11.
Beitrag zur Theorie der Reihen.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.)

Da es häufig vorkommt, dafs man das Product zweier Reihen sucht: so glaube ich, dafs die Auflösung der Aufgabe: zu finden in welchen Fällen das Product der zwei Reihen

$$y=1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1}{1.2}\cdot\frac{\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1}x^2+\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2}{1\;.\;2\;.\;3}\cdot\frac{\beta.\beta+1.\beta+2}{\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3+\dots.$$

$$z=1+\frac{\alpha'}{1}\cdot\frac{\beta'}{\gamma'}x+\frac{\alpha'.\alpha'+1}{1.2}\cdot\frac{\beta'.\beta'+1}{\gamma'.\gamma'+1}x^2+\frac{\alpha'.\alpha'+1.\alpha'+2}{1\;.\;2\;.\;3}\cdot\frac{\beta'.\beta'+1.\beta'+2}{\gamma'.\gamma'+1.\gamma'+2}x^3+\dots.$$

von der Form

$$u=1+\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{d}\cdot\frac{c}{e}x+\frac{a.a+1}{1.2}\cdot\frac{b.b+1}{d.d+1}\cdot\frac{c.c+1}{e.e+1}x^2$$
$$+\frac{a.a+1.a+2}{1\;.\;2\;.\;3}\cdot\frac{b.b+1.b+2}{d.d+1.d+2}\cdot\frac{c.c+1.c+2}{e.e+1.e+2}x^3+\dots.$$

sey, nicht uninteressant sein dürfte.

Die Eigenschaften dieser Reihen werden durch folgende Differentialgleichungen ausgedrückt:

$$(1.)\quad (x^2-x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\{(1+\alpha+\beta)x-\gamma\}\frac{\partial y}{\partial x}+\alpha\beta y=0.$$

$$(2.)\quad (x^2-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\{(1+\alpha'+\beta')x-\gamma'\}\frac{\partial z}{\partial x}+\alpha'\beta' z=0.$$

$$(3.)\quad (x^2-x)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\{(3+\alpha+\beta)x-(1+\gamma)\}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

$$(4.)\quad (x^2-x)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\{(3+\alpha'+\beta')x-(1+\gamma')\}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+\alpha'+\beta'+\alpha'\beta')\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$(5.)\quad (x^3-x^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\{(3+a+b+c)x^2-(1+d+e)x\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+\{(1+a+b+c+ab+ac+bc)x-de\}\frac{\partial u}{\partial x}+abcu=0.$$

Es sei nun

$$u=yz,\ \text{so ist}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=z\frac{\partial y}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=z\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=z\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+y\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Nach Substitution dieser Werthe mufs der Gleichung (5.) durch (1.), (2.), (3.) und (4.) Genüge gethan werden. Multiplicirt man also diese resp. mit $Az+Bx.\frac{\partial z}{\partial x}$, $Cy+Dx.\frac{\partial y}{\partial x}$, xz, xy (die Factoren können nemlich nur diese Form haben), und vergleicht die Summe der Producte mit der Gleichung (5.), so findet man folgende Gleichungen:

(6.) $$3+a+b+c=3+\alpha+\beta+A$$
(7.) $$=3+\alpha'+\beta'+C$$
(8.) $$1+d+e=1+\gamma+A$$
(9.) $$=1+\gamma'+C$$
(10.) $$3=B$$
(11.) $$3=D$$
(12.) $$2(3+a+b+c)=B(1+\alpha+\beta)+D(1+\alpha'+\beta')$$
(13.) $$2(1+d+e)=B\gamma+D\gamma'$$
(14.) $$1+a+b+c+ab+ac+bc=1+\alpha+\beta+\alpha\beta+(1+\alpha+\beta)A+\alpha'\beta'D$$
(15.) $$=1+\alpha'+\beta'+\alpha'\beta'+(1+\alpha'+\beta')C+\alpha\beta B$$
(16.) $$de=\gamma A$$
(17.) $$=\gamma' C$$
(18.) $$abc=\alpha\beta A+\alpha'\beta' C.$$

Diese 13 Gleichungen geben aufser der Bestimmung der 9 Gröfsen A, B, C, D, a, b, c, d, e noch 4 Bedingungsgleichungen zwischen α, β, γ, α', β', γ'. Durch (6.) .... (13.) findet man:

(19.) $$A=\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{3}{2}\gamma'-1$$
(20.) $$B=3$$
(21.) $$C=\tfrac{3}{2}\gamma+\tfrac{1}{2}\gamma'-1$$
(22.) $$D=3$$
(23.) $$a+b+c=\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta+\alpha'+\beta')$$
(24.) $$d+e=\tfrac{3}{2}(\gamma+\gamma')-1$$

und die Bedingungsgleichungen:

(25.) $$\alpha+\beta=\gamma-\tfrac{1}{2}$$
(26.) $$\alpha'+\beta'=\gamma'-\tfrac{1}{2},$$

durch deren Hülfe man ferner aus (14.) .... (17.) folgende zwei findet:

(27.) $$\gamma-\gamma'=4(\alpha\beta-\alpha'\beta')$$
(28.) $$\gamma(\gamma-2)=\gamma'(\gamma'-2).$$

Diesen letzteren kann auf zwei Arten Genüge gethan werden: I. durch die Annahme $\gamma=\gamma'$; die Gleichungen (25.), (26.), (27.) geben in diesem Fall:

$$\alpha+\beta = \alpha'+\beta'$$
$$\alpha\beta = \alpha'\beta',$$

mithin wären die beiden Reihen y und z einander gleich, welchen Fall ich schon früher behandelt habe*), und also hier übergehe; II. durch die Gleichung $\gamma' = 2-\gamma$; und dann giebt die Addition von (25.) und (26.)

(29.) $\alpha+\beta+\alpha'+\beta' = \gamma+\gamma'-1 = 1,$

die Subtraction und Vergleichung mit (27.):

(30.) $\gamma-\gamma' = \alpha+\beta-(\alpha'+\beta') = 4\alpha\beta-4\alpha'\beta',$

aus welchen beiden Gleichungen

(31.) $\alpha' = \frac{1}{2}-\alpha$

(32.) $\beta' = \frac{1}{2}-\beta$ folgt.

Mit den 4 Bedingungsgleichungen (25.), (26.), (31.) und (32.) findet man nun leicht:

(33.) $a+b+c = \frac{3}{2}$

(34.) $ab+ac+bc = \frac{3}{4}-(\alpha-\beta)^2$

(35.) $abc = \frac{1}{8}-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2$

woraus sich für a, b, c die Werthe:

$$\tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2}+\alpha-\beta$$
$$\tfrac{1}{2}-\alpha+\beta$$

ergeben. Ferner

(36.) $d+e = \gamma+\gamma'$

(37.) $de = \gamma\gamma'.$

Wir haben also, wenn das Product der zwei verschiedenen Reihen y und z von der Form u ist, welches mit den 4 Bedingungen:

$$\alpha+\beta = \gamma-\tfrac{1}{2}$$
$$\alpha' = \tfrac{1}{2}-\alpha$$
$$\beta' = \tfrac{1}{2}-\beta$$
$$\gamma' = 2-\gamma$$

zugleich Statt findet, die Werthe von a, b, c (die unter sich verwechselt werden können):

$$\tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2}+\alpha-\beta$$
$$\tfrac{1}{2}-\alpha+\beta$$

*) Hier oben Seite 89.

und die Werthe von d, e:

$$\gamma$$
$$2-\gamma.$$

Als Beispiel mögen die beiden Reihen

$$y = 1 + \frac{4}{7}x + \frac{4.6}{7.9}x^2 + \frac{4.6.\ 8}{7.9.11}x^3 + \ldots\ldots$$
$$z = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1.1}{2.4}x^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}x^3 - \ldots\ldots$$

dienen. Hier ist $\alpha = 1$, $\beta = \frac{4}{2}$, $\gamma = \frac{7}{2}$, $\alpha' = -\frac{1}{2}$, $\beta' = -\frac{3}{2}$, $\gamma' = -\frac{3}{2}$, und demnach sind die erforderlichen Bedingungen erfüllt. Es wird also $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = \frac{7}{2}$, $e = -\frac{3}{2}$, und folglich

$$u = yz = 1 + \frac{1.1.3}{2.7.3}x - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.1}{7.9}\cdot\frac{3.5}{3.1}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.1.3}{7.9.11}\cdot\frac{3.5.7}{3.1.1}x^3$$
$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.1.\ 3.\ 5}{7.9.11.13}\cdot\frac{3.5.7.9}{3.1.1.3}x^4 - \ldots\ldots$$
$$u = 1 + \frac{5.1}{5.7}\cdot\frac{1}{2}x - \frac{5.1}{7.9}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{5.3}{9.11}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 - \frac{5.5}{11.13}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \ldots\ldots$$

In einem Schreiben des Herrn Verfassers obigen Aufsatzes an den Herausgeber dieses Journals bemerkt derselbe, dafs sich die Lambertische Reihe $x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 2x^7 + \ldots$, welche gleich

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \ldots + \frac{x^n}{1-x^n} + \ldots\ldots$$

ist, und in welcher die Exponenten der Glieder, welche 2 zum Coefficienten haben, der Reihe nach Primzahlen, die Coefficienten der übrigen Glieder aber die Zahlen der ganzzahligen Theiler der Exponenten der nemlichen Glieder sind (man sehe die Aufgabe 16. S. 99. im 2ten Bande dieses Journals) in folgende Reihe:

$$x\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x^4\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) + x^9\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right) + x^{16}\left(\frac{1+x^4}{1-x^4}\right) + \ldots + x^{n^2}\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right) + \ldots\ldots$$

verwandeln lasse, welche für ein sehr kleines x sehr schnell convergirt.