)}$, ... $X_n = x_n^{2n}$ inter quos $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes valent, quae e (3), (6) facta coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ eliminatione prodeunt; functio illa etiam pro reliquo systemate evanescit.

6.

Theorema propositum per se dignum quod adnotetur inprimis magno est usui in geometria, quoniam in theoria curvarum et superficierum secundi ordinis quaedam problemata, quae valde diversa esse videntur, prorsus congruum docet. Id sequentibus illustrabo.

Posito $n = 3$ per $\frac{x_1^{(p)}}{x_3^{(p)}}$, $\frac{x_2^{(p)}}{x_3^{(p)}}$ distantias designemus puncti alicujus p a duobus axibus fixis cum puncto in eodem plano sitis, sub angulo recto se intersecantibus. Tum facile est inquirere, quid in geometria significat aequatio (3), quae positis loco p, q valoribus 1 2 3 diversis tres aequationes praebet has:

$$\begin{aligned}
0 = {} & x_1^{(1)}(a_{1,1}x_1^{(2)} + a_{1,2}x_2^{(2)} + a_{1,3}x_3^{(2)}) + x_2^{(1)}(a_{2,1}x_1^{(2)} + a_{2,2}x_2^{(2)} + a_{2,3}x_3^{(2)}) \\
& + x_3^{(1)}(a_{3,1}x_1^{(2)} + a_{3,2}x_2^{(2)} + a_{3,3}x_3^{(3)}) \\
0 = {} & x_1^{(2)}(a_{1,1}x_1^{(3)} + a_{1,2}x_2^{(3)} + a_{1,3}x_3^{(3)}) + x_2^{(2)}(a_{2,1}x_1^{(3)} + a_{2,2}x_2^{(3)} + a_{2,3}x_3^{(3)}) \\
& + x_3^{(2)}(a_{3,1}x_1^{(3)} + a_{3,2}x_2^{(3)} + a_{3,3}x_3^{(3)}) \\
0 = {} & x_1^{(3)}(a_{1,1}x_1^{(1)} + a_{1,2}x_2^{(1)} + a_{1,3}x_3^{(1)}) + x_2^{(3)}(a_{2,1}x_1^{(1)} + a_{2,2}x_2^{(1)} + a_{2,3}x_3^{(1)}) \\
& + x_3^{(3)}(a_{3,1}x_1^{(1)} + a_{3,2}x_2^{(1)} + a_{3,3}x_3^{(1)}).
\end{aligned}$$

Constat enim aequatione prima conditionem exprimi ut punctum 1 in linea poleri puncti 2 vel punctum 2 in linea polari puncti 1 situm sit respectu curvae secundi ordinis, quae analytice repraesentatur aequatione:

$$\begin{aligned}
0 = {} & x_1(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3) + x_2(a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3) \\
& + x_3(a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3)
\end{aligned}$$

in qua rursus $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ coordinatas orthogonales designant.

Unde haud difficile est animadversu aequationes illas tres conditiones continere, ut puncta 1 2 3 ita inter se conjugata sint, ut linea polaris cujuslibet eorum reliqua tangat. Proposita igitur curva aliqua secundi ordinis bina puncta, quorum alterum in linea polari alterius situm est, puncta respectu curvae propositae conjugata et terna puncta, quorum quodque polus est lineae per duo reliqua ductae, systema punctorum respectu curvae propositae conjugatorum in sequentibus appellabo.

Eodem modo aequatione (6), quae positis loco p, q valoribus 1 2 3 diversis suppeditat has aequationes:

$$0 = x_1^{(4)}(a_{1,1}x_1^{(5)} + a_{1,2}x_2^{(5)} + a_{1,3}x_3^{(5)}) + x_2^{(4)}(a_{2,1}x_1^{(5)} + a_{2,2}x_2^{(5)} + a_{2,3}x_3^{(5)}) + x_3^{(4)}(a_{3,1}x_1^{(5)} + a_{3,2}x_2^{(5)} + a_{3,3}x_3^{(5)})$$

$$0 = x_1^{(5)}(a_{1,1}x_1^{(6)} + a_{1,2}x_2^{(6)} + a_{1,3}x_3^{(6)}) + x_2^{(5)}(a_{2,1}x_1^{(6)} + a_{2,2}x_2^{(6)} + a_{2,3}x_3^{(6)}) + x_3^{(5)}(a_{3,1}x_1^{(6)} + a_{3,2}x_2^{(6)} + a_{3,3}x_3^{(6)})$$

$$0 = x_1^{(6)}(a_{1,1}x_1^{(4)} + a_{1,2}x_2^{(4)} + a_{1,3}x_3^{(4)}) + x_2^{(6)}(a_{2,1}x_1^{(4)} + a_{2,2}x_2^{(4)} + a_{2,3}x_3^{(4)}) + x_3^{(6)}(a_{3,1}x_1^{(4)} + a_{3,2}x_2^{(4)} + a_{3,3}x_3^{(4)})$$

conditiones exprimi intelligimus ut puncta 4 5 6 respectu ejusdem curvae ac puncta 1 2 3 systema punctorum conjugatorum constituant. Cum uno secundum theorema **1.** aequationis:

$$0 = b_{1,1}X_2^2 + b_{2,2}X_2^2 + b_{3,3}X_3^2 + 2b_{2,3}X_2X_3 + 2b_{3,1}X_1X_3 + 2b_{1,2}X_1X_2$$

coefficientes $b_{1,1}$ $b_{2,2}$ .... semper ita determinari liceat ut coordinatae punctorum 1 2 .... 6 pro $\frac{X_1}{X_3}$, $\frac{X_2}{X_3}$ substitutae aequationi satisfaciant, per sex puncta, quae consideramus, curva quaedam secundi ordinis duci potest. Unde hoc fluit theorema:

Theorema 2.

Proposita curva aliqua secundi ordinis bina systemata quaecunque punctorum respectu ejus conjugatorum in alia curva secundi ordinis sita sunt.

7.

Hic quaestio praetermittenda non videtur num vice versa sex puncta in curva aliqua s. o. ex arbitrio sumta tanquam duo systemata punctorum respectu alias curvae s. o. conjugatorum considerari liceat. Facta in (3), (6) coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ eliminatione, ut vidimus, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes conditionales prodeunt; hoc igitur casu, quo $n = 3$ ponitur, unica aequatio inter coordinatas intercedit. Unde sequitur si e duobus systematis punctorum respectu alicujus curvae s. o. quinque ad arbitrium ponantur, sextum in curva quadam ex arbitrio sumi posse, quam curvam per secundum theorema eam secundi ordinis esse videmus, quae per quinque puncta ex arbitrio sumta determinatur.

Simulac vero sex puncta 1 2 ... 6 ita determinata sunt, ut pro duobus systematis curvae alicujus s. o. habere liceat, quoque ipsa prorsus determinata est, quod coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$, quas aequatio curvam analytice repraesentans continet, determinandorum numerus aequationum conditionalium numero superatur. Unde habetur:

Theorema 3.

Quaelibet sex puncta in curva aliqua secundi ordinis sita et quolibet modo in duo systemata trium punctorum divisa, duo sunt systemata punctorum respectu curvae cujusdam alius secundi ordinis conjugatorum.

Sed cum sex puncta decem rationibus in duo systemata trium punctorum dividi possint, decem curvae s. o. diversae exstant, quarum cuique sex illa puncta duo sunt systemata punctorum conjugatorum.

Igitur si spectamus theorema antecedens, facile intelligitur problema: datis e duobus systematis punctorum conjugatorum quinque punctis sextum punctum invenire cum problemate: datis quinque punctis curvae alicujus s. o. sextum aliquod punctum in eadem curva positum invenire, prorsus congruere.

8.

Vidimus supra proposita curva aliqua s. o. $f(x_1 x_2 x_3) = 0$, ut puncta p, q respectu ejus conjugata sint, inter coordinatas eorum aequationem respectu coefficientium expressionis $f(x_1 x_2 x_3)$ linearem locum habere:

$$x_1^{(p)} f'(x_1^{(q)}) + x_2^{(p)} f'(x_2^{(q)}) + x_3^{(p)} f'(x_3^{(q)}) = 0.$$

Igitur quot paria punctorum conjugatorum consideramus tot hujusmodi aequationes habemus. Cum vero expressio $f(x_1 x_2 x_3)$ quinque coefficientes contineat, quinque paribus punctorum conjugatorum datis curva ipsa determinata erit. Quare proponere licet problema: datis quinque paribus punctorum respectu alicujus curvae s. o. conjugatorum curvam construere. Si vero quatuor tantum paria punctorum respectu alicujus curvae s. o. data sunt, inter quinque coefficientes aequationis curvae quatuor aequationes lineares locum habent; quarum ope ex uno coefficiente reliqui lineariter determinari possunt. Sit λ coefficiens, quo reliqui lineariter determinantur. Quo facto curvae aequatio formam induet:

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) + \lambda \psi(x_1 x_2 x_3) = 0$$

designantibus φ et ψ functiones s. o., quarum coefficientes e coordinatis punctorum datorum compositi sunt.

Has igitur aequatione λ pro arbitrio sumto omnes curvae repraesentantur, quibus quatuor paria data punctorum conjugatorum sunt. Cum vero, quicunque sit valor ipsius λ aequationi quatuor punctorum coordinatae satisfaciant, in quibus curvae $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ concurrunt, omnes curvae s. o. quibus sunt quatuor paria punctorum conjugatorum data, in quatuor punctis concurrunt. Sese offert igitur nobis alterum problema, dignum quod suscipiatur: quatuor puncta intersectionis omnium curvarum s. o. invenire, quae quaelibet quatuor paria punctorum respectu earum conjugatorum data habeant.

Proposita curva aliqua s. o. quodlibet systema punctorum respectu ejus conjugatorum vice trium parium punctorum conjugatorum fungitur. Quare curva ipsa cum dato quolibet systemate punctorum conjugatorum datisque duobus quibuslibet paribus punctorum conjugatorum, tum duobus quibuslibet systematis punctorum conjugatorum in curva aliqua s. o. sitis determinata erit. Si vero e duobus systematis punctorum respectu curvae alicujus s. o. conjugatorum quinque puncta data sunt, hoc modo quatuor tantum puncta in illa curva sita determinata erunt.

9.

Jam legem reciprocitatis, quoad ejus usum faciam, paucis verbis adumbrem, cujus ope ex antecedentibus alia theoremata sine magno negotio fluunt, quas commemorandas existimaverim. Haec lex ea re nititur quod, curva aliqua s. o. proposita, quae directrix appelletur, si puncta quaedam in linea recta sita sunt eorum lineae polares in polo illius lineae concurrunt et si lineae quaedam in uno puncto concurrunt earum poli in linea polari illius puncti siti sunt. Unde elucet cuique theorematι, quod docet quasdam lineas in uno puncto concurrere aut quaedam puncta in linea recta sita esse, alterum theorema respondere, quod vice versa enuntiat, quaedam puncta in linea recta sita esse, aut quasdam lineas in uno puncto concurrere, ita ut cuique lineae alterius quoddam punctum alterius theorematis respondeat.

Sic porro cuique puncto in curva aliqua s. o. sito linea aliam curvam s. o. tangens et cuique lineae curvam priorem tangenti punctum in posteriori situm respondet. Talium curvarum alteram alterius curvam respectu directricis propositae polarem vocabimus. Proposita curva aliqua s. o. binas lineas, quarum altera ducta est per polum alterius respectu curvae propositae conjugatas appellare convenit, cum respondeant binis punctis respectu curvae polaris conjugatis. Denique ternae lineae, quarum quaeque linea est polaris puncti, in quo coeunt duae reliquae, systema linearum respectu curvae propositae conjugatarum constituant, quippe quod systemati punctorum respectu curvae polaris conjugatorum respondeat.

His praemissis theoremata adjiciamus legis reciprocitatis ope e theorematis 2., 3. sequentia:

Theorema 4.

Proposita curva aliqua secundi ordinis bina systemata quaecunque linearum respectu ejus conjugatarum aliam secundi ordinis curvam tangunt.

Theorema 5.

Latera duorum triangulorum curvae alicui secundi ordinis circumscriptorum pro duobus systematis linearum respectu alius cujusdam curvae secundi ordinis conjugatarum habere licet.

Eadem ratione e §. 8. sequitur: datis quinque paribus linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum curvam ipsam determinatam esse: omnes curvas s. o., quae eadem quatuor paria linearum conjugatarum data habeant, quibusdam quatuor lineis simul tangi. Cum vero systema linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum pro tribus paribus linearum respectu ejus conjugatarum habere liceat, duo systemata data linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum, quae, ut supra intelleximus, curva aliqua s. o. tangantur necesse est, curvam ipsam determinabunt. Si vero e duobus systematis linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum quinque lineae datae sunt ea ratione quatuor tantum lineae eam curvam tangentes determinatae erunt.

Denique respicientibus nobis ad definitionem systematis linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum observare licet, puncta tria, in quibus binae earum linearum concurrant, systema punctorum respectu ejus curvae conjugatorum constituere. Quare ex antecedentibus hoc fluit theorema notum:

Theorema 6.

Quaelibet triangula duo curvae alicui secundi ordinis inscripta, alii curvae secundi ordinis circumscripta et vice versa quaelibet triangula duo curvae alicui secundi ordinis circumscripta alii curvae secundi ordinis inscripta esse.

10.

Revertamur ad theorema 1. posito $n=4$ geometrice interpretandum. Quo consilio coordinatae punctorum aliquorum p, q nocentur

38 *

$\frac{x_1^{(p)}}{x_4^{(p)}}, \frac{x_2^{(p)}}{x_4^{(p)}}, \frac{x_3^{(p)}}{x_4^{(p)}}; \frac{x_1^{(q)}}{x_4^{(q)}}, \frac{x_2^{(q)}}{x_4^{(q)}}, \frac{x_3^{(q)}}{x_4^{(q)}}$, quae ternis directionibus sibi invicem normalibus sunt parallelae. Quae coordinatae si satisfaciant aequationi (3) puncta determinant, quorum alterum in plano polari alterius situm sit respectu superficiei secundi ordinis aequatione $\Sigma_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda = 0$ repraesentatae. Quo apparet aequationibus sex, quas aequatio (3) positis pro p, q valoribus 1 2 3 4 diversis praebeat, conditiones exprimi ut puncta 1 2 3 4 ita conjugata sint ut planum polare cujuslibet eorum reliqua tangat. Proposita aliqua superficie s. o. bina puncta, quorum alterum in plano polari alterius situm est, puncta respectu superficiei propositae conjugata et quaterna puncta, quorum quodque est polus plani per tria reliqua ducti in sequentibus puncta respectu superficiei propositae conjugata vocabimus. Igitur positis pro p, q valoribus 1 2 3 4 diversis aequatio (6) suppeditat sex relationes quibus satisfieri necesse est, ut puncta 5 6 7 8 conjugata sint respectu ejusdem superficiei ac puncta 1 2 3 4. His vero conditionibus cum theorema (1) doceat omnibus aequationibus homogeneis s. o. variabilium $X_1 X_2 X_3 X_4$, quibus coordinatae 1 2 .... 7 pro variabilibus substitutae satisfaciant, etiam octavi puncti 8 coordinatas satisfacere, hac ex re concludere licet, omnes superficies per septem puncta 1 2 .... 7 ductas etiam per octavum punctum transire. Unde fluit theorema:

Theorema 7.

Proposita superficie aliqua secundi ordinis bina systemata punctorum respectu ejus conjugatorum ita inter se disposita sunt, ut omnes superficies secundi ordinis per septem eorum ductae etiam per reliquum punctum transeant.

Quod theorema, cum quaelibet tres superficies s. o. octo puncta communia habeant, et per septem puncta innumerabiles superficies non eadem curva intersectionis gaudentes duci possint, sic quoque enuntiare licet:

Proposita superficie aliqua secundi ordinis bina systemata punctorum respectu ejus conjugatorum considerari possunt tanquam octo puncta intersectionis trium aliarum superficierum quarundam secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentium.

11.

Vidimus supra facta e (3), (6) coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ eliminatione $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes conditionales relinqui. Si igitur $n=4$ ponatur tribus aequationibus coordinatae octo punctorum $1\,2\,3\ldots.8$ satisfaciant necesse est, ut tanquam duo systemata punctorum conjugatorum respectu alicujus superficiei s. o. haberi possint. Unde sequitur septem ex iis ad arbitrium sumi posse, octavum inde determinatum esse. Notasse hic juvabit cum aequationes (3), (6) novem aequationes, quibus octavi puncti coordinatae desint, et tres aequationes respectu coordinatarum octavi puncti lineares complectentur, priores ad coefficientes $a_{\varkappa,\lambda}$ determinandas suppeditare, quibus factis posteriores in coordinatis octavi puncti lineariter determinandis succurrere. Igitur si e duobus systematis punctorum respectu superficiei cujusdam s. o. septem puncta data sunt cum superficies ipsa determinata erit, quia coefficientes $a_{\varkappa,\lambda}$ aequationis $\Sigma\, a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda = 0$ eam repraesentantis coordinatis punctorum datorum exprimere possumus, tum octavum punctum duorum systematum. Cum vero illa septem puncta ad arbitrium ponere liceat e theoremate antecedente sequitur theorema notum:

Theorema 8.

Omnes superficies secundi ordinis per septem puncta ex arbitrio posita ductae octavum punctum quoddam illis determinatum tangunt.

Adjicio alterum theorema antecedentibus probatum:

Theorema 9.

Quaelibet superficies tres secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentes in octo punctis se invicem secant, quae tanquam duo systemata punctorum respectu alius cujusdam superficiei secundi ordinis conjugatorum considerari licet.

Adnotandum vero hic videtur, cum octo puncta 35 modis in duo systemata quatuor punctorum dirimi possint, 35 superficies s. o. diversae exstare, quarum cuique puncta octo intersectionis trium superficierum s. o. datarum duo sint systemata punctorum conjugatorum.

Jam si respicimus ad theoremata antecedentia dubium non relinquitur, quin problema: e duobus systematis punctorum conjugatorum respectu superficiei alicujus secundi ordinis datis septem punctis octavum punctum invenire, cum problemate datis septem punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis octavum punctum intersectionis invenire, prorsus congruat.

12.

Proposita superficie aliqua s. o., ut duo puncta respectu ejus conjugata sint, inter coordinatas eorum unica aequatio respectu coefficientium aequationis superficiei linearis locum habere debet. Quare cum aequatio superficiei s. o. novem coefficientes contineat, ad determinandam superficiem novem paria punctorum respectu ejus conjugatorum data esse necesse est. Igitur octo paria punctorum conjugatorum data superficiem non prorsus determinabunt, sed curvam solum intersectionis omnibus superficiebus s. o. communem, quae datis octo paribus punctorum conjugatorum gaudent. Cum enim inter coefficientes aequationis superficiei octo aequationes valeant, earum ope ex uno coefficiente reliqui lineariter determinari possunt. Si igitur per λ coefficiens designatur, quo reliqui lineariter determinantur, aequatio superficiei formam induit:

$$\varphi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + \lambda\psi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$$

designantibus φ et ψ functiones s. o., quarum coefficientes e coordinatis punctorum datorum compositi sunt. Quae aequatio, λ ad arbitrium sumto, cum repraesentet omnes superficies octo paribus punctorum conjugatorum gaudentes et ei omnium punctorum coordinatae satisfaciant, quae aequationibus $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ simul satisfaciunt, omnes illae superficies eandem curvam intersectionis habebunt. Systema punctorum respectu curvae alicujus conjugatorum vice sex parium punctorum conjugatorum fungitur. Quare omnibus superficiebus dato systemate datisque duobus paribus punctorum conjugatorum gaudentibus eadem est curva intersectionis.

Simili modo probatur omnes superficies, quae septem paria punctorum respectu earum conjugatorum data vel unum systema et unum par punctorum conjugatorum datum habeant, in octo punctis coire. Nam si aequationum septem conditionalium ope e duobus coefficientibus λ, μ reliqui determinantur, hac ratione aequatio superficiei in formam redigitur hanc:

$$\varphi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + \lambda.\psi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + \mu.\chi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0.$$

Qua aequatione, cum coefficientes, quos continent functiones φ, ψ, χ, coordinatis punctorum datorum determinati sint, λ, μ pro arbitrio sumtis, omnes superficies repraesentantur, quae in iisdem octo punctis coeunt.

13.

Lex reciprocitatis, quam adhuc usque ad theoremata adhibuimus, quae ad figuras in eodem tantum plano sitas pertinent, idonea est, quae dilatetur ad figuras in spatio quolibet modo sitas. Omnia enim quae in §. 9. de punctis, lineis, curvis in eodem plano sitis breviter sunt exposita ad puncta in spatio sita, plana, superficies transferri licet. Notum enim est omnium punctorum in plano aliquo sitorum plana polaria respectu superficiei s. o. ad arbitrium sumtae, cui nomen tribuatur directricis, in polo illius plani coire, et omnium planorum in uno puncto concurrentium polos in plano polari illius puncti sitos esse. Si porro punctum in superficie aliqua s. o. movetur, ejus planum respectu directricis polare aliam superficiem s. o. tangit, in qua sibi sunt poli omnium planorum superficiem priorem tangentium. Talium superficierum altera alterius superficiei respectu directricis polaris vocetur. Hac superficies porro ea proprietate sunt, ut si binorum punctorum respectu alterius superficiei conjugatorum plana respectu directricis polaria ducantur, horum planorum respectu alterius superficiei alterum ductum sit per polum alterius et si systematis alicujus punctorum respectu alterius superficiei conjugatorum plana respectu directricis polaria ducantur, terna eorum respectu alterius superficiei in polo reliqui concurrant. Quare proposita superficie aliqua s. o. bina plana, quorum alterum ductum est per polum alterius plana respectu superficiei propositae conjugata et quaterna plana, quorum quodque est planum polare puncti, in quo tria reliqua concurrunt systema planorum respectu superficiei propositae conjugatorum appellabo.

Haec breviter exposita sufficiunt ad theoremata sequentia e theorematis (7), (8), (9) eruenda:

Theorema 10.

Proposita superficie aliqua s. o. bina systemata planorum respectu ejus conjugatorum ita inter se disposita sunt, ut omnes superficies secundi ordinis, quaecunque septem eorum tangunt, etiam octavum planum tangunt.

Cum vero quaelibet tres superficies s. o. octo communia plana tangentia habeant et innumerabiles superficies septem plana data tangentes exstent, quae octo planis neque aliis simul tanguntur, theorema propositum sic quoque enuntiare licet:

Proposita superficie aliqua secundi ordinis bina systemata planorum respectu ejus conjugatorum considerari possunt tanquam octo plana tangentia tribus superficiebus quibusdam communia, quae non alio plano simul tanguntur.

Theorema 11.

Omnes superficies secundi ordinis, quae septem plana ex arbitrio posita tangunt, quoddam octavum quoque planum illis determinatum tangunt.

Theorema 12.

Octo plana tangentia tribus quibuslibet superficiebus secundi ordinis communia, quae non aliis planis simul tanguntur, considerari possunt ut duo systemata punctorum respectu alius cujusdam superficiei secundi ordinis conjugatorum.

Notatu hic dignum est, eum octo plana 35 modis in duo systemata quatuor planorum dirimi possint, 35 superficies exstare quarum cuique, datis tribus superficiebus s. o. non plus quam octo plana tangentia communia habentibus, octo plana tangentia duo sint systemata planorum conjugatorum.

Deinde e §. 12. legis reciprocitatis ope apparet: datis novem paribus planorum respectu superficiei alicujus s. o., vel e duobus systematis planorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum datis septem planis superficiem ipsam determinatum esse: omnes superficies s. o. iisdem octo paribus planorum conjugatorum vel uno systemate et duobus paribus planorum respectu earum conjugatorum datis gaudentes omnibus planis tangi, quae earum quaslibet duas simul tangant: omnes superficies, s. o. septem paribus planorum conjugatorum vel uno systemate et uno pari planorum respectu earum conjugatorum dato gaudentes octo planis simul tangi.

Denique theorema adjicio, quod ex antecedentibus facile fluit simulac cognitum est quatuor plana, quae ductae sint per terna puncta systematis alicujus punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum, systema planorum respectu ejusdem superficiei conjugatorum constituere, et quatuor puncta, in quibus terna plana systematis planorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum concurrant, systema punctorum respectu ejusdem superficiei conjugatorum efficere.

Theorema 13.

Duo tetraedra tribus superficiebus secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentibus simul inscripta tribus aliis superficiebus secundi ordinis simul circumscripta sunt, quae non plus quam octo plana tangentia communia habent, et vice versa: duo tetraedra tribus superficiebus secundi ordinis, quae non plus quam octo plana tangentia habent, simul circumscripta tribus aliis superficiebus secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentibus simul inscripta sunt.

Sectio altera.

Solvuntur quaedam problemata in sectione antecedente commemorata.

14.

Juvat theoremata (2), (3) geometricis quoque considerationibus probare. Quod cum lemmatis cujusdam ope assecuturi simus, cujus usus in sequentibus erit frequens, inprimis id lemma ad demonstrandum proponamus:

Lemma.

Si in quadrilatero aliquo completo, cujus diagonales tres sunt aa', bb', cc', puncta aa' et bb' pro curva quadam secundi ordinis duo paria punctorum conjugatorum constituunt, etiam puncta cc' puncta respectu ejus curvae sunt conjugata.

Notum enim est proposita curva aliqua s. o. si per puncta respectu ejus conjugata linea ducatur, hanc lineam curvae duobus punctis occurrere, quae cum prioribus quatuor puncta harmonica constituant. Igitur si (Fig. 1) puncta, in quibus diagonales tres curvam secant, vocamus AA', BB', CC' et $aa'AA'$ et $bb'BB'$ puncta harmonica sunt, lemma demonstratum erit simulac puncta $cc'CC'$ harmonica esse ostenderimus. Licet vero figuram 1 pro projectione centrali alius figurae 2 habere, in qua curva secundi ordinis circulus et linea per puncta $a'b'c'$ ducta in infinito posita sit *). Qua in figura, cum punctis figurae 1 respondentibus

---

*) *Poncelet.* Traité des propriétés projectives etc. pag. 54.

eadem signa tributa sint, lineae $AA'bc$; $BB'ac$; $CC'ab$ parallelae reperiuntur. Porro cum notum sit puncta harmonica in projectione centrali harmonica manere, utrasque chordas AA' et BB' linea ab in duas partes inter se aequales secat et, ut puncta $cc'CC'$ in figura 1 harmonica sint, chordam CC' in figura 2 puncto c in duas partes inter se aequales dividi necesse est. Restat igitur ut demonstremus chordam CC' puncto c bifariam dividi, vel perpendiculares tres in chordis AA', BB', CC' erectas per puncta a, b, c ductas in uno puncto convenire. Sed hae lineae ab angulis trianguli abc ad latera opposita perpendiculariter ductae sunt. Igitur in uno puncto concurrunt.

Ex hoc lemmate legis reciprocitatis ope sequitur:

Proposito quadrilatero aliquo si latera opposita duo paria linearum respectu curvae alicujus secundi ordinis conjugatorum constituant etiam diagonales lineas respectu ejusdem curvae conjugatas esse.

15.

Lemma propositum et theorema de hexogrammate curvae alicui s. o. inscripto a *Pascale* litteris mandatum et theorema hocce: duo quaelibet systemata punctorum respectu curvae alicujus s. o. conjugatorum curvae cuidam alii s. o. inscripta esse et vice versa quaelibet sex puncta in curva aliqua s. o. sita pro duobus systematis punctorum respectu cujusdam curvae alius s. o. haberi posse, ea ratione inter se nexa sunt ut ex eorum binis reliquum facile sequatur. Sint enim (Fig. 3) abc; $a'b'c'$ duo systemata punctorum respectu curvae alicujus s. o. conjugatorum. Cum punctum p', in quo lineae ac puncti b polaris linea $b'c'$ occurrit et b puncta sint conjugata, cum porro punctum p, in quo $a'c'$ puncti b' polaris et bc coeunt, et b' puncta sint conjugata; secundum lemma propositum puncta P et P', in quibus concurrunt lineae bc, $b'c'$ et bb', pp' conjugata erunt. Igitur puncti P polaris per P' transibit. Punctum P vero situm est in utraque linea bc et $b'c'$ quare linea aa' earum polas jungens puncti P polaris erit et hac ex causa punctum P' tanget. Igitur lineae tres aa', bb', pp' in uno puncto concurrant necesse est. Quod sic quoque enuntiari licet: latera hexagoni $aa'c'b'bc$ opposita in tribus punctis concurrere, quae in linea recta reperiantur. Unde theorematis *Pascalis* ope sequitur altera pars theorematis supra propositi, hexagonum illud curvae alicui inscriptum esse.

Si vero ad alteram partem illius theorematis demonstrandam statuimus hexagonum $aa'c'b'bc$ curvae alicui s. o. inscriptum esse e theoremate *Pascalis* sequitur lineas aa', bb', pp' in uno puncto concurrere. Cum vero curva aliqua s. o. quinque paribus punctorum conjugatorum determinetur, puncta abc pro systemate punctorum conjugatorum et $b'c'$ et $b'p$ pro duobus paribus punctorum conjugatorum respectu curvae alicujus s. o. considerare possumus. Haec curva gaudet punctis PP' conjugatis quia bp' et $b'p$ puncta conjugata sunt. Quare linea $P'a$ puncti P polaris erit. Praeterea linea pc' puncti b' polaris erit quia $b'p$ et $b'c'$ puncta conjugata sunt. Unde sequitur punctum a' in quo coeant lineae $P'a$ et pc lineae $b'c'$ polum esse. Igitur etiam puncta $a'b'c'$ systema punctorum respectu ejus curvae conjugatorum constituunt, cui alterum systema abc punctorum conjugatorum esse supposuimus.

Hujus theorematis et lemmatis ope theorema *Pascalis* hac ratione probatur. Sit $aa'c'b'bc$ hexagonum quodlibet curvae alicui s. o. inscriptum. Cum puncta abc, $a'b'c'$ pro duobus systematis punctorum respectu curvae cujusdam s. o. conjugatorum habere liceat, ita inter se disposita sunt, quod lemmatis ope antea demonstravimus, ut hexagoni latera opposita in tribus punctis concurrant, quae in recta linea sita sint.

Denique restat ut lemma demonstretur. Proposita curva aliqua s. o. ab et $a'b'$ (Fig. 4) duo paria sint punctorum respectu ejus conjugatorum. Si puncta, in quibus lineae aa', bb' et ab', $a'b'$ concurrunt per P_1 et P_2 designamus lemma probatum erit, simulac puncta $P_1 P_2$ conjugata esse ostenderimus. Quo consilio supponamus c et c' polos esse linearum ab et $a'b'$. Quibus statutis puncta abc, $a'b'c'$ duo systemata punctorum respectu curvae propositae conjugatorum erunt. Qua ex causa latera hexagoni $b'acba'c'$ in tribus punctis $P_2 P_3 P_4$ concurrunt in linea recta sitis. Cum vero punctum P' polus sit lineae per $P_3 P_4$ ductae puncta $P_1 P_2$ conjugata erunt respectu curvae propositae.

16.

Problema 1.

Dato systemate abc punctorum respectu cujusdam secundi ordinis curvae conjugatorum datisque duobus paribus $a''A$, $b''B$ punctorum respectu ejus conjugatorum punctorum a'', b'' lineas polares invenire.

Ducantur (Fig. 5) lineae aa'' et bb'' in p coeuntes. Inde ducantur lineae pA et pB lineis bc et ac in α et β occurrentes et $\beta b''$, bB, $\alpha a''$, aA lineis jungantur, quarum priores in β', posteriores in α' concurrant. Denique linea $\alpha'\beta'$ ducatur lineae ac in β'', lineae bc in α'' occurrens et jungantur $B\beta''$ et $A\alpha''$. Quibus factis $B\beta''$ ipsius b'', $A\alpha''$ ipsius a'' erit linea polaris. Nam si lineas $b\beta$, $b''B$ tanquam quadrilateri completi diagonales contemplemur, tertia ejus diagonalis $p\beta'$ erit, et cum $b\beta$, $b''B$ duo paria sint punctorum conjugatorum, secundum lemma etiam $p\beta'$ puncta erunt conjugata. Sic porro demonstratur lineis $a\alpha$, $a''A$, $p\alpha'$ tanquam quadrilateri completi diagonalibus habitis puncta $p\alpha'$ conjugata esse. Unde elucet $\alpha'\beta'$ polarem esse ipsius p. Cum vero in β'' lineae $\alpha'\beta'$, ac coeant, linea $b\beta''$, quippe quae earum polos tangat, est puncti β'' polaris. Tangit igitur puncti b'' polaris et B et β''. Unde sequitur $B\beta''$ ipsius b'' eademque ratione $A\alpha''$ ipsius a'' polarem esse.

In posterum usum adjiciendum videtur, quomodo puncti c'', in quo coeunt lineae Ab'' Ba'', linearum jamjam ductorum ope linea polaris construatur, quam cum lineis $a''b''$ et AB in uno puncto C concurrere lemma antecedens enuntiat cum $a''A$, $b''B$, $c''C$ diagonales sint ejusdem quadrilateri completi. Hunc in finem ducantur lineae $\beta''c''$, $\alpha''c''$ lineis pa et pb in a''' et b''' occurrentes. Porro si linea $a'''b'''$ ducitur lineam $\alpha'\beta'$ in γ'' secans, junctis $\gamma''C$ punctis, $\gamma''C$ puncti c'' est polaris. Etenim $\alpha''a'''$, $\beta''b'''$, $\gamma''c'''$ diagonales sunt quadrilateri cujusdam completi et puncta $\alpha''a'''$, $\beta''b'''$ duo paria punctorum conjugatorum constituunt.

17.

Problema 2.

Datis e duobus systematis punctorum respectu superficiei alicujus secundi ordinis septem punctis octavum punctum invenire.

Sint $abcd$, $a'b'c'd'$ duo systemata punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum. Ducantur lineae da', db', dc', $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$, quae planum per abc ductum in punctis $a''b''c''$, ABC secent. Quae puncta ita inter se disposita sunt, ut per $a''b''C$, $b''c''A$, $c''a''B$ tres lineae rectae duci possint. Porro tria plana per puncta $d'b'c'$, $d'c'a'$, $d'a'b'$ ducantur, quae planum abc in lineis $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ secent. Per has lineas et punctum d si tria plana ducimus, haec plana erunt polaria punctorum $a''b''c''$. Cum enim omnium punctorum, quae sita sunt in linea da', plana polaria per intersectionem planorum $b'c'd'$ et abc ducta sint et punctum a'' in hac linea et in plano abc situm sit, ejus planum polare per lineam $A\alpha''$ et punctum d transeat necesse est. Eademque ratione probatur $B\beta''d$ ipsius b'' et $C\gamma''d$ ipsius c'' planum polare esse. Sed superficiei et plani abc curvam intersectionis contemplemur et lineas et puncta in plano abc constituta respectu ejus curvae interpretemur. Respectu hujus curvae puncta abc systema punctorum conjugatorum constituent et $A\alpha''$ ipsius a'', $B\beta''$ ipsius b'', $C\gamma''$ ipsius c'' lineae polares erunt. Jam si punctum d' non est datum linearum $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ nonnisi puncta ABC ea ratione, qua usi sumus, determinari possunt. Sed in usu sunt hae lineae ad determinandum punctum d'. Nam si per eas et per lineas $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ tria plana ducantur in puncto d' concurrent. Quam meditemur quomodo lineae $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$, puncto d' non cognito reperiemus. Haec rem questio in problema I. redit. Si enim respicimus ad curvam in plano abc sitam respectu ejus datum est systema abc punctorum conjugatorum et tria paria $a''A$, $b''B$, $c''C$ punctorum conjugatorum.

18.

Etsi problema antecedens omnino est absolutum ad nexum octo punctorum, quae duo systemata punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum constituunt, melius intelligendum et inde alteram problematis antecedentis solutionem deducendam investigationem datorum octo punctorum de integro succipiamus.

Datis systematis duobus $abcd$, $a'b'c'd'$ punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum punctum plano dbb' et lineae aa' commune p vocetur. Hujus puncti, quia situm est in linea polas aa' jungente, planum polare per intersectionem planorum polarium bcd et $b'c'd'$ transibit, et quia hoc punctum in plano dbb' inest, ejus planum polare per intersectionem plani $a'c'd'$ et lineae ac transeat necesse est. Si igitur planum ducis per puncta tria intersectionis plani bcd et lineae $b'c'$; $b'c'd'$ et bc; $a'c'd'$ et ac puncti p habes planum polare. Sed ejusdem plani quartum punctum facile invenitur hoc modo. Ducantur lineae pa' et pb', quarum altera punctum a tanget, altera lineam db in puncto aliquo secabit, quod vocemus q. Hujus vero puncti planum polare cum per a, et ipsius b' planum polare per a' transeat, puncti p planum polare secundum lemma per intersectionem linearum qa' et ab', id est per intersectionem plani bda' et lineae ab' transibit. Hoc igitur punctum intersectionis, si designemus per $(da'b.ab')$ eademque ratione alia puncta, quae contemplabimur, per planum et lineam, in quibus sita sunt; puncta quatuor $(d'b'c'.bc)$, $(d'c'a'.ca)$, $(dbc.b'c')$, $(da'b.ab')$ in eodem plano sita sunt, vel, si lineae per puncta designentur, per quae ductae sunt, ea ratione ut $(b'c'd'.bc)$ $(a'c'd'.ac)$ lineam significet per puncta $(b'c'd'.bc)$ et $(a'c'd'.ac)$ ductam; linearum:

$$(d'b'c'.bc)(d'c'a'.ca) \quad \text{et} \quad (da'b.ab')(dbc.b'c')$$

altera alteram secat.

19.

Nunc puncta octo, quae ut supra adnotavimus, quolibet modo in duo systemata quatuor punctorum divisa pro duobus systematis punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum haberi possint, quam nullum inter reliqua eminent, relatione eorum inventa per numeros designari convenit, ita ut signorum $cab'c'a'bd'd$ loco scribantur 12345678. Quo facto linearum (734.61)(745.12), (856.23)(861.34) priorem, quam designemus per I, a posteriori secari, quam vocemus (III), paragrapho antecedente jamjam demonstratum est. Sic porro designentur:

(734.61)(745.12)	per	I,	(834.61)(845.12)	per	(I),
(745.12)(756.23)	-	II,	(845.12)(856.23)	-	(II),
(756.23)(761.34)	-	III,	(856.23)(861.34)	-	(III),
(761.34)(712.45)	-	IV,	(861.34)(812.45)	-	(IV),
(712.45)(723.56)	-	V,	(812.45)(823.56)	-	(V),
(723.56)(734.61)	-	VI,	(823.56)(834.61)	-	(VI).

Quarum expressionum quaelibet ex antecedente obtinetur signa 1 2 3 4 5 6 mutando in 2 3 4 5 6 1. Sed ut perspiciatur quomodo hae duodecim lineae inveniantur, puncta 1 2 3 ... 6 deinceps sex lineis jungamus ita ut hexagonum efficiatur, quod vocemus *H*. Hujus hexagoni latus quodque plano per latus oppositum et punctum 7 ducto secetur. Quo facto sex puncta intersectionis nanciscimur quibus ex ordine per lineas junctis lineas habemus I II .... VI alterum efficientes hexagonum quod designemus per *A*. Tertium hexagonum *B* nanciscimur, si loco puncti 7 eadem ratione puncto 8 utamur. Cujus hexagoni latera ea erunt, quae per (I) (II) .... (VI) designavimus. Haec tria hexagona proprietatibus memoratu dignis gaudent, quarum explicationem jam aggrediamur. Lineae tres per angulos hexagoni *A* oppositos ductae in puncto 7 sicuti lineae tres per angulos hexagoni *B* oppositos ductae in puncto 8 concurrunt. Cum enim puncta (734.61) et (761.34) in oppositis angulis hexagoni *A* siti sint, quae in intersectione planorum 734 et 761 punctum 7 tangentium coincidant, linea per haec puncta ducta punctum 7 tanget etc. Qua ex re apparet hexagoni *A* sicuti hexagoni *B* latus quodcunque per oppositum secari, et tria plana per latera opposita hexagoni *A* ducta in puncto 7, sicuti tria plana per latera opposita hexagoni *B* ducta in puncto 8 concurrere. Quod vero ad latera hexagonorum diversorum attinet I III V et (I) (III) (V) altera ab alteris secantur. Cum enim latera I (III) concurrere ostensum sit et signis 1 2 3 4 5 6 7 8 mutatis in 5 6 1 2 3 4 8 7 signa lineae (III) in I et I in (V) abeant, latus I etiam a (V) secatur. Praeterea lineae I (I) concurrunt, quia utraque in plano 612 sita est. Quo facto signa 1 2 3 4 5 6 in 3 4 5 6 1 2 vel 5 6 1 2 3 4 mutando linearum III V utramque a lineis (I) (III) (V) secari ostenditur. Eademque ratione laterum II IV VI et (II) (IV) (VI) altera cum alteris concurrere demonstratur. Si igitur, quae de lateribus hexagonum *A* et *B* enuntiata sunt, breviter complectimur, cum laterum I III V (II) (IV) (VI) et (I) (III) (VI) II IV VI altera ab alteris secentur ea omnia in eadem hyperbolida sita esse dicere possumus. Unde respicientibus nobis ad theoremata antecedentia hoc fluit theorema:

Theorema 14.

Si ex octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentium sex puncta certo quodam ordini disposita lineis jungantur, ita ut hexagonum efficiatur, cujus latus quodque plano per latus oppositum et septimum punctum ducto secetur, qua constructione sensu peripheriae pergendo certo ordini sex puncta obtinentur, quae sex lineis deinceps jungantur, ita ut alterum hexagonum *A* efficiatur, si porro prioris hexagoni latus quodque plano per latus oppositum et octavum punctum ducto secetur, quae puncta intersectionis lineis deinceps jungendo eodem modo tertium hexagonum *B* nanciscamur; utrumque hexagonum *A, B* in eadem hyperbolida situm est.

Hexagona *H, A, B* ita inter se comparata sunt, ut si eorum bina data sint, tertium facile reperiatur. Quod sine magno negotio patet, si hexagona *A, B* data sunt. Linea enim, quae jungit laterum I II et

(I) (II) puncta intersectionis, latus 12 hexagoni *H* erit. Si vero hexagona *H, A* data sunt videamus quomodo hexagonum *B* inveniatur. Hujus hexagoni latus (I) cum situm sit in plano per I et 1 ducto et a lineis III et V secetur, ea linea erit, quae puncta jungit, in quibus lineae III et V plano per I et 1 ducto occurrunt. Sic porro invenimus secundum latus (II) si puncta jungimus, in quibus latera IV et VI plano per II et 2 ducto occurrunt etc. Sed notam juvat cum hexagona *H* et *A* septem punctis 1 2 3 .... 7 datis determinata sint hexagonum *B* horum punctorum ope construere nos docuisse. Quo hexagono *B* datorum septem punctorum ope invento intersectio trium planorum, quorum quodque per bina latera opposita ipsius *B* transit, octavum punctum x determinabit.

Regiom. 25 Jan. 1840.