

# Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre.

VON H. GRASSMANN in Stettin.

---

Es giebt wohl kaum ein Gebiet, auf welchem sich die Unentbehrlichkeit der in meiner Ausdehnungslehre (von 1844 und 1862) dargestellten Kalküls so schlagend erwiese wie in der Mechanik. Man kann sagen, jeder einfache mechanische Begriff sei zugleich ein einfacher Verknüpfungsbegriff jenes Kalküls. Und in der That hat sich mir diese ganze Rechnungsmethode, nachdem nur einmal die erste Idee derselben erfaßt war, an der Hand der Mechanik am schnellsten und fruchtreichsten weiter entwickelt. Die Methoden, welche ich in diesem Aufsätze verwende, und die Gleichungen, zu denen ich durch sie gelange, habe ich (abgesehen von der hier und da geänderten Bezeichnung) ohne Ausnahme schon in einer Arbeit über die Theorie der Ebbe und Fluth, welche ich zu Pfingsten 1840 als Prüfungsarbeit bei der wissenschaftlichen Prüfungscommission in Berlin eingereicht habe, dargelegt. Nur weniges davon ist in meine Ausdehnungslehre von 1844 übergegangen. Die neueren Lehrbücher und Aufsätze über Mechanik, namentlich auch G. Kirchhoff's Vorlesungen (1875, 1876) zeigen mir, dass die Darstellung dieser Methoden noch heute ebenso förderlich sein werde, als sie es vor 37 Jahren gewesen wäre, wenn ich damals zu ihrer Veröffentlichung Zeit und Gelegenheit gefunden hätte. In einem späteren Aufsätze denke ich dann die hauptsächlichsten der hier noch nicht berührten Probleme der Mechanik durch neue, gleichfalls der Ausdehnungslehre entnommene Methoden zu lösen.

## § 1.

**Begriffe und Gesetze der Ausdehnungslehre, die hier benutzt werden sollen.**

Der Deutlichkeit wegen gebe ich hier eine Uebersicht über den Kalkül, so weit er in diesem Aufsätze zur Anwendung kommen soll, verweise aber in Bezug auf die nähere Begründung auf meine Ausdehnungslehren von 1844 und 1862, welche ich im Folgenden mit  $\mathfrak{A}$ ,

und  $\mathfrak{A}_2$  bezeichne. Ich lege den Begriff der *Strecke* zu Grunde. Ich verstehe darunter eine begrenzte gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung, d. h. ich setze zwei Strecken als solche dann und nur dann gleich, wenn sie gleich lang und gleichgerichtet sind. Strecken werden *addirt*, indem man sie stetig aneinanderlegt, dann ist die Strecke vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkt der letzten ihre *Summe* ( $\mathfrak{A}_1$  § 15—18,  $\mathfrak{A}_2$  220). Die *Subtraction* führt auf die Addition zurück, da man statt eine von dem Punkte  $A$  nach  $B$  gehende Strecke zu subtrahiren, die von  $B$  nach  $A$  gehende addiren kann. Der Begriff der *Vervielfachung* oder *Theilung* durch eine Zahl ergibt sich aus dem allgemeinen Begriffe dieser Verknüpfungen unmittelbar. Dass für alle diese Verknüpfungen die gewöhnlichen Rechnungsgesetze derselben vollständig gelten, ist in der Ausdehnungslehre bewiesen.

Das *äussere Product* der Strecken  $a$  und  $b$ , geschrieben  $[ab]$ , wird formell dadurch definiert, dass erstens wie bei jedem Product die Beziehung zur Addition gilt, d. h.  $[a(b+c)] = [ab] + [ac]$  und  $[(a+b)c] = [ac] + [bc]$  ist, und zweitens das äussere Product gleicher Strecken null ist,  $[aa] = 0$ , begrifflich aber dadurch, dass wenn  $a$  die Strecke von dem Punkt  $A$  nach  $B$ ,  $b$  die Strecke von  $B$  nach  $C$  oder von  $A$  nach  $D$  ist, dann  $[ab]$  der *Flächenraum* des Parallelogramms  $ABCD$  ist, und zwar in dem Sinne, dass zwei Flächenräume als solche dann und nur dann gleich sind, wenn sie in parallelen Ebenen liegen, gleichen Inhalt haben und der Umfang in beiden nach derselben Seite (rechts oder links) hin umläuft ( $\mathfrak{A}_1$  § 28—30, 37,  $\mathfrak{A}_2$  239 ff.). Die Addition der Flächenräume, auch wenn sie nicht in parallelen Ebenen liegen, ist durch die Formel  $[ab] + [ac] = [a(b+c)]$  vollkommen bestimmt. Aus der Formel  $[(a+b)(a+b)] = 0$  ergibt sich sogleich das zweite wichtige Gesetz der äusseren Multiplication, nämlich  $[ab] = -[ba]$ .

Das äussere Product dreier Strecken  $a, b, c$  oder eines Flächenraums  $[ab]$  und einer Strecke  $c$ , wird formell dadurch definiert, dass  $[abb] = 0$  und also auch  $[abc] = -[acb]$  ist, begrifflich bei gehöriger Zeichenbestimmung als Inhalt eines Spates (Parallelepipeds), was  $a, b, c$  zu aneinander stossenden Seiten hat. Es wird null, wenn die drei Strecken in Einer Ebene liegen. Ferner ist  $[abc] = [bca] = [cab] = -[acb] = -[cba] = -[bac]$ . ( $\mathfrak{A}_1$  § 37,  $\mathfrak{A}_2$  240 ff.).

Unter dem *inneren Producte*  $[a|b]$  zweier Strecken  $a$  und  $b$ , deren Längen  $a$  und  $b$  sind, und die den Winkel  $\angle ab$  einschliessen, verstehe ich das Product  $[a|b] = ab \cos \angle ab$ , und für  $[a|a]$  schreibe ich der Kürze wegen  $a^2$  und nenne dies das innere Quadrat der Strecke  $a$  ( $\mathfrak{A}_1$  XI,  $\mathfrak{A}_2$  179). Ich will den Verein dreier Strecken  $e_1, e_2, e_3$ , die zu einander senkrecht sind, und deren Längen und deren äusseres Product  $[e_1 e_2 e_3]$  gleich Eins sind, einen Normalverein nennen. Die Ge-

setze der inneren Multiplication ergeben sich dann unmittelbar aus dem Begriff; namentlich  $[a | b] = [b | a]$ ;  $[a | b] = 0$ , wenn  $a$  auf  $b$  senkrecht;  $a^2 = a^2$ , wenn  $a$  die Länge von  $a$ ,  $[a | b] = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$ , wenn  $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ ,  $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$  ist und  $e_1, e_2, e_3$  einen Normalverein bilden. Will man eine Einheit eines Normalvereins als Vielfachensumme von den Einheiten eines andern ausdrücken, so ergeben sich die Coefficienten unmittelbar als innere Producte dieser letzteren drei Einheiten in die erstgenannte z. B.  $e_1 = [e_1 | \varepsilon_1] \varepsilon_1 + [e_1 | \varepsilon_2] \varepsilon_2 + [e_1 | \varepsilon_3] \varepsilon_3$ . In der That setzt man  $e_1 = x \varepsilon_1 + y \varepsilon_2 + z \varepsilon_3$ , so erhält man durch innere Multiplication mit  $\varepsilon_1$  unmittelbar  $[e_1 | \varepsilon_1] = x$ , da  $[e_2 | \varepsilon_1], [e_3 | \varepsilon_1] = 0$  und  $\varepsilon_1^2 = 1$  ist, und ebenso  $[e_1 | \varepsilon_2] = y$ ,  $[e_1 | \varepsilon_3] = z$  also  $e_1 = [e_1 | \varepsilon_1] \varepsilon_1 + [e_1 | \varepsilon_2] \varepsilon_2 + [e_1 | \varepsilon_3] \varepsilon_3$ .

Es hat nicht die geringsten Schwierigkeiten, die durch diesen Kalkül erhaltenen Gleichungen in algebraische Gleichungen zu verwandeln. Man hat dann nur ein beliebiges Coordinatensystem zu Grunde zu legen, auf den drei Coordinatenachsen drei Strecken  $e_1, e_2, e_3$  anzunehmen und jede in einer Gleichung vorkommende Strecke als Vielfachensumme von  $e_1, e_2, e_3$ , also in der Form  $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ , und jeden darin vorkommenden Flächenraum in der Form  $\alpha_1 [e_2 e_3] + \alpha_2 [e_3 e_1] + \alpha_3 [e_1 e_2]$  darzustellen, wobei die Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  die Coordinaten dort der Strecke, hier des Flächenraums heissen mögen, so erhält man schliesslich Gleichungen, in welchen entweder gar keine geometrischen Grössen mehr vorkommen, oder welche in den Formen  $\mathfrak{B}_1 e_1 + \mathfrak{B}_2 e_2 + \mathfrak{B}_3 e_3 = 0$  oder  $\mathfrak{B}_1 [e_2 e_3] + \mathfrak{B}_2 [e_3 e_1] + \mathfrak{B}_3 [e_1 e_2] = 0$  erscheinen, wo die  $\mathfrak{B}$  nur Functionen der Coordinaten sind. Aus jeder solchen Gleichung entspringen dann die drei Gleichungen  $\mathfrak{B}_1 = 0, \mathfrak{B}_2 = 0, \mathfrak{B}_3 = 0$ .

Für das Differentiiren und Integriren reichen die gewöhnlichen Definitionen aus. In der Mechanik kommen als unabhängige Veränderliche ausser der Zeit  $t$  nur Raumgrössen vor. Es ist äusserst bequem hiernach die Differentiale verschieden zu bezeichnen. Ich bezeichne den Differentialquotienten nach der Zeit, wobei nur diejenigen Grössen als constant betrachtet werden, welche ausdrücklich als in der Zeit sich nicht ändernd festgesetzt sind, mit  $\delta$ , so dass, wenn z. B. die Strecke  $x$  in einer echten Reihe ( $\mathfrak{N}_2$  454),  $x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$  dargestellt ist, in welcher  $a_0, a_1, a_2, \dots$  Strecken sind, die sich in der Zeit nicht ändern,  $\delta x = a_1 + 2 a_2 t + \dots$  ist.

Dagegen bezeichne ich die Differentiale von Functionen räumlicher Grössen, bei welchen die Zeit als constant gesetzt wird, im Allgemeinen mit  $d$ . Auch der Begriff der partiellen Differentialquotienten der Functionen räumlicher Grössen lässt sich (wie es in  $\mathfrak{N}_2$  436 ff. geschehen ist) genau ebenso feststellen, wie für die Functionen algebraischer Grössen. Doch wähle ich den zwar etwas umständlicheren, aber, wie

ich glaube, den Lesern leichter zugänglichen Weg der Reduction auf partielle Differentialquotienten von Functionen algebraischer Grössen. Ich lege einen Normalverein  $e_1, e_2, e_3$  zu Grunde und drücke die Strecken  $x, y, \dots$ , von denen eine algebraische Function  $f$  abhängen soll, in Coordinaten durch die Strecken jenes Vereins aus, nämlich  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ ,  $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ , u. s. w., so wird  $f$  eine Function dieser Coordinaten  $x_1, x_2$ , u. s. w. Sind nun  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$  u. s. w. die zu dem Verein sämtlicher Coordinaten gehörigen partiellen Differentialquotienten ( $\mathcal{A}_2$  436), so verstehe ich unter dem partiellen Differentialquotienten von  $f$  nach der Strecke  $x$ , geschrieben  $\frac{\partial}{\partial x} f$ , die Strecke

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} e_3.$$

Es folgt hieraus sogleich, dass

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} f \mid dx \right] = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

sei. Es bleibt aber nun zu zeigen, dass  $\frac{\partial}{\partial x} f$ , dessen Begriff hier an den Normalverein  $e_1, e_2, e_3$  geknüpft war, ganz unverändert bleibt, wenn man statt des letzteren einen beliebigen andern Normalverein  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  zu Grunde legt. Es sei  $x = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \xi_3 \varepsilon_3$ , also

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \xi_3 \varepsilon_3.$$

Multiplicirt man diese Gleichung innerlich mit  $e_1$ , so erhält man

$$x_1 = \xi_1 [\varepsilon_1 \mid e_1] + \xi_2 [\varepsilon_2 \mid e_1] + \xi_3 [\varepsilon_3 \mid e_1],$$

da  $e^2_1 = 1$ ,  $[e_1 \mid e_2] = [e_1 \mid e_3] = 0$  ist; und hieraus erhält man die Werthe für  $x_2$  und  $x_3$ , indem man statt  $e_1$  beziehlich  $e_2$  und  $e_3$  setzt.

Somit wird  $\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} = [\varepsilon_1 \mid e_1]$ , überhaupt  $\frac{x_r}{\partial \xi_s} = [\varepsilon_s \mid e_r]$ . Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} [\varepsilon_1 \mid e_1] + \frac{\partial f}{\partial x_2} [\varepsilon_1 \mid e_2] + \frac{\partial f}{\partial x_3} [\varepsilon_1 \mid e_3], \end{aligned}$$

und hieraus erhält man  $\frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \frac{\partial f}{\partial \xi_3}$  indem man  $e_2$  und  $e_3$  statt  $e_1$  setzt; also wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial \xi_3} \varepsilon_3 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} ([\varepsilon_1 \mid e_1] \varepsilon_1 + [\varepsilon_2 \mid e_1] \varepsilon_2 + [\varepsilon_3 \mid e_1] \varepsilon_3) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2} ([\varepsilon_1 \mid e_2] \varepsilon_1 + [\varepsilon_2 \mid e_2] \varepsilon_2 + [\varepsilon_3 \mid e_2] \varepsilon_3) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_3} ([\varepsilon_1 \mid e_3] \varepsilon_1 + [\varepsilon_2 \mid e_3] \varepsilon_2 + [\varepsilon_3 \mid e_3] \varepsilon_3) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} e_3 \end{aligned}$$

nach dem für die Umwandlung der Normalvereine erwiesenen Satze, d. h. der Werth des partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial}{\partial x} f$  ist unabhängig von dem zu Grunde gelegten Normalvereine.

## § 2.

## Grundgesetz der Mechanik.

Wenn  $x$  die Strecke bezeichnet, die von einem festen Punkte nach dem sich bewegenden Punkte gezogen ist, so ist unmittelbar klar, dass  $\delta x$  die Geschwindigkeit dieses Punktes ihrer Grösse und Richtung nach, und  $\delta^2 x$  in gleicher Weise die Beschleunigung oder Bewegungsänderung desselben darstellt\*). Nach dem Beharrungsgesetz muss jede Aenderung in der Bewegung eines materiellen Punktes einer auf ihn einwirkenden *Ursache* zugeschrieben werden. Es sei die *Einwirkung* dieser *Ursache* gleich der Strecke  $p$ , so haben wir die Gleichung

$$(1) \quad \delta^2 x = p.$$

Ist z. B. diese *Einwirkung* constant gleich der Strecke  $g$ , so erhalten wir durch Integration der Gleichung  $\delta^2 x = g$  unmittelbar  $\delta x = c + gt$ , wo  $c$  eine willkürliche constante Strecke (die Anfangsgeschwindigkeit) ist, und durch abermalige Integration  $x = b + ct + \frac{1}{2}gt^2$ , wo  $b$  abermals eine constante Strecke (der Anfangswerth von  $x$ ) ist. Diese Gleichungen enthalten die gewöhnlichen Wurfgesetze in allgemeinsten Form.

Das sogenannte Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte lässt sich so ausdrücken: Wenn die *Einwirkungen* mehrerer *Ursachen* auf den Punkt  $x$  einzeln genommen gleich den Strecken  $p_1, p_2, \dots$  sind, so ist die gleichzeitige *Einwirkung*  $p$  aller jener *Ursachen* gleich der Summe dieser Strecke,  $p = p_1 + p_2 + \dots$ . Es gilt also die Gleichung (1) auch noch, wenn  $p$  die Summe aller *Einwirkungen* ist, welche verschiedene *Ursachen* gleichzeitig auf den bewegten Punkt üben.

*Einfache Kraft* nenne ich eine *Ursache*, welche in einem materiellen Punkte in der Art ihren Sitz hat, dass die *Einwirkung* dieser *Ursache* auf einen andern materiellen Punkt nur von der gegenseitigen Lage dieser Punkte abhängt, hingegen von dem umgebenden Raume ganz unabhängig ist. Wenn also ein materieller Punkt  $A$  auf einen andern  $B$  die *Einwirkung*  $BC$  übt, und man die Figur  $ABC$  beliebig im Raume nach  $A_1 B_1 C_1$  verlegt, so aber, dass  $ABC$  congruent mit  $A_1 B_1 C_1$  bleibt, so muss  $B_1 C_1$  die *Einwirkung* von  $A_1$  auf  $B_1$  bleiben. Hieraus folgt, dass  $BC$  in der unendlichen geraden Linie  $AB$  liegen muss.

\*) Noch einfacher wäre es,  $x$  unmittelbar als den sich bewegenden Punkt zu setzen. Doch spare ich dies auf einen späteren Aufsatz, in welchem die Rechnung mit Punkten dargestellt werden soll.

Denn wäre dies nicht der Fall, sondern bildeten  $A, B, C$  ein Dreieck, und man drehte dies um die Axe  $AB$  um beliebigen Winkel in die Lage  $ABC_1$ , so müsste  $A$  auf  $B$  die Einwirkung  $BC_1$  üben, was mit der Einwirkung  $BC$  in Widerspruch ist, also kann die Kraft nur anziehend oder abstossend wirken. Aber noch mehr, wenn die Punkte  $A$  und  $B$  von ganz gleicher Beschaffenheit sind, so muss man auch  $A$  mit  $B$  vertauschen können, ohne die Wirkung zu ändern. Ueibt nun  $A$  auf  $B$  die (anziehende oder abstossende) Wirkung  $BC$ , und man dreht  $ABC$  um den Mittelpunkt von  $AB$  in die Lage  $A_1B_1$ , so dass  $A_1$  auf  $B$  und  $B_1$  auf  $A$  fällt, und sei  $C_1$  der Punkt, auf den dann  $C$  fällt, so muss  $B_1C_1$  d. h.  $AC_1$  nicht bloss als Einwirkung des Punktes  $A_1$  auf  $B_1$  sondern auch des Punktes  $B$  auf  $A$  aufgefasst werden können, d. h. die Einwirkung muss gegenseitig und die beiden Einwirkungen müssen einander entgegengesetzt gleich sein. Auch kann die Grösse dieser Einwirkungen, wenn die materiellen Punkte dieselbe Beschaffenheit beibehalten, nur eine Function der gegenseitigen Entfernung sein\*). Wenn nun  $A$  und  $B$  zwar nicht ganz gleiche Beschaffenheit haben, aber doch  $A$  auf  $B$  die entgegengesetzt gleiche Wirkung übt wie  $B$  auf  $A$ , so nennen wir  $A$  und  $B$  an *Masse* gleich. Welche Masse wir als Einheit der Massen zu Grunde legen, ist an sich gleichgültig. Nachdem aber diese Einheit festgesetzt ist, so setzen wir die Kraft der Beschleunigung gleich, welche sie der Masse 1 mittheilt. Daher können wir in der Gleichung (1) den Endpunkt von  $x$  als einen Punkt von der Masse 1 setzen und  $p$  als die Kraft oder als die Summe der Kräfte, die auf ihn wirken. In diesem Sinne können wir die Gleichung (1) als die Grundgleichung der Mechanik setzen.

## § 3.

## Bewegung eines freibeweglichen Vereins materieller Punkte.

Ich unterscheide *innere* und *äussere* Kräfte in Bezug auf den Verein. Innere Kräfte sind solche, mit denen ein Punkt des Vereins auf einen andern Punkt desselben Vereins wirkt, äussere die übrigen. Ich nehme zuerst alle Punkte des Vereins als von gleicher Masse und zwar von der Masse 1 an. Nun seien  $x_1, \dots, x_m$  die von dem festen Punkte nach den beweglichen Punkten des Vereins gezogenen Strecken,  $p_1$  die Summe aller Kräfte, die auf den ersten Punkt wirken, u. s. w. so hat man nach (1) die  $m$  Gleichungen  $\delta^2 x_1 = p_1, \dots, \delta^2 x_m = p_m$ , diese addirt geben

$$\delta^2 x_1 + \dots + \delta^2 x_m = p_1 + \dots + p_m.$$

Die inneren Kräfte, da sie paarweise entgegengesetzt gleich sind, heben

\*) Es liegt hierin schon, dass ich die Kräfte, mit welcher die in elektrischen Strömen bewegten Elektricitäten wirken, nicht für einfache Kräfte halten kann.

sich bei der Addition weg, folglich können wir hier  $p_1, \dots, p_m$  als äussere Kräfte betrachten. Nun sei  $s$  die Strecke, die von dem festen Punkte nach dem Schwerpunkte des Vereins gezogen ist, und  $y_1, \dots, y_m$  die Strecken, die von dem Schwerpunkt nach den Punkten des Vereins gezogen sind, so ist nach der Definition des Schwerpunktes  $y_1 + \dots + y_m = 0$ . Nun ist aber  $x_1 = s + y_1, \dots, x_m = s + y_m$ , also  $x_1 + \dots + x_m = ms$ , worin zugleich die Construction des Schwerpunktes liegt, also

$$\delta^2 x_1 + \dots + \delta^2 x_m = \delta^2 (x_1 + \dots + x_m) = m \delta^2 s,$$

und so erhält man aus obiger Gleichung

$$(2) \quad \delta^2 s = \frac{1}{m} p,$$

wo  $p$  die Summe aller äusseren Kräfte und  $m$  die Masse des Vereins ist. Dies ist die Gleichung der Bewegung des Schwerpunktes. Sie kann uns zugleich als Gleichung für die Bewegung eines Punktes von der Masse  $m$  gelten und wir könnten von nun an auch Punkte von ungleicher Masse annehmen, doch behalten wir der Einfachheit wegen, ohne an Allgemeinheit etwas einzubüssen, auch jetzt Punkte von der Masse 1 bei. Führen wir in die Gleichung für die Bewegung des ersten Punktes statt  $x_1$  seinen Werth  $s + y_1$ , statt  $\delta^2 x_1$  also  $\delta^2 s + \delta^2 y_1$  und statt  $\delta^2 s$  den aus (2) gefundenen Werth ein, so erhalten wir

$$(3) \quad \delta^2 y_1 = p_1 - \frac{1}{m} p, \quad \text{u. s. w.} \quad \delta^2 y_m = p_m - \frac{1}{m} p$$

als Gleichungen für die relativen Bewegungen eines beliebigen Vereins in Bezug auf den Schwerpunkt des Vereins.

Multiplicirt man die Gleichung  $\delta^2 x_1 = p_1$  äusserlich mit  $x_1$ , so erhält man links  $[x_1 \delta^2 x_1]$ , dies ist aber das Zeitdifferential von  $[x_1 \delta x_1]$ , da bei der Differentiation das andere Glied  $[\delta x_1 \delta x_1]$  nach den Gesetzen der äusseren Multiplication null ist. Also erhält man  $\delta [x_1 \delta x_1] = [x_1 p_1]$ . Bildet man dieselben Gleichungen für die andern Punkte und addirt, so erhält man mit Anwendung der Summenbezeichnung

$$(4) \quad \delta \Sigma [x \delta x] = \Sigma [x p].$$

Auch hier heben sich die inneren Kräfte weg; denn es sei z. B.  $\lambda(x_2 - x_1)$  die Kraft, mit der der erste Punkt auf den zweiten wirkt, so ist die Wirkung, die dieser auf jenen übt, die entgegengesetzte, also  $\lambda(x_1 - x_2)$ , also in der Summe auf der rechten Seite  $[x_1 \lambda(x_2 - x_1)] + [x_2 \lambda(x_1 - x_2)] = \lambda[x_1 x_2] + \lambda[x_2 x_1] = 0$ , da  $[x_2 x_1] = -[x_1 x_2]$  ist. Also heben sich alle inneren Kräfte weg. Ebenso auch die nach dem Anfangspunkt der  $x$  gerichteten Kräfte. Denn ist  $\lambda x$  eine solche auf den ersten Punkt wirkende Kraft, so wird  $[x_1 \lambda x_1] = 0$ . Wirken daher keine andern äusseren Kräfte ein, als solche, die nach dem Anfangspunkt der  $x$  gerichtet sind, so sagt die Gleichung (4) die Unveränderlichkeit der gesammten Flächenbewegung  $\Sigma x \delta x$  aus.

Multiplicirt man in gleicher Weise die Gleichungen (3) äusserlich mit  $y_1$  u. s. w. und addirt, so erhält man, da  $\sum \left[ y \frac{p}{m} \right] = \frac{1}{m} [\Sigma y \cdot p]$  vermöge der Eigenschaft des Schwerpunktes null ist,

$$(5) \quad \delta \Sigma [y \delta y] = \Sigma [y p]$$

d. h. die Flächengleichung (4) gilt auch, wenn man statt des festen Anfangspunktes der  $x$  den beweglichen Schwerpunkt setzt.

Endlich multipliciren wir die Gleichung  $\delta^2 x_1 = p_1$  innerlich mit  $\delta x_1$ , so erhalten wir, da  $\delta [\delta x_1]^2 = 2 [\delta^2 x_1 | \delta x_1]$  ist,  $\frac{1}{2} \delta [\delta x_1]^2 = [p_1 | \delta x_1]$ , oder auf alle Punkte des Vereins angewandt

$$(6) \quad \delta \Sigma \frac{1}{2} (\delta x)^2 = \Sigma [p | \delta x]$$

d. h. die Zunahme der lebendigen Kraft  $\Sigma \frac{1}{2} (\delta x)^2$  während einer Zeit ist gleich der Arbeit  $\Sigma [p | \delta x]$  aller Kräfte während derselben Zeit.

Es ist für die weitere Entwicklung der Gleichung (6) sehr förderlich, die gesammte Kraft  $p$ , mit welcher mehrere Punkte auf den Punkt  $x_1$  wirken, als partiellen Differentialquotienten nach  $x_1$  von einer algebraischen Function aller dieser Punkte aufzufassen, so dass also, wenn  $U$  diese Function ist,  $p = \frac{\partial}{\partial x_1} U$  sei. Man kann dann sagen, dass die Kraft  $p_1$  dem Streben\*) entspringe, die Function  $U$  zu vergrössern. Die Vergrösserung nämlich, welche  $U$  durch eine unendlich kleine Verschiebung  $\delta x_1$  erfährt, ist  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_1} U | \delta x_1 \right]$ ; diese Vergrösserung ist, wenn  $\delta x_1$  dieselbe Länge beibehält, am grössten, wenn  $\delta x_1$  die Richtung des ersten Factors hat, wie unmittelbar aus der Formel  $[a | b] = ab \cos \angle ab$  folgt, d. h. die durch die Kraft  $p_1$  bewirkte Bewegung nimmt diejenige Richtung an, in welcher die Function  $U$  am meisten vergrössert d. h. das Streben am vollkommensten erfüllt wird. Ebenso wenn der Punkt  $x_1$  seine Lage verändert,  $\delta x_1$  aber stets dieselbe Länge behält, und die Richtung die des ersten Factors  $\frac{\partial}{\partial x_1} U$  bleibt, so verhält sich die Kraft wie die Vergrösserung von  $U$  d. h. wie die Erreichung des Zieles, welches sie erstrebt. Man kann daher in der That die Kraft  $p_1$  als Aeusserung des Strebens, die Function  $U$  zu vergrössern auffassen. Bekanntlich wird  $U$  das Potential genannt.  $U$  zu finden, hat keine Schwierigkeit. Betrachten wir zuerst die Kraft  $p_{21}$ , mit der ein Punkt  $x_2$  auf einen andern  $x_1$  wirkt. Diese Kraft lässt sich nach § 2. als Function ihrer Entfernung auffassen, also als  $f(r)$ . Aber um die Richtung mit darzustellen, schreiben wir sie

$$p_{21} = \frac{1}{r} f(r) (x_1 - x_2).$$

\*) Diese Idee des Strebens (der Tendenz) habe ich in der vorher genannten Arbeit vom Jahre 1840 zu Grunde gelegt.



Hier ist  $r$  die Länge von  $x_1 - x_2$ , d. h.  $r^2 = (x_1 - x_2)^2$ , also differenziert:

$r dr = [(x_1 - x_2) | (dx_1 - dx_2)]$  oder  $dr = \frac{1}{r} (x_1 - x_2) | (dx_1 - dx_2)$ , also

$$\begin{aligned} f(r) dr &= \frac{1}{r} f(r) [(x_1 - x_2) | (dx_1 - dx_2)] \\ &= [p_{21} | (dx_1 - dx_2)]. \end{aligned}$$

Nun sei

$\int f r \cdot dr = U_{12}$  so ist  $dU_{12} = [p_{21} | (dx_1 - dx_2)]$  also  $\frac{\partial}{\partial x_1} U_{12} = p_{21}$  und so auch  $\frac{\partial}{\partial x_2} U_{12} = p_{12}$ . Hat man nun auf gleiche Weise zwischen je 2 Punkten einer Schaar die Grössen  $U_{r,s}$  aufgestellt, so wird ihre Summe  $U$  eine Function dieser Punkte, und die Kraft, welche auf einen Punkt  $x_1$  dieser Schaar die übrigen Punkte üben, ist dann  $= \frac{\partial}{\partial x_1} U$ .

Für die Einführung dieses Potentials in Gleichung (6) ist gleichfalls die Unterscheidung in äussere und innere Kräfte wichtig. Es sei  $V$  das vollständige innere Potential d. h. die Summe der Potentiale zwischen je 2 Punkten des Vereins, und  $U$  das gesammte äussere Potential, d. h. die Summe der Potentiale zwischen je einem äusseren und inneren Punkte, so lassen die ersteren in der Gleichung (6) eine vollständige Integration zu, die letzteren nur, insofern die äusseren Punkte in der Zeit unveränderlich sind. In der That betrachtet man in der Summe  $\Sigma [p | \delta x]$  der Gleichung (6) die Kräfte  $p_{12}$  und  $p_{21}$ , mit denen die ersten beiden Punkte aufeinander wirken und das zugehörige Potential  $U_{12}$ , so ist  $[p_{12} | \delta x_2] + [p_{21} | \delta x_1]$  der zugehörige Theil jener Summe, also  $= \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} U_{12} | \delta x_2 \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} U_{12} | \delta x_1 \right] = \delta U_{12}$  und dies auf alle inneren Kräfte ausgedehnt, wird der daraus entspringende Theil jener Summe  $= \delta V$  und die Gleichung (6) nimmt die Gestalt an:

$$(7) \quad \frac{1}{2} \Sigma (\delta x)^2 = V + \int \Sigma \left( \frac{\partial}{\partial x} U | \delta x \right).$$

#### § 4.

##### Bewegung eines beschränkt beweglichen Vereins.

Die Beschränkung in der Bewegung eines Vereins wird am einfachsten durch Bedingungs-Gleichungen dargestellt, welchen die bewegten Punkte unterworfen sind. Allein durch diese Gleichungen ist die Bewegung noch nicht bestimmt. Vielmehr muss man Kräfte annehmen, welche auf die Punkte des Vereins wirken, sobald sich diese auch nur unendlich wenig aus der Lage, die den Gleichungen ent-

spricht, herausbewegen, und die sie unwiderstehlich in eine Lage zurücktreibt, welche diesen Gleichungen genügt. Auf die nähere Bestimmung dieser Kräfte kommt es an. Es sei  $L = 0$  eine solche Bedingungsgleichung, so wollen wir die daraus entspringenden Kräfte dem Streben zuschreiben, jene Gleichung  $L = 0$  zu erhalten, d. h. einem Potential, welches gleich  $L$  oder einer beliebigen Function von  $L$  etwa gleich  $f(L)$  ist. Dies vorausgesetzt ist die Kraft, welche jenes Streben  $L = 0$  zu erhalten, auf den P.  $x_1$  hervorruft  $= \frac{\partial}{\partial x_1} f(L) = f' L \frac{\partial}{\partial x_1} L$ , wenn  $f' L$  die abgeleitete Function von  $fL$  ist, oder bezeichnen wir mit  $\lambda$  diese abgeleitete Function, so ist die Kraft, die der Punkt  $x_1$  vermöge jenes Strebens erleidet,  $\lambda \frac{\partial}{\partial x_1} L$ , die Kraft, die der P.  $x_2$  dadurch erleidet  $\lambda \frac{\partial}{\partial x_2} L$  u. s. w. Sind nun ausser jener Bedingungsgleichung  $L = 0$  noch andere  $M = 0$  u. s. w., so entspringen daraus die Kräfte  $\mu \frac{\partial}{\partial x_1} M$ ,  $\mu \frac{\partial}{\partial x_2} M$ , u. s. w., und die Gleichungen der Bewegung werden nach dem Grundgesetz (1)

$$(8) \quad \begin{cases} \delta^2 x_1 = p_1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} L + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} M + \dots \\ \delta^2 x_2 = p_2 + \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} L + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} M + \dots \end{cases}$$

wo

$$L = 0, \quad M = 0, \dots$$

hinreichen um die Unbekannten  $\lambda, \mu$  zu bestimmen.

Nun seien  $dx_1, dx_2, \dots$  beliebige Verschiebungen der Punkte  $x_1, x_2, \dots$ , welche aber den Gleichungen  $dL = 0, dM = 0$ , u. s. w. genügen. Man multiplicire obige Gleichungen innerlich mit  $dx_1, dx_2$ , u. s. w. und addire, so fallen, da

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_1} L \mid dx_1 \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} L \mid dx_2 \right] + \dots = dL = 0$$

ist, die Glieder mit  $\lambda, \mu, \dots$  weg und man erhält

$$(9) \quad \sum [(\delta^2 x - p) \mid dx] = 0,$$

welche für alle Verschiebungen gilt, die den Gleichungen  $dL = 0, dM = 0, \dots$  genügen.

### § 5.

#### Gleichgewicht und mittlere Bewegung.

Wenn die Kräfte, welche auf einen Verein wirken, nur von der Lage der Punkte des Vereins und nicht zugleich anderweitig von der Zeit abhängen, so ist Gleichgewicht möglich, und die Formeln für das Gleichgewicht sind dann in den obigen Gleichungen enthalten, wenn

man nur die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten aller Punkte des Vereins null setzt, wodurch dann Gleichungen zwischen den Kräften bedingt sind. Sind diese Gleichungen erfüllt, so kann dennoch die Anfangslage der Punkte des Vereins oder ihre Anfangsgeschwindigkeit von der Art sein, dass kein Gleichgewicht entsteht, und dass insbesondere bei sehr geringen Abweichungen des Anfangszustandes von dem Zustande eines sicheren Gleichgewichts Schwingungen um diesen Zustand stattfinden. Diesen Eigenschaften des Gleichgewichtes und seiner Störung durch unendlich kleine Schwingungen entspricht nur für den Fall, dass die Kräfte von der Zeit als solcher abhängen, ein Zustand der *mittleren Bewegung*, um welchen wieder, wenn dieser Zustand der mittleren Bewegung ein sicherer ist, kleine Schwingungen stattfinden können, die auch im Laufe der Zeit ein gewisses Maximum nicht überschreiten.

Mittlere Bewegung eines Vereins, der von gegebenen (in der Zeit veränderlichen) Kräften getrieben wird, nenne ich diejenige Bewegung, bei welcher unter allen von den verschiedenen Anfangszuständen abhängigen Bewegungen die kleinste Beweglichkeit stattfindet, oder genauer ausgedrückt, bei welcher die Summe der während einer hinreichend grossen Zeit thätigen lebendigen Kräfte ein Minimum ist. Ist  $T = \frac{1}{2} \Sigma (\delta x)^2$  (immer die Punkte des Vereins an Masse gleich gedacht) die lebendige Kraft, also  $T \partial t$  die während des Zeitelementes  $\partial t$  thätige lebendige Kraft, so ist  $\int T \partial t$  zwischen den Grenzen  $t = 0$  und  $t = t$  die während dieser Zeit thätige gesammte lebendige Kraft. Für die mittlere Bewegung soll also jenes Integral, bei hinreichend grossem  $t$ , kleiner sein als für jede andre Bewegung des Systems, und auch kleiner bleiben als solche, wenn  $t$  von da ab beliebig wächst. Für lineäre Gleichungen der Bewegung knüpfe ich den Begriff der mittleren Bewegung an den der *mittleren Integration* linearer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, wähle jedoch als Beispiel lineäre Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es seien  $n$  Zahlgrössen  $u_1, \dots, u_n$ , abhängig gedacht von einer unabhängigen Zahlgrösse  $t$ , und seien die Differentiale jener Grössen nach  $t$  mit  $\delta$  bezeichnet, und sei jene Abhängigkeit partiell bestimmt durch die  $n$  Gleichungen

$$(10)^* \begin{cases} \delta^2 u_1 + a_{1,1} \delta u_1 + \dots + a_{1,n} \delta u_n + b_{1,1} u_1 + \dots + b_{1,n} u_n = f_1 t \\ \vdots \\ \delta^2 u_n + a_{n,1} \delta u_1 + \dots + a_{n,n} \delta u_n + b_{n,1} u_1 + \dots + b_{n,n} u_n = f_n t \end{cases}$$

wo die  $a$  und  $b$  constante Zahlgrössen sind.

Die allgemeine Integration dieser Gleichungen ist bekannt. Doch wird es für die klare Aussonderung der mittleren Integration nothwendig sein, die allgemeine Integration übersichtlich darzustellen. Zunächst ist klar, dass man die  $ft$  in beliebige Glieder zerlegen, die allgemeinen Integrale in Bezug auf diese Glieder einzeln nehmen und die

so erhaltenen Integrale addiren kann. Ich zerlege die  $f t$  in Exponentialglieder, deren Exponenten der Zeit proportional sind, und setze daher als die zu integrireuden Gleichungen zunächst

$$(10) \begin{cases} \delta^2 u_1 + a_{1,1} \delta u_1 + \dots + a_{1,n} \delta u_n + b_{1,1} u_1 + \dots + b_{1,n} u_n = g_1 e^{\kappa t} \\ \cdot \\ \delta^2 u_n + a_{n,1} \delta u_1 + \dots + a_{n,n} \delta u_n + b_{n,1} u_1 + \dots + b_{n,n} u_n = g_n e^{\kappa t} \end{cases}$$

wo  $g_1, \dots, g_n$  constant sind. Man denke sich auch die  $u$  in solchen Gliedern dargestellt. Dann treten sogleich 2 Arten dieser Glieder hervor, nämlich solche mit der Exponentialgrösse  $e^{\kappa t}$  und solche mit  $e^{\lambda t}$ , wo  $\lambda$  von  $\kappa$  verschieden, aber noch zu suchen ist. Die erstgenannten Glieder bilden das mittlere Integral und lassen sich unmittelbar finden, die letztgenannten hängen von der Lösung einer Gleichung des  $2n^{\text{ten}}$  Grades ab. Die mittlere Integration giebt  $u_1 = y_1 e^{\kappa t}, \dots, u_n = y_n e^{\kappa t}$ , wo die  $y_1 \dots y_n$  durch die  $n$  Gleichungen

$$(11) \begin{cases} \kappa^2 y_1 + \kappa a_{1,1} y_1 + \dots + \kappa a_{1,n} y_n + b_{1,1} y_1 + \dots + b_{1,n} y_n = g_1 \\ \cdot \\ \kappa^2 y_n + \kappa a_{n,1} y_1 + \dots + \kappa a_{n,n} y_n + b_{n,1} y_1 + \dots + b_{n,n} y_n = g_n \end{cases}$$

genau bestimmt sind, falls nicht, was unten zu besprechen ist, die Determinante der Coefficienten der  $y_1, \dots, y_n$  null sein sollte. Setzt man hingegen  $u_1 = z_1 e^{\lambda t}, \dots, u_n = z_n e^{\lambda t}$ , wo  $\lambda$  nicht gleich  $\kappa$  ist, so ergibt sich ein entsprechendes Gleichungssystem wie das obige (11), mit dem Unterschiede, dass  $\lambda, z$  statt  $\kappa, y$  eintritt und die rechten Seiten null sind. Daraus folgt, dass die Determinante der Coefficienten von  $z_1, \dots, z_n$  null sein muss. Das giebt für  $\lambda$  die oben angedeutete Gleichung des  $2n^{\text{ten}}$  Grades. Für jeden der  $2n$  Werthe  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ , welche dieser Gleichung des  $2n^{\text{ten}}$  Grades genügen, sind dann die zugehörigen Verhältnisse der  $z$  bestimmt, und dadurch ist dann die allgemeine Integration vollendet. Nur wenn  $\kappa$  einem der  $2n$  Werthe  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$  gleich wird, tritt der oben erwähnte Fall ein, dass die  $y_1 \dots y_n$  der mittleren Integration unendlich oder unbestimmt werden; in diesem Falle kann man  $\kappa$  zunächst unendlich wenig von jenem Werthe  $\lambda$  verschieden setzen und in Bezug auf dieses  $\kappa$  die mittlere Integration bestimmen. Immer bleibt die mittlere Integration von der Lösung jener Gleichung des  $2n^{\text{ten}}$  Grades unabhängig. Um aber zu den Gleichungen der Bewegung übergehen zu können, müssen wir den Gleichungen (10) noch eine andere Form geben. Denn da die Glieder  $g e^{\kappa t}$ , welche die Kräfte darstellen sollen, bei reellem  $\kappa$  mit  $t$  unendlich werden, so entsprechen sie unter dieser Voraussetzung nicht dem Fall der Natur. Man setze daher statt  $g e^{\kappa t}$  die zwei Glieder  $c \cos \kappa t + c' \sin \kappa t$  d. h.  $\frac{c - c' i}{2} e^{i \kappa t} + \frac{c + c' i}{2} e^{-i \kappa t}$ . Diese beiden Glieder unterscheiden sich

nur durch das Vorzeichen von  $i = \sqrt{-1}$ . Setzt man nun in (10) zunächst statt  $g_1 e^{x t}$  ein  $\frac{c_1 - c_1' i}{2} e^{x t}$  u. s. w., so hat man in (11) statt  $g_1$  zu setzen  $\frac{c_1 - c_1' i}{2}$  u. s. w, ferner  $i x$  statt  $x$  und  $-x^2$  statt  $x^2$ , und es werden dann die durch (11) bestimmten  $y$  imaginär, sie seien  $v + w i$ , so wird  $u_1 = (v_1 + w_1 i) e^{i x t}$ ,  $\dots u_n = (v_n + w_n i) e^{i x t}$ . Setzt man dann zweitens in (10)  $\frac{c_1 + c_1' i}{2} e^{-i x t}$  statt  $g$ , so gehen daraus Werthe hervor, die sich von den obigen für  $u_1, \dots u_n$  nur durch das Vorzeichen von  $i$  unterscheiden, sie seien mit  $u_1', \dots u_n'$  bezeichnet, also  $u_1' = (v_1 - w_1 i) e^{-i x t}$ ,  $\dots u_n' = (v_n - w_n i) e^{-i x t}$ ; also wird  $u_1 + u_1' = 2v_1 \cos x t - 2w_1 \sin x t = a_1 \cos x t + b_1 \sin x t$ , wenn  $2v_1 = a_1$  und  $-2w_1 = b_1$  gesetzt wird.

Es ist nun nachzuweisen, dass bei der Bewegung, die durch lineäre Gleichungen der Form (10) bestimmt ist, die mittlere Integration zugleich die mittlere Bewegung liefert, wie sie oben definiert ist. Bei der Bewegung eines Vereins von  $m$  gleich schweren Punkten im Raume wird das  $n$  der Gleichungen (10) und (11) gleich  $3m$ , die Gleichung in  $\lambda$  also vom  $6m$ ten Grade. Wir nehmen senkrechte Coordinatenachsen an. Dann wird die gesammte lebendige Kraft  $T = \frac{1}{2} \Sigma \delta u^2$ , also  $f T dt = \frac{1}{2} \Sigma f \delta u^2 dt$ , wo sich die Summe auf  $u_1, \dots u_{3m}$  bezieht. Nun besteht  $u_1$  bei der allgemeinen Integration theils aus den Gliedern der mittleren Integration, welche von der Form  $a_1 \cos x t + b_1 \sin x t$  sind, und aus  $6m$  Gliedern der Form  $x e^{\lambda_1 t}$ ; also  $\delta u_1$  enthält dann Glieder der Form  $x b_1 \cos x t - x a_1 \sin x t$  und der Form  $\lambda_1 x e^{\lambda_1 t}$ , und  $\delta u_1^2$  enthält dann die Quadrate dieser Glieder und die doppelten Producte je zweier. Man sieht sogleich, dass die Glieder der Form  $\lambda_1 x e^{\lambda_1 t}$  bei reellem  $\lambda_1$  mit unendlichem  $t$  selbst unendlich werden, also  $\sqrt{T dt}$  gewiss kleiner ist, wenn diese Glieder fehlen, als wenn sie vorhanden sind. Wir können also für den Nachweis der mittleren Bewegung diese Glieder weglassen, dasselbe gilt, wenn  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  ist, und  $\alpha$  nicht null ist. Es sind also nur die Glieder zu berücksichtigen, wo  $\lambda_1 = \beta i$  ist; dann ist ein anderer Werth von  $\lambda$  etwa  $\lambda_2 = -\beta i$  und die hieraus entspringenden reellen Glieder in  $u_1$  werden von der Form  $p \cos \beta t + q \sin \beta t$ , also in  $\delta u_1$  von der Form  $\beta (q \cos \beta t - p \sin \beta t)$ , also von entsprechender Form, wie die Glieder der mittleren Integration. Betrachten wir zuerst die Quadrate z. B.  $(x b_1 \cos x t - x a_1 \sin x t)^2$ , also in  $T dt$  das Glied  $\frac{1}{2} x^2 (b_1 \cos x t - a_1 \sin x t)^2 dt$ , so giebt dies  $\frac{1}{4} x^2 [b_1^2 (1 + \cos 2x t) dt + a_1^2 (1 - \cos 2x t) dt - 2a_1 b_1 \sin 2x t dt]$ . Dies giebt integrirt  $\frac{1}{4} x^2 (a_1^2 + b_1^2) t + P$ , wo  $P$  lauter endliche periodische Glieder liefert. Ferner betrachten wir das doppelte Product zweier solcher Glieder z. B.  $x (b_1 \cos x t - a_1 \sin x t)$  und  $\beta (q \cos \beta t - p \sin \beta t)$ , so giebt das in  $T dt$  das Glied  $x \beta dt (b_1 q \cos x t \cos \beta t +$

$$a_1 p \sin \alpha t \sin \beta t - b_1 p \cos \alpha t \sin \beta t - a_1 q \sin \alpha t \cos \beta t = \alpha \beta dt \left[ \frac{b_1 q + a_1 p}{2} \right. \\ \left. \cos (\alpha + \beta) t + \frac{b_1 q - a_1 p}{2} \cos (\alpha - \beta) t - \frac{b_1 p + a_1 q}{2} \sin (\alpha + \beta) t - \frac{b_1 p - a_1 q}{2} \right. \\ \left. \sin (\alpha - \beta) t \right]$$

also wenn  $\alpha$  nicht gleich  $\beta$  ist, so liefert dies lauter endliche periodische Glieder. Nun können wir  $t$  so gross annehmen, dass die periodischen Glieder gegen die Glieder der Form  $\frac{1}{4} \alpha^2 (a_1^2 + b_1^2) t$  u. s. w. verschwinden; dann wird  $\int T dt = \frac{1}{4} \Sigma \alpha^2 (a^2 + b^2) t + \frac{1}{4} \Sigma \beta^2 (p^2 + q^2) t$ , wo die erste Summe sich auf alle Glieder der mittleren Integration bezieht, die letzte auf die übrigen. Hier sind die  $a$  und  $b$  von unveränderlichem Werth, hingegen  $p$  und  $q$  können null sein, also wird für hinlänglich grosses  $t$  das Integral  $\int T dt$  am kleinsten, wenn die  $p, q$  sämmtlich null sind, d. h. das Integral das mittlere ist. Es ist dadurch nachgewiesen, dass bei lineären Differentialgleichungen der Bewegung die mittlere Integration zugleich die mittlere Bewegung liefert.

Ich nenne ein Glied von der Form  $a \cos \alpha t + b \sin \alpha t$ , wo  $\alpha$  positiv ist, mögen nun  $a$  und  $b$  Zahlen oder Strecken sein, ein *elliptisches Glied* und  $\alpha$  seinen Zeiger. In der That, sind hier  $a$  und  $b$  Strecken von ungleicher Richtung und wird  $a \cos \alpha t + b \sin \alpha t$  als Strecke  $r$  dargestellt, die von einem festen Punkte ausgeht, so beschreibt der Endpunkt in der Zeit  $\frac{2\pi}{\alpha}$  eine Ellipse, und zwar so, dass die Strecke  $r$  selbst in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibt, nämlich in der Zeit  $dt$  den Raum  $\frac{1}{2} [ab] \alpha dt$ ; die Strecken  $a$  und  $b$  sind conjugirte Halbmesser der Ellipse. In der That, setzt man  $\cos \alpha t = u$ ,  $\sin \alpha t = v$  so wird jener Radius  $r = ua + vb$  und  $u^2 + v^2 = 1$ , was die Gleichung der Ellipse mit den conjugirten Halbmessern  $a$  und  $b$  ist. Ferner beschreibt der Endpunkt von  $r$  im Zeitelemente  $dt$  die Strecke  $\delta r \cdot dt$  d. h.  $(b \cos \alpha t - a \sin \alpha t) \alpha dt$  und  $r$  selbst den Flächenraum  $\frac{1}{2} [r \delta r] dt$  d. h.  $\frac{1}{2} [(a \cos \alpha t + b \sin \alpha t) (b \cos \alpha t - a \sin \alpha t)] \alpha dt$ ; das eingeschlossene äussere Product giebt, da  $[aa] = [bb] = 0$ ,  $[ab] = -[ba]$  und  $\cos^2 \alpha t + \sin^2 \alpha t$  gleich 1 ist, den Werth  $[ab]$ , also ist der im Zeitelemente  $dt$  beschriebene Flächenraum  $= \frac{1}{2} [ab] \alpha dt$ .

Wir können nun das Gesetz der mittlern Bewegung für unsern Fall so aussprechen: Wenn die Bewegung eines Vereins von Punkten durch lineäre Differentialgleichungen dargestellt wird, so entsprechen den elliptischen Gliedern, welche in dem Ausdruck der Kraft vorkommen, elliptische Glieder von denselben Zeigern in allen Strecken, welche von einem festen Punkte nach den beweglichen Punkten gezogen sind, und zwar sind die Coefficienten dieser Glieder durch die gegebenen Gleichungen vollkommen bestimmt, und ausser diesen Gliedern treten bei der mittleren Bewegung keine andern hervor.

Ich bemerke noch, dass sich die Sicherheit oder Unsicherheit der

mittleren Bewegung aus den oben entwickelten Principien aufs leichteste ableiten lässt.

### § 6.

#### Anwendung auf die Theorie der Ebbe und Fluth.

Wir betrachten auch hier das der Ebbe und Fluth unterworfenene System zunächst als einen Verein von  $m$  Punkten, deren Massen 1 sind. Dann gilt für die relative Bewegung in Bezug auf den Schwerpunkt die Gleichung (3) in § 3., nämlich  $\delta^2 y_1 = p_1 + q_1 - \frac{1}{m} p$  u. s. w.  $\delta^2 y_m = p_m + q_m - \frac{1}{m} p$ , indem ich nämlich die inneren Kräfte  $q_1$  u. s. w. von den äusseren  $p_1$  u. s. w. gesondert und  $p_1 + \dots + p_m = p$  gesetzt habe. Nun sei das System einer gleichförmigen Rotation um eine feste durch den Schwerpunkt gehende Axe unterworfen und angenommen, wie es bei der Theorie der Ebbe und Fluth in der hier nur berücksichtigten ersten Annäherung gestattet ist, dass sich die Punkte nur unendlich wenig von der Lage, die sie bei jener gleichförmigen Rotation annehmen würden, entfernen. Ferner sei  $n$  die Winkelgeschwindigkeit bei jener Drehung, also  $nt$  die Drehung während der Zeit  $t$ . Es sei eine in der Drehungsebene (also senkrecht gegen die Drehungsaxe) gelegene Strecke  $a$  angenommen, so verwandelt sie sich durch die Drehung um den Winkel  $nt$  in  $a \cos nt + a' \sin nt$ , wo  $a'$  senkrecht gegen  $a$  in der Drehungsebene nach der positiven Drehungsscite liegt und mit  $a$  gleich lang ist. Wir bezeichnen nach bekannter Analogie diese Strecke  $a'$  mit  $ai$ , wo  $i$  die planimetrische Darstellung der  $\sqrt{-1}$  ist. Dann verwandelt sich also  $a$  in  $a (\cos nt + i \sin nt) = ae^{int}$ , und es wird dann  $\delta ae^{int} = ae^{int} \cdot in$ . Nun sei  $in = \alpha$  gesetzt, wo  $\alpha$  die Winkelgeschwindigkeit ihrer Grösse und Richtung nach darstellt. Dann verwandelt sich also  $a$  durch jene Drehung in  $ae^{\alpha t}$ , und  $\delta ae^{\alpha t}$  wird  $ae^{\alpha t} \alpha$ ,  $\delta^2 ae^{\alpha t} = ae^{\alpha t} \alpha^2$ , wo übrigens  $\alpha^2 = -n^2$  wird. Dieselbe Bezeichnung wende ich auch an, wenn  $a$  nicht in der Drehungsebene liegt, nämlich in der Art, dass, wenn  $a$  die Richtung der Drehungsaxe hat,  $ae^{\alpha t} = a$  und  $a\alpha = 0$  ist. Dies vorausgesetzt drückt dann, wenn  $a$  beliebige Richtung hat,  $ae^{\alpha t}$  die Strecke aus, in die  $a$  übergeht, wenn sich das ganze System um den Winkel  $\alpha t$  dreht und es bleibt dann  $\delta ae^{\alpha t} = ae^{\alpha t} \alpha$ ,  $\delta^2 ae^{\alpha t} = ae^{\alpha t} \alpha^2$ , wo man aber statt  $\alpha^2$  nicht ohne Weiteres  $-n^2$  zu setzen hat. In diesem Sinne sei nun  $y_1 = (x_1 + u_1) e^{\alpha t}$ , wo  $x_1$  in der Zeit unveränderlich und  $u_1$  unendlich klein ist. Dann wird  $\delta y_1 = \delta u_1 e^{\alpha t} + (x_1 + u_1) e^{\alpha t} \alpha$ ,  $\delta^2 y_1 = \delta^2 u_1 e^{\alpha t} + 2 \delta u_1 e^{\alpha t} \alpha + (x_1 + u_1) e^{\alpha t} \alpha^2 = [\delta^2 u_1 + 2 \delta u_1 \alpha + (x_1 + u_1) \alpha^2] e^{\alpha t}$ . Aber wenn sich das ganze System um  $\alpha t$  dreht, so drehen sich auch die inneren Kräfte um denselben Winkel, und wir können also statt

$q_1$  schreiben  $q_1' e^{\alpha t}$ . Somit erhalten wir, wenn man noch mit  $e^{-\alpha t}$  multiplicirt, die Gleichung

$$\delta^2 u_1 + 2 \delta u_1 \alpha + (x_1 + u_1) \alpha^2 = q_1' + \left( p_1 - \frac{1}{m} p \right) e^{-\alpha t}.$$

Nun hängt aber  $q_1'$  von der gegenseitigen Entfernung der Punkte, also hier von  $x_1 + u_1 - (x_r + u_r)$  d. h. von  $x_1 - x_r + (u_1 - u_r)$  ab, wo  $u_1 - u_r$  gegen  $x_1 - x_r$  unendlich klein ist. Somit sondert sich  $q_1'$  in zwei Glieder, von denen das eine die  $u$  nicht enthält, das andere eine lineäre Function der  $u$  ist. Jenes sei mit  $q_1''$  bezeichnet, dieses mit  $\varphi_1$ , so können wir die obigen Gleichungen in je 2 Gleichungen sondern, nämlich

$$(12) \quad x_1 \alpha^2 = q_1'', \dots, x_m \alpha^2 = q_m''$$

die den Gleichgewichtszustand bestimmen, und

$$(13) \quad \begin{cases} \delta^2 u_1 + 2 \delta u_1 \alpha + u_1 \alpha^2 - \varphi_1 = \left( p_1 - \frac{1}{m} p \right) e^{-\alpha t} \\ \vdots \\ \delta^2 u_m + 2 \delta u_m \alpha + u_m \alpha^2 - \varphi_m = \left( p_m - \frac{1}{m} p \right) e^{-\alpha t}, \end{cases}$$

welche ganz die Form der im § 5. behandelten Gleichungen haben, und ihre mittlere Integration liefert dann die Bewegung der Ebbe und Fluth. Es kommt nur noch darauf an, die rechten Seiten dieser Gleichungen (13) in elliptischen Gliedern zu entwickeln. Wir nehmen zuerst nur ein Gestirn an, und zwar sei dasselbe nahe kugelförmig und die Entfernung seines Mittelpunktes von dem Schwerpunkte des Systems unendlich gross gegen die Dimensionen des Systems. Die Anziehung, welche eine Kugel durch ihre Gravitation auf einen äusseren Punkt übt, ist dieselbe, als ob alle ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Es sei  $L$  diese Anziehung in der Entfernung 1, so ist sie in der Entfernung  $e$  gleich  $\frac{L}{e^2}$ . Nun sei  $r$  die Strecke vom Schwerpunkt des Systems zum Mittelpunkt der Kugel zur Zeit  $t=0$  und sei  $\varrho$  die Länge von  $r$ , so ist zu dieser Zeit  $p_1$  mit Uebergehung der Glieder von höherem Grade der Kleinheit der Grösse und Richtung nach  $\frac{L(r-x_1)}{(r-x_1)^3}$  oder  $\frac{L(r-x_1)}{(r^2-2[r|x_1])^{\frac{3}{2}}}$ . Das giebt entwickelt

$$p_1 = \frac{L}{\varrho^3} \left( r - x_1 + \frac{3[r|x_1]}{\varrho^2} r \right).$$

Dann erhält man, da die  $x$  vom Schwerpunkt des Systems aus genommen sind und also  $\Sigma x = 0$  ist  $\frac{1}{m} p = \frac{L}{\varrho^3} r$ . Folglich wird zur Zeit  $t=0$  die rechte Seite der Gleichung (13) gleich  $\frac{L}{\varrho^3} \left( \frac{3[r|x_1]}{\varrho^2} r - x_1 \right)$ . Nun sei während der Dauer eines Tages die Entfernung des Gestirnes und seine Declination als constant angenommen, während sich seine Rectascension in der Zeit  $t$  um  $\beta t$  ändere, so ist zur Zeit  $t$  erstens  $r$



in  $re^{\beta t}$ , zweitens  $x_1$  in  $x_1 e^{\alpha t}$  übergegangen, und die rechte Seite der Gleichung (13) wird  $\frac{L}{e^3} \left( \frac{3[r e^{\beta t} | x_1 e^{\alpha t}]}{e^2} r e^{\beta t} - x_1 e^{\alpha t} \right) e^{-\alpha t}$ . Nun ändert sich nach dem Begriff des inneren Productes der Werth desselben nicht, wenn die beiden Factoren sich um gleiche Axe und um gleichen Winkel z. B. um den Winkel  $-\beta t$  drehen und man erhält, wenn  $\alpha - \beta = \gamma$  gesetzt wird, die rechte Seite der Gleichung (13) gleich

$$\frac{L}{e^3} \left( \frac{3[r | x_1 e^{\gamma t}]}{e^2} r e^{-\gamma t} - x_1 \right).$$

Es sei die Länge von  $x_1$  gleich  $\mu \varrho$ , so wird  $[r | x_1 e^{\gamma t}] = \mu \varrho^2 \cos \varphi$ , wo  $\varphi$  der Winkel zwischen  $r$  und  $x_1 e^{\gamma t}$  ist. Es sei  $\eta$  der Winkel, den die Axe  $a$  mit  $r$ , und  $\vartheta$  der Winkel, den sie mit  $x_1$  bildet, und sei  $\omega_1$  der Winkel, den die Ebene  $ar$  mit der Ebene  $ax_1$ , also  $\omega_1 + \gamma t$  der Winkel, den die Ebene  $ar$  mit der Ebene  $ax_1 e^{\gamma t}$  bildet, so ist  $\cos \varphi = \cos \eta \cos \vartheta + \sin \eta \sin \vartheta \cos (\omega_1 + \gamma t)$ , also erhalten wir obigen Ausdruck =  $\frac{L}{e^3} \left\{ 3\mu [\cos \eta \cos \vartheta + \sin \eta \sin \vartheta \cos (\omega_1 + \gamma t)] r e^{-\gamma t} - x_1 \right\}$  wo man noch statt  $r$  setzen kann  $r_1 + r_2$ , indem  $r_1$  in der Axe  $r_2$  im Aequator liegt, also statt  $r e^{-\gamma t}$  setzen kann  $r_1 + r_2 e^{-\gamma t}$ . Setzt man dann auch noch statt  $\cos (\omega_1 + \gamma t)$  seinen Werth  $\frac{e^{i(\omega_1 + \gamma t)} - e^{-i(\omega_1 + \gamma t)}}{2}$

so übersieht man auf der Stelle, dass der ganze Ausdruck aus 3 elliptischen Gliedern mit den Zeigern 0,  $\gamma$  und  $2\gamma$  besteht, wo  $\gamma$  die scheinbare Winkelgeschwindigkeit des Gestirns, also  $\frac{2\pi}{\gamma}$  seine scheinbare Umlaufzeit ist. Tritt nun noch, wie es bei der Ebbe und Fluth der Fall ist, ein zweites Gestirn hinzu, welches auf die Bewegung Einfluss hat, und dessen scheinbare Umlaufzeit  $\frac{2\pi}{\gamma'}$  ist, so treten noch zwei elliptische Glieder mit den Zeigern  $\gamma'$  und  $2\gamma'$  hinzu. Bezeichnen wir diese 5 elliptischen Glieder für den ersten Punkt mit  $p_{1,0}$ ,  $p_{1,\gamma}$ ,  $p_{1,2\gamma}$ ,  $p_{1,\gamma'}$ ,  $p_{1,2\gamma'}$ , so wird die erste der Gleichungen (13)

$$(14) \quad \delta^2 u_1 + 2\delta u_1 \alpha + u_1 \alpha^2 - \varphi_1 = p_{1,0} + p_{1,\gamma} + p_{1,2\gamma} + p_{1,\gamma'} + p_{1,2\gamma'}$$

Daraus ergibt sich, da bei der Ebbe und Fluth nur die mittlere Bewegung ins Auge gefasst wird, für  $u_1$  gleichfalls eine Summe von fünf elliptischen Gliedern mit denselben Zeigern, also

$$(15) \quad u_1 = u_{1,0} + u_{1,\gamma} + u_{1,2\gamma} + u_{1,\gamma'} + u_{1,2\gamma'}$$

wenn  $u_{1,0}$ ,  $u_{1,\gamma}$  u. s. w. elliptische Glieder mit den Zeigern 0,  $\gamma$ , u. s. w. darstellen. Entsprechend sind die Gleichungen für jeden andern Punkt. Das erste Glied  $u_{1,0}$  giebt an, um welche Strecke die durch die Gestirne bedingte mittlere Lage des ersten Punktes von seiner Gleichgewichtslage abweicht. Die andern 4 Glieder geben die Bewegung des Punktes um seine mittlere Lage an. Es ergibt sich daraus der Hauptsatz für die Theorie der Ebbe und Fluth:

„Die Bewegung, welche jeder Punkt des Meeres bei der Ebbe und Fluth vollendet, ergibt sich durch die Interferenz von vier elliptischen Bewegungen, von denen zwei dieselbe Umlaufszeit haben, wie die scheinbare Umlaufszeit der Sonne und des Mondes beträgt, und die zwei andern eine halb so grosse Umlaufszeit.“

Jedes elliptische Glied enthält vermöge seiner Form  $a \cos \gamma t + b \sin \gamma t$ , wo  $a$  und  $b$  Strecken sind, sechs algebraische Constanten, also die vier elliptischen Glieder zusammen 24. Sind diese 24 Constanten für einen Punkt des Meeres durch Beobachtung gefunden, so ist dann die Bewegung des Punktes genau bestimmt. Soll aber nur die Höhe, also nur das Sinken und Steigen bestimmt werden, so hat man nur die Projectionen jener Strecken  $a$ ,  $b$  u. s. w. auf die verticale Linie zu beachten, man erhält also dann 8 Constante in Uebereinstimmung mit La Place *méc. cél.* IV, 3. Jene 24 Constanten sind an sich durch die inneren Kräfte (Gravitation und Elasticität) bedingt und also nur dann theoretisch zu bestimmen, wenn die Beschaffenheit des Systems vollständig gegeben ist.

Nimmt man statt der  $m$  Punkte eine im Raume stetig verbreitete Materie an, so hat man in den Gleichungen (12) statt  $x_1, \dots, x_m$  eine variable Strecke  $x$  im Raume zu setzen, und die Gleichung wird

$$(12^*) \quad x a^2 = q'',$$

wo  $q''$  eine Function von  $x$  ist. Diese Gleichung bestimmt das Gleichgewicht des Systems. Dann wird in den Gleichungen (13) und (14) statt  $u_1, \dots, u_m$  die von  $x$  abhängige Grösse  $u$  gesetzt werden müssen und die Gleichung (14) wird

$$(14^*) \quad \delta^2 u + 2\delta u \cdot \alpha + u \cdot \alpha^2 - \varphi = p_0 + p_\gamma + p_{2\gamma} + p_{\gamma'} + p_{2\gamma'},$$

wo  $u$ ,  $p_0$ ,  $p_\gamma, \dots$  Functionen von  $x$  sind und  $\varphi$  eine in Bezug auf  $u$  lineäre Function von  $x$  und  $u$  ist. Die Gleichung (15) wird dann

$$(15^*) \quad u = u_0 + u_\gamma + u_{2\gamma} + u_{\gamma'} + u_{2\gamma'},$$

wo die elliptischen Glieder zugleich Functionen von  $x$  sind, also z. B.  $u_\gamma = a_x \cos \gamma t + b_x \sin \gamma t$  ist, wo  $a_x, b_x$  Functionen von  $x$  sind.

Will man die Oberfläche des Meeres haben, wie sie sich durch die Ebbe und Fluth zu jeder Zeit gestaltet, so hat man  $x$  auf die Punkte der Oberfläche zu beschränken. Dann wird die Gleichung (12\*) die Gleichung der Oberfläche beim Gleichgewicht (die äusseren Kräfte null gesetzt). Wir können diese Gleichung in der Form dargestellt denken, dass  $x$  eine Function ihrer Richtung  $\xi$  wird, d. h. Function einer Strecke  $\xi$ , die mit  $x$  gleiche Richtung hat, aber deren Länge 1 ist.

Dies ist die wesentliche Idee der Polarcoordinaten. Die Gleichung der Oberfläche zur Zeit  $t$  ergibt sich dann leicht, da  $y = x + u$  war und  $u$  gefunden ist. Erhebt man diese Gleichung aufs (innere) Quadrat, so erhält man  $y^2 = x^2 + 2[x | u]$ , da wir das letzte Glied  $u^2$  als von

höherer Ordnung der Kleinheit weglassen können. Ist nun  $z$  die Projection von  $u$  auf  $x$  (oder auf  $\xi$ ), so erhält man

$$(16) \quad y^2 = x^2 + 2xz$$

als Gleichung der Oberfläche zur Zeit  $t$ . Hier besteht  $z$  aus 5 elliptischen Gliedern mit den Zeigern  $0, \gamma, 2\gamma, \gamma', 2\gamma'$ , aber diese elliptischen Glieder haben hier die Form, dass ihre Coefficienten nicht Strecken, sondern Zahlengrößen sind, welche von  $\xi$  abhängen.

Es ist in dem Obigen die Ebbe und Fluth nur in der ersten Annäherung bestimmt. Will man eine höhere Annäherung erzielen, so muss man dennoch die hier entwickelte Theorie zur Grundlage nehmen, und dann die zweite Annäherung in entsprechender Weise behandeln, wie dies in der Theorie der *seculären Störungen* der Planeten geschieht.

Stettin, den 31. März 1877.

---