# SULL'ESTENSIONE DEL CONCETTO DI TETRAEDRI DI MÖBIUS AGLI IPERSPAZII.

Nota di **Luigi Berzolari** (Pavia).

Adunanza del 27 maggio 1906.

Com'è notissimo, diconsi « di MÖBIUS » due tetraedri così tra loro riferiti, che ogni vertice di ciascuno stia nel piano dei tre vertici non corrispondenti dell'altro. Analiticamente sono caratterizzati dalla proprietà che le coordinate dei vertici dell'uno, rispetto all'altro preso come fondamentale, formano un determinante emisimmetrico.

Ora in diverse questioni relative ad uno spazio $S_n$ di $n$ dimensioni — nello studio dei sistemi nulli, in quello delle curve razionali normali, ... *) — si presentano, per $n$ dispari, coppie di piramidi (di $n+1$ vertici), tali che se l'una si assume come fondamentale, le coordinate dei vertici dell'altra costituiscono un determinante emisimmetrico. Di conseguenza esse risultano riferite tra loro appunto in quel modo che si offre come naturale estensione di quanto avviene per i tetraedri di MÖBIUS, cioè così che i vertici di ognuna giacciono in uno stesso iperpiano coi vertici non corrispondenti dell'altra. Ma non sembrami inopportuno far rilevare (benchè si tratti certamente di un'osservazione molto semplice) che non è questo, per $n > 3$, il modo più generale d'ottenere due piramidi mutuamente iscritte e circoscritte secondo la legge testè dichiarata **), e che d'altra parte esistono coppie di piramidi aventi una tal posizione, pur quando la dimensione $n$ dello spazio ambiente sia un numero pari (superiore al due).

## § 1.

Data anzitutto in $S_n$ (con $n$ qualunque, purchè $> 3$) una piramide $(A) \equiv A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$, della quale sia $\alpha_i$ la faccia opposta al vertice $A_i$, è facile vedere come se ne possa co-

*) Oltre ai lavori che si riferiscono al sistema nullo individuato da una curva razionale normale, vedasi la mia Nota: *Sulle curve di ordine n dello spazio ad n dimensioni* [Rend. del R. Istituto Lombardo, s. II, vol. XXXVI (1903), pp. 791-795].—Siffatte piramidi (« di MÖBIUS »), e pur quelle che nel lavoro che citerò fra poco ho chiamato « di SCHLÄFLI », si presentano nello studio di una classe notevole di curve razionali, come mostrerò in una prossima occasione.

**) Perciò la *seconda* dimostrazione che si legge nell'ultima pagina del mio lavoro: *Sui sistemi di $n+1$ rette dello spazio ad n dimensioni, situate in posizione di* SCHLÄFLI [questi Rendiconti, tomo XX (1905), pp. 229-247 (n° 10)], è da riferirsi soltanto al detto caso particolare.

struire un'altra $(B) \equiv B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ così riferita alla prima, che ogni vertice di ciascuna appartenga alla faccia dell'altra determinata dai vertici non corrispondenti. I vertici $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ possono assumersi ad arbitrio risp. sulle facce $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$; dopo di che i vertici rimanenti $B_n$ e $B_{n+1}$ sono risp. le intersezioni dell'$S_{n-2}$ in cui $\alpha_n$ taglia l'iperpiano $B_1 B_2 \ldots B_{n-1} A_{n+1}$, e dell'$S_{n-2}$ in cui $\alpha_{n+1}$ taglia l'iperpiano $B_1 B_2 \ldots B_{n-1} A_n$, con una retta che si appoggi agli $S_{n-2}$ determinati dai punti

$$\begin{gathered} B_2 B_3 \ldots B_{n-1} A_1, \\ B_1 B_3 B_4 \ldots B_{n-1} A_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_1 B_2 \ldots B_{n-2} A_{n-1}. \end{gathered}$$

Nell'ipotesi ammessa di $n > 3$, gli $n + 1$ spazî $S_{n-2}$ qui nominati sono tra loro indipendenti, nel senso che una retta, la quale ne incontri $n$, non incontra necessariamente il rimanente: ciò che si riconosce analiticamente, per es., prendendo $(A)$ come fondamentale. Le rette che li incontrano tutti sono quindi $\infty^{n-3}$ *), e ciascuna individua una delle cercate piramidi $(B)$.

Perciò *in $S_n$ (con $n > 3$) le coppie di piramidi mutuamente iscritte e circoscritte con la legge indicata sono in numero $\infty^{2(n-1)(n+1)}$; datane una, l'altra può costruirsi in $\infty^{(n-2)(n+1)}$ modi* **).

## § 2.

In un $S_{2n-1}$ una piramide di $2n$ vertici, le coordinate dei quali costituiscano ordinatamente le orizzontali di un determinante emisimmetrico, è nel tempo stesso iscritta e circoscritta alla piramide fondamentale. Per caratterizzare completamente la mutua posizione di due tali piramidi, che dirò « di MÖBIUS », si osservi che *quanti vertici si vogliano di ciascuna, purchè in numero dispari, e i loro non omologhi dell'altra stanno in un iperpiano.*

Dico inversamente che, *date in $S_{2n-1}$ due piramidi tra loro riferite $(A) \equiv A_1 A_2 \ldots A_{2n}$ e $(B) \equiv B_1 B_2 \ldots B_{2n}$, perchè esse siano di* MÖBIUS *è sufficiente che i vertici di $(A)$ giacciano sulle facce omologhe di $(B)$, e che inoltre tre vertici qualunque di $(A)$, dei quali uno sia fisso, stiano in un medesimo iperpiano coi loro non corrispondenti di $(B)$* ***).

Scelta $(B)$ come fondamentale, siano $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i,2n}$ le coordinate di $A_i$, talchè

*) E formano una varietà di $n - 2$ dimensioni, l'ordine della quale può aversi dal lavoro dello SCHUBERT, *Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums* [Math. Ann., vol. XXVI (1886), pp. 26-51].

**) La costruzione può farsi anche con elementi tutti reali. In $S_4$ per es., se una delle due piramidi è scelta come fondamentale, l'altra può avere per vertici i punti (0, 1, 1, 1, 1), $\left(1, 0, \frac{11}{12}, \frac{11}{12}, \frac{11}{12}\right)$, $\left(1, \frac{11}{12}, 0, 1, \frac{33}{7}\right)$, $\left(1, \frac{11}{12}, -\frac{11}{5}, 0, 2\right)$, $\left(1, \frac{11}{12}, 3, 22, 0\right)$.

***) Per lo spazio ordinario ($n = 2$) cfr. il lavoro di CAPORALI e DEL PEZZO, *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* (n° 8), nelle *Memorie di Geometria* (Napoli, 1888) del CAPORALI (pag. 270).

si avrà per ipotesi:

$$a_{ii} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Se poi il vertice di $(A)$ che si pone in tutte le terne considerate è, per es., $A_1$, è lecito supporre:

(1)
$$a_{1i} + a_{i1} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, 2n).$$

Allora la proprietà ammessa che esista un iperpiano passante per $A_1$, per altri due vertici qualunque $A_h$ e $A_k$ di $(A)$, e per i $2n - 3$ vertici di $(B)$ non omologhi ai precedenti, si traduce nella relazione:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1h} & a_{1k} \\ a_{h1} & 0 & a_{hk} \\ a_{k1} & a_{kh} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dalla quale, per le (1), segue:

$$a_{hk} + a_{kh} = 0 \qquad (h, k = 2, 3, \ldots, n),$$

come si è asserito.

Ne risulta che l'esser le due piramidi nella posizione qui considerata impone alle medesime

$$2n + \frac{(2n-1)(2n-2)}{2} = 2n^2 - n + 1$$

condizioni indipendenti; sicchè *le coppie di piramidi di* Möbius *di un* $S_{2n-1}$ *sono* $\infty^{6n^2-3n-1}$; *mentre, se di esse una è data, l'altra varia in una totalità* $\infty^{(n-1)(2n+1)}$.

Si ricava pure dal teorema una semplice costruzione di due piramidi di Möbius. Data per es. la $(B)$, di cui sia $\beta_i$ la faccia opposta al vertice $B_i$, dell'altra si possono prendere ad arbitrio due vertici $A_1$ e $A_2$ risp. in $\beta_1$ e $\beta_2$. Scelgasi poi $A_3$ comunque nell'$S_{2n-3}$ in cui $\beta_3$ taglia l'iperpiano $A_1A_2B_4B_5 \ldots B_{2n}$; indi $A_4$ a piacere nell'$S_{2n-4}$ in cui si tagliano $\beta_4$ e gl'iperpiani $A_1A_2B_3B_5B_6 \ldots B_{2n}$, $A_1A_3B_2B_5 \ldots B_{2n}$; e così via, finchè $A_{2n}$ risulterà del tutto individuato come intersezione di $\beta_{2n}$ coi $2n - 2$ altri iperpiani $A_1A_2B_3B_4 \ldots B_{2n-1}$, $A_1A_3B_2B_4 \ldots B_{2n-1}$, $\ldots$, $A_1A_{2n-1}B_2 \ldots B_{2n-2}$. Data l'una, l'altra delle due piramidi può dunque costruirsi in un'infinità di modi espressa da

$$2(2n-2) + (2n-3) + (2n-4) + \cdots + 2 + 1 = (n-1)(2n+1),$$

in accordo con quanto si è trovato sopra.

## § 3.

Delle numerose proprietà, di cui godono notoriamente due tetraedri di Möbius, soltanto alcune si conservano quando si passi allo spazio $S_{2n-1}$ (con $n > 2$).

Così non è più vero, per $n > 2$, che due piramidi di Möbius siano autoreciproche rispetto ad una medesima quadrica *). Suppongasi infatti che una tal quadrica esista,

*) Per $n = 2$, cfr. Caporali e Del Pezzo, l. c., n° 49.

sicchè, mantenute le notazioni precedenti, la sua equazione sarà della forma:

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \cdots + c_{2n} x_{2n}^2 = 0.$$

Scrivendo che l'iperpiano polare di $A_1$ passa per $A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$, si ottengono $2n - 1$ equazioni lineari omogenee nelle $c_2, c_3, \ldots, c_{2n}$, dalle quali, per le note espressioni dei complementi algebrici degli elementi di un determinante emisimmetrico, si ricava per es.:

$$\frac{c_{2n-1}}{c_{2n}} = \frac{a_{1,2n}(2, 3, \ldots, 2n-2, 2n)}{a_{1,2n-1}(2, 3, \ldots, 2n-2, 2n-1)},$$

dove si è adoperata la consueta notazione per gli pfaffiani. L'iperpiano polare di $A_2$ dà similmente:

$$\frac{c_{2n-1}}{c_{2n}} = \frac{a_{2,2n}(1, 3, 4, \ldots, 2n-2, 2n)}{a_{2,2n-1}(1, 3, 4, \ldots, 2n-2, 2n-1)},$$

la quale espressione coincide con la precedente sol quando sia $n = 2$.

Neanche si trasporta all'$S_{2n-1}$ (con $n > 2$) la proprietà che hanno due tetraedri di Möbius, di essere iperboloidici (in tre modi diversi): almeno, se del concetto di quattro rette iperboloidiche si fa l'estensione nel senso che forma l'oggetto del secondo mio lavoro già citato, dove si tratta di $r + 1$ rette d'un $S_r$ situate *in posizione di* Schläfli, tali cioè che ogni $S_{r-2}$, il quale ne incontri $r$, incontri pure la rimanente. Infatti, per quanto là ho dimostrato, si dovrebbero allora poter ordinare i vertici della piramide $(A)$ in guisa che le loro coordinate costituissero un determinante *simmetrico*: ciò che invece facilmente si riconosce non esser possibile per $n > 2$.

Si generalizza al contrario, ma *soltanto agli $S_{2n-1}$ per i quali n sia numero pari,* il teorema che con gli otto vertici di due tetraedri di Möbius si possono formare tre altre coppie di siffatti tetraedri: poichè si ha che *in un $S_{4m-1}$ gli $8m$ vertici di due piramidi di* Möbius *si distribuiscono in altre $\frac{1}{2}\binom{4m}{2m}$ maniere nei vertici di due piramidi di* Möbius. Due di tali nuove piramidi si ottengono scegliendo a costituir l'una $2m$ vertici di $(A)$ e i $2m$ vertici non corrispondenti di $(B)$, e a costituir l'altra i restanti vertici di $(A)$ e $(B)$ risp. omologhi ai precedenti.

Sussiste infine per qualsiasi valore di $n$ la proprietà, che *in un $S_{2n-1}$ due piramidi di* Möbius *determinano due complessi lineari, l'uno di rette e l'altro di $S_{2n-3}$ (coincidenti quando sia $n = 2$), rispetto a ciascuno dei quali esse sono reciproche l'una dell'altra.* Invero, mantenute le precedenti notazioni, e posto per brevità

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k}(1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, 2n),$$

per le espressioni già richiamate dei complementi algebrici degli elementi d'un determinante emisimmetrico, le facce di $(A)$ opposte ai vertici $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ hanno risp. le equazioni:

$$\begin{array}{llllll}
 & \alpha_{12}x_2 & + \alpha_{13}x_3 + & \cdots & + \alpha_{1,2n}x_{2n} & = 0, \\
\alpha_{21}x_1 & & + \alpha_{23}x_3 + & \cdots & + \alpha_{2,2n}x_{2n} & = 0, \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\alpha_{2n,1}x_1 & + \alpha_{2n,2}x_2 + & \cdots & + \alpha_{2n,2n-1}x_{2n-1} & & = 0.
\end{array}$$

Se quindi diciamo

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$$

le coordinate locali della retta congiungente i punti $x$, $y$, e

$$\pi_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$$

le coordinate iperplanari dell'$S_{2n-3}$ comune agl'iperpiani $\xi$, $\eta$, i due complessi lineari di cui si tratta nel precedente enunciato sono risp. quelli rappresentati dalle equazioni:

$$\sum_{i,k} \alpha_{ik} p_{ik} = 0, \qquad \sum_{i,k} a_{ik} \pi_{ik} = 0.$$

Si può osservare che il loro invariante simultaneo vale

$$n.(1,\ 2,\ \ldots,\ 2n),$$

epperò non è mai nullo (altrimenti i punti $A_1$, $A_2$, ..., $A_{2n}$ sarebbero in un iperpiano).

Pavia, 16 maggio 1906.

LUIGI BERZOLARI.