ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 138. № 3307. 19.

Integration der Störungsglieder für den Fall einer genäherten Commensurabilität der mittleren Bewegungen.

Von *Aug. Weiler.*

1.

Die Störungsglieder sind als Functionen der wahren Anomolien v und v_1 gegeben. In der theoretischen Astronomie ist es üblich, die Störungsglieder als Functionen einer einzigen Veränderlichen darzustellen, bevor man zu deren Integration schreitet. Diese Transformation der Störungsglieder ist aber von weitläufigen Entwicklungen abhängig. Ich habe den Vorschlag gemacht, die Störungen als Functionen der beiden Veränderlichen v und v_1 darzustellen, und in A. N. 2863, ferner unter **1.** in A. N. 3032 gezeigt, wie man dieses Ziel erreicht.

In Nr. 3032 habe ich die Störungsglieder in den folgenden Formen vorausgesetzt:

$$C\nu y^2 \sin(\eta + cv - c_1 v_1) v' \ , \qquad C\nu y^2 \cos(\eta + cv - c_1 v_1) v' \ ,$$

wo zur Abkürzung $\frac{p_1}{r_1} = y$ und $A + Bv = \eta$, ferner $\nu = \frac{\lambda}{(1-e^2)^{3/2}}$ gesetzt ist. Mit den Buchstaben A B C sind beständige Grössen bezeichnet, von welchen die beiden letzteren, B und C mit der störenden Masse multiplicirt sind; c und c_1 sind positive oder negative ganze Zahlen.

Ist Z das Integral des Störungsgliedes, so giebt die erste Form die Gleichung:

$$Z' = C\nu y^2 \sin(\eta + cv - c_1 v_1) v' \ .$$

In dem Argument des Sinus ersetze ich die Veränderliche v_1 durch die neue Veränderliche x vermittelst der Gleichung:

$$v_1 = (1 + {}^1\!/_2\, e_1^2)\,\nu v + x \ ,$$

und integrire partiell nach v, indem ich die Grössen y und x als unabhängig von v betrachte. Es ergiebt sich das partielle Integral:

$$\zeta = -C_1 y^2 \cos(\eta + cv - c_1 v_1) \ ,$$

und der Coefficient:

$$C_1 = \frac{C\nu}{B + c - c_1(1 + {}^1\!/_2\, e_1^2)\,\nu} \ .$$

Ich schreibe nun das vollständige Integral des Störungsgliedes in der Form $Z = \zeta + \xi$, und erhalte die Correction ξ aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}\xi' = \ & C_1 \nu y^2 c_1 (1 + {}^1\!/_2\, e_1^2) \sin(\eta + cv - c_1 v_1) R v' \\ & + C_1 \nu y^2 [(c_1 - 1) e_1 \sin(\eta + cv - c_1 v_1 + v_1) + (c_1 - 2)\, {}^1\!/_4\, e_1^2 \sin(\eta + cv - c_1 v_1 + 2v_1) \\ & \quad + (c_1 + 1) e_1 \sin(\eta + cv - c_1 v_1 - v_1) + (c_1 + 2)\, {}^1\!/_4\, e_1^2 \sin(\eta + cv - c_1 v_1 - 2v_1)](1 + R) v' \ .\end{aligned}$$

Die Grösse R folgt aus der bekannten Entwicklung:

$$(1 - e^2)^{3/2} \frac{r^2}{p^2} = 1 - 2e\cos v + 2(2e - \varkappa)\varkappa \cos 2v - 2(3e - 2\varkappa)\varkappa^2 \cos 3v + \cdots ,$$

in welcher zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\varkappa = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \ .$$

Die vorliegende identische Gleichung kann auch in der Form:

$$(1 - e^2)^{3/2} \frac{r^2}{p^2} = 1 + R$$

geschrieben werden, und es ist also:

$${}^1\!/_2\, R = -e\cos v + (2e - \varkappa)\varkappa \cos 2v - (3e - 2\varkappa)\varkappa^2 \cos 3v + \cdots$$

Offenbar hat jedes Glied der Derivirten ξ' die Form:

$$C_2 \nu y^2 \sin(\eta + kv - k_1 v_1) v' \ ,$$

wo k und k_1 positive oder negative ganze Zahlen sind, und ist demzufolge ebenso zu integriren wie das ursprüngliche Störungsglied.

Die zweite Form des Störungsgliedes giebt die Gleichung

$$Z' = C\nu y^2 \cos(\eta + cv - c_1 v_1) v' \ ,$$

und man erhält das partielle Integral:

$$\zeta = C_1 y^2 \sin(\eta + cv - c_1 v_1) \ .$$

Wird das vollständige Integral wieder in der Form $Z = \zeta + \xi$ geschrieben, so ergiebt sich die Correction ξ aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}\xi' = \; & C_1 \nu y^2 c_1 (1 + {}^1/_2\, e_1^2) \cos(\eta + c\,v - c_1 v_1)\, R\, v' \\ & + C_1 \nu y^2 [(c_1 - 1)\, e_1 \cos(\eta + c\,v - c_1 v_1 + v_1) + (c_1 - 2)\, {}^1/_4\, e_1^2 \cos(\eta + c\,v - c_1 v_1 + 2 v_1) \\ & \quad + (c_1 + 1)\, e_1 \cos(\eta + c\,v - c_1 v_1 - v_1) + (c_1 + 2)\, {}^1/_4\, e_1^2 \cos(\eta + c\,v - c_1 v_1 - 2 v_1)]\,(1 + R)\, v'\,.\end{aligned}$$

Die vorliegenden Gleichungen haben bemerkenswerthe Eigenschaften. In jedem Gliede von ξ' ist zu dem Coefficienten $C\nu$ des ursprünglichen Störungsgliedes entweder der Factor νe oder der Factor νe_1 hinzugekommen, wo ν e e_1 < 1 sind. Wenn ferner für irgend ein Glied von ξ' in dem Argument des Sinus oder des Cosinus der ganzzahlige Coefficient von v_1 verschwindet, so verschwindet auch dieses Glied von ξ'.

Doch ist das hier besprochene Integrationsverfahren unzulässig, wenn in dem Störungsgliede die ganzzahligen Coefficienten c und c_1 beide gleich Null sind, wenn also das Störungsglied ein säculares ist. Das säculare Störungsglied muss von dem veränderlichen Factor $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ befreit werden. Ich bediene mich hierzu der identischen Gleichung:

$$(1 - e_1^2)^{3/2} \frac{r_1^2}{p_1^2} = 1 - 2 e_1 \cos v_1 + 2\,(2 e_1 - \varkappa_1)\, \varkappa_1 \cos 2 v_1 - 2\,(3 e_1 - 2 \varkappa_1)\, \varkappa_1^2 \cos 3 v_1 + \cdots,$$

in welcher zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\varkappa_1 = \frac{e_1}{1 + \sqrt{1 - e_1^2}}\,.$$

Auf Grund der weiteren Abkürzung

$${}^1/_2\, R_1 = -e_1 \cos v_1 + (2 e_1 - \varkappa_1)\varkappa_1 \cos 2 v_1 - (3 e_1 - 2 \varkappa_1)\, \varkappa_1^2 \cos 3 v_1 + \cdots$$

folgen aus der identischen Gleichung die Werthe:

$$\frac{p_1^2}{r_1^2} = (1 - e_1^2)^{3/2} - \frac{p_1^2}{r_1^2} R_1\,, \qquad \nu \frac{p_1^2}{r_1^2} = \mu - \nu \frac{p_1^2}{r_1^2} R_1\,.$$

Durch die Substitution des letzteren Werthes erhalte ich ein säculares Störungsglied, welches von dem Factor $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ befreit ist, im Uebrigen aber periodische Störungsglieder, welche die vorgeschriebene Form haben. Der Coefficient C des säcularen Störungsgliedes ist mit der störenden Masse multiplicirt. Durch die Integration entsteht der Nenner B, welcher gleichfalls mit der störenden Masse multiplicirt ist. Man gelangt zu einer säcularen Störung, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt ist.

2.

In dem vorliegenden Aufsatz soll ein anderer Fall besprochen werden, in welchem das partielle Integral des Störungsgliedes einen kleinen Nenner hat. Es wird angenommen, dass das Verhältniss der mittleren Bewegung in der äusseren Ellipse zu der in der inneren Ellipse, welches mit μ bezeichnet wird, genähert gleich dem zweier ganzen Zahlen sei. Jedes Störungsglied, für welches in dem Argument des Sinus oder des Cosinus die Coefficienten c und c_1 von solcher Beschaffenheit sind, dass $c : c_1$ gleich ist jenem Verhältniss ganzer Zahlen, durch welches die Grösse μ genähert ausgedrückt wird, führt zu einer periodischen Störung, welche einen kleinen Integrationsnenner hat.

Dem obigen Integrationsverfahren zufolge hat das partielle Integral des Störungsgliedes den Nenner

$$B + c - c_1 (1 + {}^1/_2\, e_1^2)\, \nu\,.$$

Lässt man die Grösse B, welche die störende Masse als Factor enthält, ausser Acht, so ist der Integrationsnenner:

$$c - c_1 (1 + {}^1/_2\, e_1^2)\, \nu = c - c_1 \frac{(1 + {}^1/_2\, e_1^2)\, \lambda}{(1 - e^2)^{3/2}}\,.$$

Mit Rücksicht auf den Werth

$$\mu = \lambda \left(\frac{1 - e_1^2}{1 - e^2}\right)^{3/2}$$

geht derselbe über in:

$$c - c_1\, \mu \frac{1 + {}^1/_2\, e_1^2}{(1 - e_1^2)^{3/2}}\,.$$

Lässt man auch die mit e_1^2 multiplicirten Glieder ausser Acht, so ist der Integrationsnenner:

$$c - c_1 \mu = \delta\,.$$

Unter der Voraussetzung, dass der Quotient $c : c_1$ gleich jenem Verhältniss ganzer Zahlen ist, welchem die Grösse μ genähert gleich gesetzt werden kann, ist δ ein kleiner Bruchwerth.

Die Integrationsmethode führt auch zu Potenzen des Nenners δ. Ich habe die Correction des partiellen Integrals ζ mit ξ bezeichnet, und es ist aus dem unter **1.** gegebenen Werth der Derivirten ξ' zu ersehen, dass in dem besprochenen Falle die sämmtlichen Glieder von ξ' den Integrationsnenner δ haben. Man kann leicht zeigen, dass es unter diesen Gliedern solche giebt, durch deren partielle Integration abermals der Nenner δ entsteht, dass sich also in der Correction des partiellen Integrals ζ Glieder finden, welche den Integrationsnenner δ^2 haben. Ich erwähne, dass das Argument des Sinus oder des Cosinus, mit welchem irgend ein Glied des Werthes von ξ' multiplicirt ist, die Form $\eta + c\,v - c_1 v_1 + b\,v - b_1 v_1$ hat, wo b und b_1 positive oder negative ganze Zahlen sind. Der Fall $b_1 + c_1 = 0$ ist bekanntlich ausgeschlossen. Es ist auch der Fall $b = 0$, $b_1 = 0$ ausgeschlossen, weil in dem Werthe von ξ' kein Glied vorhanden ist, welches gleichartig ist mit dem ursprünglichen Störungsgliede, in welchgm das Argument des Sinus oder des Cosinus die Form $\eta + c\,v - c_1 v_1$ hat. Wohl aber giebt es in dem Werth von ξ' Glieder, in welchen das Argument des Sinus oder des Cosinus gleich $\eta + i(cv - c_1 v_1)$ ist, wo i eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet, die Fälle $i = 0$ und $i = 1$ aber ausgeschlossen sind. Diese Glieder der Derivirten ξ' sind es, deren partielle Integrale den Nenner δ^2 haben. Diese partiellen Integrale gehören in die erste Correction von ζ. Bezeichnet man die zweite Correction des partiellen Integrals ζ mit ξ_1, so sind in dem Werth der Derivirten ξ_1' Glieder vorhanden, welche mit dem Integrationsnenner δ^2 verbunden sind, und durch die partielle Integration abermals den Nenner δ erhalten. Die zweite Correction des partiellen Integrals ζ enthält also Glieder, welche den Integrationsnenner δ^3 haben. Es ist offenbar, dass es in der Reihenfolge der partiellen Integrale des Störungsgliedes Z' Glieder giebt, deren Nenner mit den aufsteigenden Potenzen von δ multiplicirt sind.

Ich nehme an, das partielle Integral des Störungsgliedes habe den Integrationsnenner δ. Diejenigen Glieder der ersten Correction des partiellen Integrals, welche mit dem Nenner δ^2 verbunden sind, haben den Factor $v\, e^c e_1^{c_1}$. Man kann sich den Nenner δ so klein denken, dass der Bruch $\frac{v\, e^c e_1^{c_1}}{\delta}$ nicht < ist. Die Convergenz der unendlichen Reihe, zu welcher die Integration des Störungsgliedes führt, ist in diesem Falle nicht vorhanden. In Wirklichkeit aber ist dem kleinen Nenner δ ein weiter Spielraum gegeben, in welchem der Bruchwerth $\frac{v\, e^c e_1^{c_1}}{\delta}$ beträchtlich kleiner als 1 ist.

Die Convergenz der unendlichen Reihe partieller Integrale ist übrigens auch in anderer Weise gefährdet. Ich nehme an, das partielle Integral ζ des Störungsgliedes Z' habe den Integrationsnenner δ. Es ist erwähnt worden, dass in der Derivirten ξ' der Correction von ζ jedes Glied gleichfalls den Nenner δ hat; dass es aber in dem Werthe von ξ' kein Glied giebt, in welchem das Argument des Sinus oder des Cosinus gleich $\eta + cv - c_1 v_1$ ist. Doch finden sich solche Glieder in der Derivirten der zweiten Correction. Denn die Derivirte ξ' enthält zwei Glieder, in welchen das Argument des Sinus oder des Cosinus gleich $\eta + cv - c_1 v_1 \pm v_1$ ist. Die partielle Integration dieser Glieder führt nicht zu einem weiteren Nenner δ. Aber es sind in der Derivirten der Correction dieser partiellen Integrale Glieder vorhanden, in welchen das Argument des Sinus oder des Cosinus gleich $\eta + cv - c_1 v_1$ ist. Die partiellen Integrale der letzteren Glieeer erhalten abermals den Integrationsnenner δ. Es ist durch deren Vorhandensein die Convergenz der unendlichen Reihe partieller Integrale ernstlicher in Frage gestellt als in dem Obigen. Dieselben haben zwar den Factor $\frac{(v\, e_1)^2}{\delta}$; es kann aber sein, dass der Bruch $\frac{(v\, e_1)^2}{\delta}$ nicht < 1 ist, dass es also in der zweiten Correction ξ_1 des partiellen Integrals ζ Glieder giebt, welche nicht < ζ sind.

3.

Wenn auch das unter **1.** besprochene Integrationsverfahren in dem Falle einer genäherten Commensurabilität der mittleren Bewegungen noch zulässig ist, so wird doch in diesem Falle ein anderes Integrationsverfahren in Vorschlag gebracht. Ich eliminire vermittelst der Gleichung:

$$c - c_1 \mu = \delta$$

den Coefficienten c. Das Argument des Sinus oder des Cosinus ist dann:

$$A + Bv + \delta v + c_1 (\mu v - v_1) .$$

Es ist bekannt, dass der Werth der Veränderlichen $\mu v - v_1$ durch eine goniometrische Function der Zeit ausgedrückt werden kann. Auf diesen Satz ist das hier zu besprechende Integrationsverfahren gegründet.

Um die Veränderliche $\mu v - v_1$ durch eine goniometrische Function von v und v_1 auszudrücken, gehe ich von den bekannten Gleichungen aus:

$$\varepsilon - e \sin \varepsilon = (1 - e^2)^{3/2} (t - t_0)$$

$$\varepsilon_1 - e_1 \sin \varepsilon_1 = \lambda (1 - e_1^2)^{3/2} (t - t_{01}) ,$$

wo ε und ε_1 die excentrischen Anomalien der Massenpunkte m und m_1 sind. Unter Berücksichtigung des Werthes

$$\mu = \lambda \left(\frac{1 - e_1^2}{1 - e^2}\right)^{3/2}$$

erhält man aus diesen Gleichungen durch die Elimination von t die folgende:

$$\mu(\varepsilon - e \sin \varepsilon) - (\varepsilon_1 - e_1 \sin \varepsilon_1) = M \qquad (1)$$

indem man die Beständige

$$\lambda (1 - e_1^2)^{3/2} (t_{01} - t_0) = M$$

setzt. Es bestehen ferner die folgenden Gleichungen:

$$(1 - e \cos \varepsilon)\, \varepsilon' = (1 - e^2)^{3/2} , \qquad v' = (1 + e \cos v)^2 .$$

Da $\frac{\varepsilon'}{v'} = \frac{d\varepsilon}{dv}$ ist, so hat man auch die Gleichung:

$$(1 - e \cos \varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dv} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos v)^2} .$$

Ich setze den schon unter **1.** gegebenen Werth

$$\frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos v)^2} = 1 - 2e \cos v + 2(2e - \varkappa)\varkappa \cos 2v - 2(3e - 2\varkappa)\varkappa^2 \cos 3v + \cdots ,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\varkappa = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} ,$$

hier ein, und führe die Gleichung über in:

$$(1 - e \cos \varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dv} = 1 - 2e \cos v + 2(2e - \varkappa)\varkappa \cos 2v - 2(3e - 2\varkappa)\varkappa^2 \cos 3v + \cdots$$

Durch deren Integration entsteht:

$$\varepsilon - e \sin \varepsilon = v - 2e \sin v + 2\,(e - {}^1\!/_2 \varkappa)\, \varkappa \sin 2v - 2\,(e - {}^2\!/_3 \varkappa)\, \varkappa^2 \sin 3v + \cdots \tag{2}$$

Die Integrationsbeständige fällt weg, weil bekanntlich $\varepsilon = 0$ ist, wenn $v = 0$ gesetzt wird.

In der nämlichen Weise findet man die Gleichung:

$$\varepsilon_1 - e_1 \sin \varepsilon_1 = v_1 - 2e_1 \sin v_1 + 2\,(e_1 - {}^1\!/_2 \varkappa_1)\, \varkappa_1 \sin 2v_1 - 2\,(e_1 - {}^2\!/_3 \varkappa_1)\, \varkappa_1^2 \sin 3v_1 + \cdots \tag{3}$$

in welcher zur Abkürzung gesetzt ist:
$$\varkappa_1 = \frac{e_1}{1 + \sqrt{1 - e_1^2}} \,.$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergiebt sich zunächst die folgende:

$$\begin{aligned}\mu\,(\varepsilon - e \sin \varepsilon) - (\varepsilon_1 - e_1 \sin \varepsilon_1) = {} & \mu\,(v - 2e \sin v + 2\,(e - {}^1\!/_2 \varkappa)\, \varkappa \sin 2v - 2\,(e - {}^2\!/_3 \varkappa)\, \varkappa^2 \sin 3v + \cdots) \\ & - (v_1 - 2e_1 \sin v_1 + 2\,(e_1 - {}^1\!/_2 \varkappa_1)\, \varkappa_1 \sin 2v_1 - 2\,(e_1 - {}^2\!/_3 \varkappa_1)\, \varkappa_1^2 \sin 3v_1 + \cdots)\,.\end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (1) aber geht dieselbe über in:

$$\begin{aligned}\mu v - v_1 - M = {} & 2\mu\,(e \sin v - (e - {}^1\!/_2 \varkappa)\, \varkappa \sin 2v + (e - {}^2\!/_3 \varkappa)\, \varkappa^2 \sin 3v - \cdots) \\ & - 2\,(e_1 \sin v_1 - (e_1 - {}^1\!/_2 \varkappa_1)\, \varkappa_1 \sin 2v_1 + (e_1 - {}^2\!/_3 \varkappa_1)\, \varkappa_1^2 \sin 3v_1 - \cdots)\end{aligned} \tag{4}$$

Hiermit ist die Veränderliche $\mu v - v_1$ durch eine goniometrische Function von v und v_1 ausgedrückt.

Ich schreibe die Gleichung (4) einfacher:

$$\mu v - v_1 - M = 2w\,,$$

indem ich mich der folgenden Abkürzungen bediene:

$$\begin{aligned} w &= \mu V - V_1 \\ V &= e \sin v - (e - {}^1\!/_2 \varkappa)\, \varkappa \sin 2v + (e - {}^2\!/_3 \varkappa)\, \varkappa^2 \sin 3v - \cdots \\ V_1 &= e_1 \sin v_1 - (e_1 - {}^1\!/_2 \varkappa_1)\, \varkappa_1 \sin 2v_1 + (e_1 - {}^2\!/_3 \varkappa_1)\, \varkappa_1^2 \sin 3v_1 - \cdots\end{aligned}$$

4.

Unter **3.** habe ich das Argument des Sinus oder des Cosinus in der folgenden Form geschrieben:

$$A + Bv + \delta v + c_1\,(\mu v - v_1)\,.$$

Auf Grund der Gleichung

$$\mu v - v_1 = M + 2w \tag{4}$$

wird dasselbe übergeführt in:

$$A + c_1 M + Bv + \delta v + 2c_1 w = \alpha + \beta v + 2c_1 w\,,$$

indem ich die weiteren Abkürzungen gebrauche:

$$\alpha = A + c_1 M\,, \qquad \beta = B + \delta\,.$$

Es handelt sich nun um die Integration des Störungsgliedes
$$Z' = C v y^2 \sin(\alpha + \beta v + 2c_1 w)\, v'\,.$$

Ich schreibe das Störungsglied in der folgenden Form an:

$$\begin{aligned} Z' &= C v y^2 \sin(\alpha + \beta v)\, v' + C v y^2\,(\sin(\alpha + \beta v + 2c_1 w) - \sin(\alpha + \beta v))\, v' \\ &= C v y^2 \sin(\alpha + \beta v)\, v' + 2\,C v y^2 \cos(\alpha + \beta + c_1 w) \sin c_1 w\, v'\,.\end{aligned}$$

In dem ersten Theil hat man zu setzen: $\quad v y^2 = \mu - v y^2 R_1\,,$

wo R_1 die unter **1.** gegebene Bedeutung hat:

$${}^1\!/_2 R_1 = -e_1 \cos v_1 + (2e_1 - \varkappa_1)\, \varkappa_1 \cos 2v_1 - (3e_1 - 2\varkappa_1)\, \varkappa_1^2 \cos 3v_1 + \cdots$$

In dem zweiten Theil setze ich den Factor

$$\sin c_1 w = c_1 w - \frac{c_1^3 w^3}{2 \cdot 3} + \frac{c^5 w^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots.$$

Der andere Factor des zweiten Theils wird nicht nach Potenzen von $c_1 w$ entwickelt. Es besteht die identische Gleichung:

$$\alpha + \beta + 2c_1 w = A + Bv + cv - c_1 v_1\,.$$

Addirt man beiderseits $\alpha + \beta$, theilt alsdann durch 2, so erhält man den Werth

$$\alpha + \beta + c_1 w = \alpha_1 + \beta_1 v + {}^1\!/_2\,(cv - c_1 v_1)\,;$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\alpha_1 = A + {}^1\!/_2\, c_1 M\,, \qquad \beta_1 = B + {}^1\!/_2\, \delta\,.$$

Das zu integrirende Störungsglied ist nun:

$$\begin{aligned} Z' = {} & C\mu \sin(\alpha + \beta v)\, v' - C v y^2 \sin(\alpha + \beta v)\, R_1 v' \\ & + 2\,C v y^2 \cos(\alpha_1 + \beta_1 v + {}^1\!/_2\,(cv - c_1 v_1))\left(c_1 w - \frac{c_1^3 w^3}{2 \cdot 3} + \cdots\right) v'\,,\end{aligned}$$

wo schliesslich noch $w = \mu V - V_1$ einzusetzen ist.

Die Integration des ersten Gliedes führt zu dem partiellen Integral

$$\zeta = -\frac{C\mu}{\beta}\cos(\alpha + \beta v)$$

des Störungsgliedes Z'. Alle übrigen Glieder, zu welchen die Transformation von Z' geführt hat, können als Derivirte der Correction ξ des partiellen Integrals angesehen werden. Offenbar ist in der Derivirten ξ' kein Glied vorhanden, welches ebenso wie die Glieder von ξ' in der unter **1.** beschriebenen Methode den Integrationsnenner $\beta = B + \delta$ hat. Es folgt hieraus, dass das vollständige Integral des Störungsgliedes Z' in der zweiten Methode nicht Potenzen des Integrationsnenners β enthält, dass also der Integrationsnenner β immer nur linear vorkommt, wie weit man auch die Reihe partieller Integrale fortsetzen mag.

Ferner ist zu erwähnen, dass in dem vollständigen Integral des Störungsgliedes Z' die mit dem Integrationsnenner β verbundenen Glieder hier weit weniger zahlreich sind, als in der unter **1.** besprochenen Methode. Es ist unzweifelhaft, dass in dem Falle einer genäherten Commensurabilität der mittleren Bewegungen immer dann, wenn das partielle Integral den Nenner β erhält, die zweite Integrationsmethode eine grössere Convergenz des Integrals liefert, als die erstere.

Handelt es sich um die Integration des Störungsgliedes

$$Z' = C v y^2 \cos(\alpha + \beta v + 2 c_1 w) v' ,$$

so wird dasselbe in ähnlicher Weise wie das obige übergeführt in:

$$\begin{aligned} Z' = \quad & C\mu\cos(\alpha + \beta v) v' - C v y^2 \cos(\alpha + \beta v) R_1 v' \\ & - 2 C v y^2 \sin(\alpha_1 + \beta_1 v + 1/2 (c v - c_1 v_1))\left(c_1 w - \frac{c_1^3 w^3}{2\cdot 3} + \cdots\right) v' . \end{aligned}$$

Das erste Glied des vorliegenden Werthes von Z' liefert das partielle Integral

$$\zeta = \frac{C\mu}{\beta}\sin(\alpha + \beta v) ;$$

Die übrigen Glieder geben die Derivirte der Correction des partiellen Integrals ζ.

Wir haben angenommen, dass das Verhältniss der mittleren Bewegung in der äusseren Ellipse zu der in der inneren Ellipse, welches mit μ bezeichnet wird, genähert gleich dem Verhältniss zweier ganzen Zahlen sei. Ist unter dieser Annahme in dem Argument des Sinus oder des Cosinus der Werth von $c : c_1$ nicht gleich jenem Verhältniss ganzer Zahlen, welchem die Grösse μ genähert gleich gesetzt werden kann, so ist ein Anlass nicht gegeben, das zweite weitläufigere Integrationsverfahren an die Stelle des unter **1.** besprochenen zu setzen. Es ist aber darauf zu achten, dass das erste partielle Integral nicht ohne Weiteres als eine Näherung des Integrals angesehen werde. Man muss untersuchen, ob in der Correction des partiellen Integrals ζ auch solche Glieder vorhanden sind, welche den kleinen Integrationsnenner β haben. Nur für den Fall, dass sich auch diese Glieder der Correction als kleine Bruchtheile des partiellen Integrals ζ darstellen, kann das letztere als eine Näherung des vollständigen Integrals angesehen werden. Andernfalls lässt sich eine solche nur damit erreichen, dass man dem partiellen Integral ζ die betreffenden Glieder der Correction beifügt.

Berichtigung zu Nr. 3032.

S. 114 Z. 14 und 15 v. u. und ebenso S. 116 Z. 11 und 12 v. o. anstatt des Factors $1/2\, e_1^2$ lies $1/4\, e_1^2$.

Karlsruhe im April 1895.*)

Aug. Weiler.

*) Eingegangen bei der Redaction am 29. Mai 1895. *Ktz.*

Ueber die für den Pulkowaer Catalog 1885 angewandte Refraction.

Von mehreren Seiten ist die Frage an mich gerichtet worden, ob für den Fundamentalcatalog 1885 die Refractionen nach unseren Tafeln unverändert oder mit den in der Vorrede angegebenen Correctionen berechnet sind. Ich ersehe hieraus, dass meine darauf bezüglichen Worte nicht deutlich genug abgefasst sind. Da in den wenigen Zeilen, welche die genannte Vorrede ausmachen, nur das zum Verständniss des Catalogs Unumgängliche enthalten sein konnte, hatte ich gemeint, eine darin mitgetheilte Angabe der gefundenen Correctionen wäre gleichbedeutend mit der Erklärung, dass diese im Catalog auch zur Anwendung gekommen sind. Erst durch die erwähnten Fragen ist es mir einleuchtend geworden, dass es besser gewesen wäre, diese Sache schon damals deutlicher hervorzuheben. Da voraussichtlich noch einige Monate vergehen werden, bis der zweite Band derselben Beobachtungsreihe fertig gedruckt sein wird, in dessen Einleitung die Herstellung des Catalogs ausführlich dargelegt ist, so dürfte eine frühere Aufklärung über den Sachverhalt noch anderen Astronomen erwünscht sein. Also: die Positionen des Pulkowaer Catalogs für 1885 — nicht die einzelnen Beobachtungen — sind mit der Refractionsconstante 57."358 und dem Ausdehnungscoefficienten der Luft 0.0047121 für 1° R. berechnet.

Pulkowa 1895 Juli 31.

M. Nyrén.