

INTORNO AL CALCOLO DELLA RIFRAZIONE ASTRONOMICA, SENZA SPECIALI IPOTESI
SUL MODO DI VARIARE DELLA TEMPERATURA DELL'ARIA COLL'ALTEZZA.

Nota di P. PIZZETTI ¹⁾).

Il modo di variare della densità atmosferica secondo l'altezza ha, come è noto, una influenza relativa assai piccola sul calcolo della rifrazione astronomica, fino a che la distanza zenitale del raggio luminoso non si approssima all'angolo retto. Così una ipotesi, qual'è quella di Bessel, la quale tanto vivamente contrasta coi dati dell'osservazione, da supporre un gradiente termico verticale minore di 0^o,12 nella temperatura centesimale dell'aria (per 100 metri di elevazione a partire dal livello del mare), conduce tuttavia, nel calcolo della rifrazione, a risultati teorici dei quali l'applicazione pratica è stata, per comune esperienza degli astronomi, riconosciuta soddisfacente nella maggior parte dei casi.

Le speciali ipotesi intorno alla costituzione fisica dell'atmosfera e i laboriosi sviluppi di calcolo cui esse danno luogo, rappresentano quindi, per così dire, un lavoro perduto, ed è invece naturale ed opportuno, sia dal punto di vista didattico, sia rispetto alla discussione critica dei risultati dell'osservazione, il ricercare *con quale grado di approssimazione si possa calcolare la rifrazione astronomica quando si rinunci a particolari ipotesi intorno al modo di variare della temperatura dell'aria coll'altezza.*

La ricerca che qui ci proponiamo non è nuova. Del determinare la rifrazione supponendo soltanto che la temperatura *non cresca* coll'altezza, si occupò diffusamente Ossian Bonnet, nella sua *Théorie de la réfraction Astronomique* ²⁾, ma essen-

1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. 15, ser. 5., 1^o sem., fasc. 2^o, 1906.

2) Nouvelles Annales de Mathématiques, 6, 1887. Anche il sig. Radau nella ben nota sua Memoria: Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques (Annales de l'Obs. de Paris, t. 16) dà lo sviluppo della rifrazione per le potenze di $\tan z$, e pone in evidenza come taluni importanti elementi di questo sviluppo siano indipendenti dalla costituzione dell'atmosfera. Il sig. Bemporad nella sua recente Memoria: Sulla teoria

dosi egli proposto a priori di risolvere il problema per mezzo di una serie procedente secondo le potenze di $\tan z$ (z = distanza zenitale iniziale) ha ottenuto un grado di approssimazione minore di quello che si può in realtà raggiungere.

Il Sig. Andoyer nella sua Nota ¹⁾: *Sur la théorie de la réfraction* ha dato una formola estremamente semplice e indipendente da ipotesi sulla costituzione dell'atmosfera, pel caso di distanze zenitali non superiori a 75° . Ma anche per questa formola si parte dallo sviluppo per le potenze di $\tan z$; e non è poi assegnato un limite superiore dell'errore cui la formola stessa è soggetta ²⁾.

Mi propongo di risolvere qui il problema sopraenunciato e precisamente di trattare le quistioni seguenti:

1° con quale precisione è possibile calcolare la rifrazione astronomica quando (ammessa, al solito, la distribuzione regolare per strati sferici di egual densità) si faccia, *riguardo alla temperatura dell'aria, la sola ipotesi che essa non cresca coll' altezza*;

2° qual' è l'errore massimo cui può dar luogo il non verificarsi di questa ipotesi, il fatto cioè di *una inversione della temperatura*;

3° di quanto cresce la precisione, *quando si supponga, in base alla osservazione, conosciuta la legge di variazione della temperatura, dal livello del mare fino ad una certa altezza*.

Restano, naturalmente, escluse dai calcoli che seguono le distanze zenitali molto vicine a 90° , ma d' altra parte è chiaro a priori, e ben confermato dall'esperienza, come l' andamento delle visuali prossime all' orizzonte sia tanto strettamente le-

della refrazione astronomica (Mem. Soc. Spettroscopisti, vol. 34) dà una formola del tipo $A \tan z + B \tan^2 z$, la quale è indipendente dal modo di decremento della temperatura coll' altezza. Egli fa vedere come, fino a 75° di distanza zenitale, il calcolo numerico di questa formola fornisca per la rifrazione dei valori che presentano differenze trascurabili da quelli calcolati colla formola di Bessel.

1) Bulletin Astronomique, Octobre 1905.

2) La Memoria del sig. Andoyer contiene pure una pregevole trattazione relativa al caso di distanze zenitali superiori a 75° . La formola da lui adottata corrisponde ad un modo di variare della temperatura che concorda coi dati dell'osservazione per quanto riguarda il valore iniziale del gradiente termico verticale.

gato alle condizioni degli strati bassi dell'aria, da render vano ogni tentativo di esatta ricerca a priori.

2. Stabiliamo alcune formole preliminari. Chiamiamo p, ϱ, t, n la pressione, la densità, la temperatura assoluta e l'indice di rifrazione dell'aria alla distanza r dal centro della Terra, e segniamo coll'indice 0 queste lettere quando si riferiscano al luogo d'osservazione. E intendiamo, salvo avviso contrario, che gli integrali che figurano nelle formole seguenti siano sempre estesi dal luogo d'osservazione fino al limite superiore dell'atmosfera.

Avremo

$$(1) \quad \frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{t}{t_0}$$

e posto

$$(2) \quad \frac{r_0}{r} = 1 - s,$$

$$(3) \quad dp = -g\varrho \cdot dr = -g_0 r_0 \varrho \cdot ds$$

ove g e g_0 sono le accelerazioni della gravità alle distanze r ed r_0 risp. del centro terrestre.

Posto

$$(4) \quad \beta = \frac{p_0}{g_0 r_0 \varrho_0},$$

le (1) e (3) danno

$$(5) \quad \beta \frac{dp}{p_0} = -\frac{\varrho}{\varrho_0} ds.$$

D'altra parte

$$(6) \quad n = 1 + \alpha \frac{\varrho}{\varrho_0}, \quad n_0 = 1 + \alpha,$$

dove $\alpha = 0,0002927$ se ϱ_0 è la densità corrisp. a 760^{mm} di barometro e a 0° di temperatura centigrada. Quindi posto

$$(7) \quad \frac{n_0}{n} = y,$$

sarà, tenuto conto della (5):

$$(8) \quad (y - n_0) ds = -\alpha y \frac{\varrho}{\varrho_0} ds = \alpha \beta y \frac{dp}{p_0}.$$

L' integrazione per parti dà quindi:

$$(9) \quad \int s^q dy = \int s^q d(y - n_0) = -q \int (y - n_0) s^{q-1} ds \\ = -q \alpha \beta \int y s^{q-1} \frac{dp}{p_0}.$$

poichè la s si annulla al limite inferiore, la $y - n_0$ al superiore. Con una nuova integrazione per parti (supposto $q > 1$)

$$(10) \quad - \int y s^{q-1} \frac{dp}{p_0} = \int \frac{p}{p_0} s^{q-1} dy + (q-1) \int \frac{p}{p_0} s^{q-2} y ds$$

giacchè p si annulla al limite superiore. Poichè t non cresce coll' altezza, la (1) dà

$$\frac{p}{p_0} \leq \frac{\varrho}{\varrho_0};$$

quindi la (5):

$$\frac{p}{p_0} ds \leq -\beta \frac{dp}{p_0}.$$

L' ultimo termine, nel secondo membro della (10), è dunque tutt' al più uguale a

$$-(q-1) \beta \int y s^{q-2} \frac{dp}{p_0},$$

ovvero, in grazia della (9) ove si cangi q in $q-1$, tutt' al più uguale a

$$\frac{1}{\alpha} \int s^{q-1} dy.$$

Quanto al primo termine nel secondo membro della (10), esso è evidentemente minore di

$$\int s^{q-1} dy.$$

Quindi dalle (9) (10) deduciamo :

$$(11) \quad \int s^q . dy < \beta (q\alpha + q) . \int s^{q-1} . dy$$

Abbiamo poi

$$\int s . dy = - \int (y - n_0) ds = - \alpha \beta \int y \frac{dp}{p_0} ;$$

e poichè la variabile y è compresa fra 1 ed $n_0 = 1 + \alpha$ e siccome

$$\int \frac{dp}{p_0} = -1$$

sarà

$$(12) \quad \alpha \beta < \int s . dy < \alpha (1 + \alpha) \beta ,$$

La (10) dà poi

$$(13) \quad \int s^2 . dy < 2\beta^2 \alpha (1 + \alpha)^2 ,$$

$$\int s^3 . dy < 6\beta^3 \alpha (1 + \alpha)^3 ,$$

ecc. ecc.

Si ha pure ($q > 1$)

$$\int (n_0 - y)^q ds = - \alpha \beta \int y (n_0 - y)^{q-1} \frac{dp}{p_0} .$$

E poichè il massimo valore di y è n_0 , il massimo di $n_0 - y$ è $n_0 - 1 = \alpha$, sarà

$$(14) \quad \int (n_0 - y)^q . ds < \alpha \beta n_0 (n_0 - 1)^{q-1} = \alpha^q \beta (1 + \alpha) .$$

Queste formole son poco differenti da quelle delle quali ha fatto uso il sig. Andoyer nella citata Memoria.

3. Procediamo al calcolo approssimato della rifrazione, partendo dalla nota espressione

$$R = \int \frac{\frac{r_0}{r} \cdot d \frac{n_0}{n}}{\sqrt{1 + \cotg^2 z - \left(\frac{z_0 n_0}{z n}\right)^2}}$$

ove z è la distanza zenitale osservata. Colle nostre notazioni

$$(15) \quad R = \int \frac{(1-s) dy}{\sqrt{c^2 - y^2 (1-s)^2}}$$

ove si è posto $c = \frac{1}{\sin z}$. Supporremo in tutti i calcoli che seguono $c^2 > n_0^2$ che è il massimo valore del prodotto $y^2(1-s)^2$. Col valore di α dato più sopra, ciò equivale a supporre

$$z < 88^\circ.36'.50''.$$

Posto

$$F = \frac{1-s}{\sqrt{c^2 - y^2 (1-s)^2}}$$

abbiamo, collo sviluppo di Taylor per potenze di s :

$$(16) \quad F = \frac{1}{\sqrt{c^2 - y^2}} - \frac{c^2 \cdot s}{(c^2 - y^2)^{3/2}} + E$$

dove

$$E = \frac{3}{2} \frac{c^2 y^2 s^2 (1-s')}{[c^2 - y^2 (1-s')^2]^{5/2}}; \quad (0 < s' < s)$$

(si osservi che s nel caso nostro è sempre compreso fra 0 ed 1). Quindi

$$E < \frac{3}{2} \frac{c^2 y^2 s^2}{(c^2 - y^2)^{5/2}}.$$

Le (15) (16) danno pertanto

$$(17) \quad R = \int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} - c^2 \int \frac{s \cdot dy}{(c^2 - y^2)^{3/2}} + \varepsilon$$

dove

$$\varepsilon = \int E \cdot dy < \frac{3}{2} c^2 \int \frac{y^2 \cdot dy \cdot s^2}{(c^2 - y^2)^{5/2}} < \frac{3}{2} \frac{c^2 n_0^2}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}} \int s^2 \cdot dy.$$

E ricordando la (13)

$$(18) \quad \varepsilon < \frac{3c^2(1+\alpha)^2\beta^2\alpha}{(c^2-n_0^2)^{5/2}} = 3\beta^2\alpha(1+\alpha)^2 \frac{\text{sen}^3 z}{(1-n_0^2\text{sen}^2 z)^{5/2}}.$$

Il primo termine nel secondo membro della (17) è, essendo 1 ed n_0 i valori limiti della y ,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \text{arc. sen } (n_0 \text{ sen } z) - z_0.$$

È questa l'espressione che si otterrebbe, quando la superficie di egual densità fossero piani orizzontali. In tal caso, com'è notissimo, il modo di variare della densità non ha alcuna influenza sul calcolo della rifrazione, la quale resta determinata dalla semplice applicazione della legge di Cartesio, pel passaggio dal mezzo il cui *indice* è n_0 a quello di indice 1.

Veniamo al secondo termine nel secondo membro della (17). Esso può scriversi, colla integrazione per parti

$$(19) \quad -c^2 \int \frac{s \cdot dy}{(c^2 - y^2)^{3/2}} = c^2 \int \frac{(y - n_0) ds}{(c^2 - y^2)^{3/2}} + 3c^2 \int \frac{y(y - n_0) s \cdot dy}{(c^2 - y^2)^{5/2}}.$$

L'ultimo termine che indicheremo con ζ è minore, in valore assoluto, di

$$\frac{-c^2 n_0}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}} \int (y - n_0) s \cdot dy$$

e, integrando per parti:

$$\zeta < \frac{3c^2 n_0}{2(c^2 - n_0^2)^{5/2}} \int (y - n_0)^2 ds < \frac{3\alpha^2 \beta (1+\alpha)^2 c^2}{2(c^2 - n_0^2)^{5/2}}$$

[vedi formola (14)]. Quindi finalmente

$$(20) \quad \zeta < \frac{3\alpha^2 \beta (1+\alpha)^2 \text{sen}^3 z}{2(1 - n_0^2 \text{sen}^2 z)^{5/2}}.$$

Il primo termine nel secondo membro della (19) può scriversi ricordando la (8)

$$(21) \quad c^2 \int \frac{(y - n_0) ds}{(c^2 - y^2)^{3/2}} = c^2 \alpha \beta \int \frac{y}{(c^2 - y^2)^{3/2}} \frac{dp}{p_0}.$$

E poichè y è compreso fra 1 ed n_0 , questa espressione sarà compresa fra

$$(22) \quad \frac{-c^2 \alpha \beta}{(c^2 - 1)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \frac{-c^2 \alpha \beta n_0}{(c^2 - n_0^2)^{3/2}}.$$

Assumendo pertanto, come valore approssimato della espressione (21), la media aritmetica delle (22), commetteremo un errore δ il quale sarà, in valore assoluto, minore di metà della differenza

$$c^2 \alpha \beta \left[\frac{n_0}{(c^2 - n_0^2)^{3/2}} - \frac{1}{(c^2 - 1)^{3/2}} \right].$$

Ricordando che $n_0 = 1 + \varepsilon$, si trova, con un'ovvia applicazione dello sviluppo di Taylor, che questa differenza è, in ogni caso, minore di

$$\frac{c^2 \alpha^2 \beta (c^2 + 2 n_0^2)}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}}.$$

Quindi, in valore assoluto,

$$(23) \quad \delta < \frac{\alpha^2 \beta \operatorname{sen} z (1 + 2 n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)}{2 (1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{5/2}}.$$

Sicchè finalmente, se calcoliamo la rifrazione colla formula

$$(24) \quad R = \arcsen(n_0 \operatorname{sen} z) - z_0 - \frac{\alpha \beta \operatorname{sen} z}{2} \left[\frac{1}{\cos^3 z} + \frac{n_0}{(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{3/2}} \right]$$

l'errore commesso sarà uguale alla somma dei tre errori indicati con ε , ζ e δ , dei quali i limiti superiori sono rispettivamente dati dalle formole (18) (20) e (23). Ma è da osservare che l'errore indicato con ε è, in ogni caso, positivo, mentre quello denotato con ζ è negativo, e che di più nelle ordinarie condizioni atmosferiche, il limite superiore del valore assoluto

di ζ è inferiore a quello di ε ¹⁾, sicchè $\varepsilon + \zeta$ sarà in ogni caso minore, in valore assoluto, del limite superiore di ε . Quindi, finalmente, il limite superiore dell'errore cui è soggetta la formola (24) è minore di

$$|\varepsilon_{\max}| + \delta_{\max}|$$

dove i due massimi sono espressi dai secondi membri delle (18) e (23) rispettivamente.

Per le applicazioni numeriche, giova ricordare che per $t_0 = 273$, $p_0 = 760^{\text{mm}}$ i valori di α e β sono

$$\alpha_0 = 0,0002927, \quad \beta_0 = 0,001254$$

e che variando t_0 , p_0 , r_0 , si ha con molta approssimazione

$$(25) \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\xi_0}{\xi'_0} = \frac{p_0}{p'_0} \frac{t'_0}{t_0}; \quad \frac{\beta}{\beta'} = \frac{p_0}{p'_0} \frac{r_0}{r'_0} \frac{\xi'_0}{\xi_0} = \frac{r_0}{r'_0} \frac{t_0}{t'_0}$$

quindi

$$\alpha = 0,0002923 \frac{p_0}{760} \frac{273}{t_0}; \quad \beta = 0,001254 \frac{r_0}{6370} \cdot \frac{t_0}{278}$$

dove r_0 è contato in chilometri. Coi valori dati di α_0 , β_0 , si ottiene

$z =$	45°	60°	75°
$\varepsilon_{\max} =$	$0'',0006$	$0'',006$	$0'',23$
$\delta_{\max} =$	$0'',00015$	$0'',0009$	$0'',009$

4. Cerchiamo ora quali modificazioni subiscano i calcoli precedenti nella ipotesi di una *inversione* della temperatura, ossia quando si ammetta che dal luogo di osservazione fino ad una certa altezza la temperatura varii in guisa da raggiungere un massimo $t_m > t_0$.

1) Il rapporto fra il secondo membro della (18) e quello della (20) è

$$\frac{\beta}{\alpha} (1 + \alpha) (1 + 2\alpha).$$

Per $t_0 = 273^\circ$, $p_0 = 760^{\text{mm}}$, questo rapporto è $= 4,28 \dots$. Variando t_0 e p_0 il rapporto diventa prossimamente

$$\left(\frac{t_0}{273}\right)^2 \left(\frac{760}{p_0}\right) 4,28.$$

Per $t_0 = 253^\circ$, $p_0 = 790^{\text{mm}}$ esso si riduce quindi a 3,54 circa.

In questo caso, posto

$$\tau = \frac{t_m}{t_0},$$

alla disuguaglianza $\frac{p}{p_0} \leq \frac{\varrho}{\varrho_0}$ si dovrà nel paragrafo 3 sostituire la

$$\frac{p}{p_0} \leq \frac{\varrho}{\varrho_0} \tau$$

con che la disuguaglianza (11) si muta nella

$$(11') \quad \int s^q \cdot dy < \beta (q\alpha + \tau q) \int s^{q-1} \cdot dy$$

le (13) e (18) nelle

$$(18') \quad \int s^2 \cdot dy < 2\beta^2 \alpha (1 + \alpha) (\tau + \alpha) \frac{\operatorname{sen}^3 z}{(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{3/2}}.$$

Attesa la piccolezza di α , si può dedurre dal paragone delle (18) (18') che per effetto dell'inversione della temperatura, il limite superiore dell'errore cresce, circa, nel rapporto da 1 a τ ossia da t_0 a t_m . Supposto un massimo di 15° per la differenza $t_m - t_0$, e posto $t_0 = 273$ si ha $\frac{t_m}{t_0} = 1,055$ circa. L'effetto dell'inversione della temperatura (entro limiti in cui questo fatto può praticamente verificarsi), può dunque ritenersi trascurabile per quanto riguarda il grado di precisione nel calcolo della rifrazione.

5. Vediamo finalmente di quanto possa crescere questo grado di precisione pel fatto della conoscenza empirica della costituzione dell'atmosfera a partire dal suolo fino ad una certa altezza.

Indichiamo con l_0 , l_1 , l_2 rispettivamente la superficie di livello del luogo di osservazione, quella che limita superiormente la regione esplorata dell'atmosfera, e la superficie limite este-

riore. Possiamo allora esprimere la rifrazione totale colla somma

$$R = R_1 + R_2,$$

ove R_1 esprime l'integrale nel secondo membro della (15) esteso fra i limiti l_0, l_1 , mentre R_2 è lo stesso integrale fra l_1 ed l_2 . Poichè la costituzione dell'atmosfera è nota fra l_0 ed l_1 , si possono supporre calcolati i valori numerici dell'indice n per i valori di r entro questi limiti, epperò l'integrale R_1 può supporre calcolato con una quadratura meccanica, con quanta approssimazione si vuole.

Quanto al rimanente integrale R_2 non c'è altro a fare che applicare al calcolo di esso la formola approssimativa (24) dove però i valori delle costanti iniziali r_0, p_0, t_0, n_0 , siano quelli relativi alla superficie l_1 limite superiore della regione esplorata e la distanza zenitale z è quella della traiettoria luminosa nel punto in cui essa attraversa la superficie l_1 . Trascurando tuttavia, il che qui è lecito di fare, la variazione di z e di n_0 sen z e tenendo conto delle (25) si vede facilmente che, dette, come sopra, p_0, t_0, r_0 le costanti relative al luogo di osservazione, p'_0, t'_0, r'_0 le cose analoghe per la superficie l_1 , la conoscenza dello stato dell'atmosfera nello strato l_0, l_1 ci dà modo di far diminuire i limiti di errore indicati con ϵ_{\max} e δ_{\max} nel rapporto

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1 : \frac{p'_0}{p_0} \frac{t'_0}{t_0} \left(\frac{r'_0}{r_0} \right)^2 & \text{per } \epsilon_{\max}, \\ 1 : \left(\frac{p'_0}{p_0} \right)^2 \frac{t_0}{t'_0} \frac{r'_0}{r_0} & \text{per } \delta_{\max}. \end{array} \right.$$

Supposto che si conosca la costituzione dell'atmosfera fino all'altezza di 10 km., ed ammesso, in conformità,

$$\begin{array}{lll} p'_0 = 220^{\text{mm}} & t'_0 = 225^\circ & r'_0 = 6380 \text{ km} \\ p_0 = 760 & t_0 = 280 & r_0 = 6370 \end{array}$$

i due rapporti ora detti diventano rispettivamente

$$1 : 0,232 \quad 1 : 0,104;$$

Si ridurrebbe dunque a *meno di un quarto* il limite superiore dell'errore teorico nel calcolo della rifrazione.

È poi chiaro che la sola conoscenza del *valore iniziale del gradiente termico verticale* dell'aria può accrescere di poco o nulla la precisione nel calcolo della rifrazione. Infatti poichè, per concorde risultato delle osservazioni recenti ¹⁾ la variazione di temperatura da 1 a 2 km. d'altezza è già notevolmente differente di quella da 0 a 1 km., è chiaro che la conoscenza di quel valore iniziale equivale all'assegnare lo stato dell'atmosfera per una altezza non superiore a 1 km.; nel qual caso i rapporti (26) vengono a differire ben poco dall'unità.

LIBRI NUOVI

HANDBUCH DER GEOGRAPHISCHEN ORTSBESTIMMUNGEN FÜR GEOGRAPHEN UND FORSCHUNGREISENDE MARCUSE.

(Vieweg und Sohn, 1905. Prezzo: Marchi 10)

Il presente volume tratta dei metodi di osservazione e di calcolo per la determinazione delle coordinate geografiche di un luogo che possono servire agli esploratori ed ai geografi: esso lascia quindi da parte quei metodi che sono piuttosto adatti alle osservazioni in mare, o quelli che per la loro precisione sono usati negli osservatorii astronomici, ma che, per difficoltà di osservazione o per lunghezza di calcoli, non possono applicarsi in viaggio. Notevole pregio del libro è la chiarezza e la cura nell'esposizione.

Il libro si apre coi primi elementi di geografia astronomica: si definiscono i due sistemi di coordinate di una stella (declinazione ed angolo orario, distanza zenitale ed azimut), le loro trasformazioni, le loro relazioni colle coordinate geo-

1) Vedi p. es. De Marchi. *Meteorologia generale*, pag. 113 e segg. (Milano, 1905)