1.

Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées.

Premier mémoire.

(Par M. *Charles Hermite*, à Paris.)

Une proposition élémentaire et fondamentale dans la théorie arithmétique des formes, consiste en ce que, pour un degré donné, et pour un nombre donné d'indéterminées, toutes les formes à coefficients entiers qui possèdent les mêmes ***invariants*** sont réductibles à un nombre fini de classes distinctes. Ce théorème a été démontré par ***Lagrange*** et ***Gauss*** pour les formes quadratiques à ***deux*** et à ***trois*** indéterminées; je l'ai étendu ensuite aux formes quadratiques ***générales***, et à toutes celles qui sont décomposables en facteurs linéaires; ainsi il parait bien vrai dans toute sa généralité. Mais pour arriver à l'établir de cette sorte, il faudrait résoudre dans toute leur étendue, les problèmes suivants, aussi beaux que difficiles.

Le ***premier*** qui appartient à ***l'algèbre***, consiste à obtenir la notion complète de ces fonctions rationnelles entières des coefficients, nommées ***Invariants*** par Mr. ***Sylvester***, dans le sens primitivement attribué par Mr. ***Gauss*** au mot de ***Déterminant***.

Le ***second*** qui est du ressort de ***l'arithmétique***, consiste à découvrir par quelles substitutions à coefficients entiers on peut transformer une forme donnée, en une autre dont les coefficients aient des limites, fonctions seulements des ***invariants***. Enfin il faut une méthode propre à donner le système complet des formes réduites, représentant la totalité des classes distinctes pour des valeurs assignées a priori aux invariants.

En me bornant à la considération des formes à deux indéterminées, j'ai présenté un premier essai sur ces questions dans mon Mémoire sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. Le principe dont j'ai fait usage, fait résulter de la même analyse, la notion des invariants et la théorie arithmétique de la réduction. Mais dès le cinquième degré, l'application de ma méthode devient si compliquée, que les résultats généraux ne se trouvaient établis qu'à titre de possibilité, et il restait à découvrir une méthode numériquement applicable. C'est ce qui a été l'objet de mes recherches assidues depuis plusieurs années, et j'espère y être enfin parvenu, mais pour le cas seulement des formes de degrés *impairs.* Une différence profonde se manifeste en effet, dans la nature analytique des formes binaires, suivant que le degré est un nombre *pair* ou *impair.* Ces dernières me semblent plus faciles à traiter; j'ai trouvé qu'elles jouissent (sauf une exception, celle des formes cubiques) de cette propriété arithmétique générale, que pour un système donné de valeurs des invariants, les formes des diverses classes sont transformables les unes dans les autres par des substitutions linéaires au déterminant *un,* mais à coefficients fractionnaires; c'est à dire, en adoptant la notion proposée par Mr. *Eisenstein,* que les diverses classes qui ont les mêmes invariants, ne forment qu'un genre. Les formes de degrés *pairs,* m'ont présenté de plus grandes difficultés, que dès longtemps je ne puis espérer de vaincre. Mais j'ai remarqué que le cas des formes *biquadratiques* se distinguait d'une manière toute particulière, comme le cas des formes *cubiques,* par rapport aux autres formes de degrés impairs. Aussi me suis-je proposé d'en faire une étude spéciale, dans ce mémoire, en développant à leur égard les principes fondés sur l'introduction de variables *continues,* que j'ai précédemment exposé (Tome 41 de ce journal). J'offrirai ensuite avec plus d'étendue et plus de développement, la nouvelle théorie dont j'ai donné une idée sommaire dans le Journal de Math. de *Cambridge* et *Dublin* (Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées, Cambridge an Dublin Mathématical Journal, 1854), et qui m'a conduit aux résultats que je viens d'annoncer sur les formes de degrés impairs.

Première partie.
Théorie algébrique des formes biquadratiques.

I.
Sur les invariants et covariants des formes biquadratiques.

Je ferai usage dans ces recherches, de la notation qu'employe Mr. *Cayley* pour représenter d'une manière abrégée les formes à deux indéterminées. Elle consiste à poser:

$$ax^m + mbx^{m-1}y + \frac{m.m-1}{1.2}cx^{m-2}y^2 + \cdots + \frac{m.m-1}{1.2}c'x^2y^{m-2} + mb'xy^{m-1} + a'y^m$$
$$= (a, b, c, \ldots c', b', a'\widehat{)}(x, y)^m,$$

et son principal avantage est d'indiquer commodément les opérations relatives aux substitutions linéaires. Par exemple, si la transformée

$$AX^m + mBX^{m-1}Y + \frac{m.m-1}{1.2}CX^{m-2}Y^2 + \cdots + \frac{m.m-1}{1.2}C'X^2Y^{m-2} + mB'XY^{m-1} + A'Y^m$$

a été obtenue en faisant:

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \gamma X + \delta Y,$$

on écrira:

$$(a, b, c, \ldots b', c', a' \widehat{)} (\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)^m = (A, B, C, \ldots C', B', A' \widehat{)} (X, Y)^m.$$

Cela posé, soit $f = (a, b, c, b', a' \widehat{)} (x, y)^4$ l'expression générale d'une forme biquadratique, les deux fonctions

$$i = aa' - 4bb' + 3c^2, \quad j = aca' + 2bcb' - ab'^2 - a'b^2 - c^3 \;.$$

dont la découverte appartient à Mr. *Cayley*, sont les *invariants* fondamentaux de f. Elles jouissent de cette propriété, qu'en supposant:

$$(a, b, c, a', b', c' \widehat{)} (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^4 = (A, B, C, B', A' \widehat{)} (x, y)^4,$$

les fonctions semblables

$$I = AA' - 4BB' + 3C^2, \quad J = ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2 - C^3,$$

vérifieront les égalités

$$I = i(\alpha\delta - \beta\gamma)^4, \quad J = j(\alpha\delta - \beta\gamma)^6.$$

De plus, elles sont bien des invariants fondamentaux; car Mr. *Sylvester* a démontré que toute fonction rationnelle et entière de a, b, c, b', a', qui se reproduit, multipliée par une puissance du déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$, lorsqu'on y remplace a, b, c, b', a', par A, B, C, B', A', est nécessairement une fonction entière de i et j. Je pense pouvoir renvoyer pour les démonstrations de ces proposition importantes aux travaux des savants géomètres que je viens de citer, et arriver immédiatement à la notion des *covariants* de la forme *biquadratique*.

Et d'abord je rappellerai qu'on nomme *covariant* d'une forme de degré quelconque: $f = (a, b, c, \ldots c', b', a' \widehat{)} (x, y)^m$, toute autre forme $\varphi(a, b, c, \ldots; x, y)$ dont les coefficients sont fonctions rationnelles et entières de a, b, c, etc., et qui jouit de la propriété qu'exprime l'équation

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^K . \varphi(a, b, c, \ldots; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = \varphi(A, B, C, \ldots; x, y);$$

les quantités A, B, etc. étant toujours celles qui donnent:

$$(a, b, c, \ldots c', b', a' \widehat{)} (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^m = (A, B, C, \ldots \widehat{)} (x, y)^m.$$

Telle est par exemple, relativement à toute forme f, la forme

$$\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2-\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2};$$

comme l'a démontré sous un point de vue plus général Mr. *Hesse.* Dans la théorie spéciale des formes biquadratiques, le covariant ainsi obtenu joue un rôle important; nous le désignerons par g, en posant:

$$g=\tfrac{1}{16}\left(\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2-\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2}\right)$$
$$=(b^2-ac,\,bc-ab',\,3c^2-2bb'-aa',\,b'c-a'b,\,b'^2-a'c')\widehat{\;}(x,y)^4.$$

De f et g on tire la notion d'un nouveau covariant du 6ᵉ degré, que je définirai ainsi:

$$h=\tfrac{1}{8}\begin{vmatrix}\dfrac{df}{dx}, & \dfrac{df}{dy}\\[2mm] \dfrac{dg}{dx}, & \dfrac{dg}{dy}\end{vmatrix}.$$

En faisant:

$$h=(p,q,r,s,r',q',p')\widehat{\;}(x,y)^6,$$

on aura ces valeurs:

$$\begin{aligned}
p &= a^2b'-3abc+2b^3, & 6q &= +a^2a'+2abb'-9ac^2+6b^2c,\\
p' &= -a'^2b+3a'b'c-2b'^3, & 6q' &= -a'^2a-2a'b'b+9a'c^2-6b'^2c,
\end{aligned}$$
$$3r=+aba'-3acb'+2b^2b',$$
$$3r'=-a'b'a+3a'cb-2b'^2b,\qquad 2s=a'b^2-ab'^2.$$

Il existe entre $f, g, h,$ et les invariants $i, j,$ une relation remarquable et importante, savoir:

$$(A.)\qquad 4g^3-if^2g-jf^3=h^2.$$

Mr. *Cayley* qui m'a communiqué cette relation que j'avais aussi obtenue de mon côté, en a tiré une méthode ingénieuse et très originale pour la résolution de l'équation du 4$^{\text{me}}$ degré. Comme cette résolution est un point essentiel de la théorie algébrique des formes biquadratiques, je vais la présenter sous le point de vue qui m'est propre, et y rattacher la démonstration de l'équation $(A.)$.

II.

Résolution de l'équation du 4ᵉ degré.

Soit, en décomposant en les facteurs linéaires la forme proposée:

$$(a,b,c,b',a')\widehat{\;}(x,y)^4=a(x-\alpha y)(x-\beta y)(x-\gamma y)(x-\delta y).$$

La réduite du 3^e degré s'obtient comme on sait, en considérant la fonction résolvante

$$t = a(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$$

dont il faut calculer le carré. Or on peut mettre t^2 sous cette forme:

$$3t^2 = a^2\{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+(\gamma-\delta)^2\}$$
$$+4a^2\{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\},$$

d'où, en posant

$$\theta = \tfrac{1}{12}a\{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\},$$

et évaluant en fonction des coefficients, la somme des carrés des différences des racines:

$$t^2 = 16\{b^2-ac+a\theta\}.$$

Cette quantité θ que nous avons introduite, dépend, comme on le sait d'avance, d'une équation du 3^e degré, qui aurait pour racines:

$$(B.)\quad \begin{cases} \theta_1 = \tfrac{1}{12}a\{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\}, \\ \theta_2 = \tfrac{1}{12}a\{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)\}, \\ \theta_3 = \tfrac{1}{12}a\{(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)+(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\}. \end{cases}$$

Or cette équation s'obtient très facilement par la remarque suivante. Posons:

$$(a, b, c, b', a')\!\!\frown\!\!(mx+\mu y, nx+\nu y)^4 = (A, B, C, B', A')\!\!\frown\!\!(x, y)^4$$
$$= A(x-ay)(x-by)(x-cy)(x-dy),$$

on aura ces valeurs pour le coefficient A, et les racines de la transformée, savoir:

$$A = a(m-\alpha n)(m-\beta n)(m-\gamma n)(m-\delta n),$$

$$a = -\frac{\mu-\alpha\nu}{m-\alpha n}, \quad b = -\frac{\mu-\beta\nu}{m-\beta n}, \quad c = -\frac{\mu-\gamma\nu}{m-\gamma n}, \quad d = -\frac{\mu-\delta\nu}{m-\delta n},$$

d'où on conclura:

$$A(a-d)(b-c) = (m\nu-n\mu)^2.a(\alpha-\delta)(\beta-\gamma),$$
$$A(a-c)(b-d) = (m\nu-n\mu)^2.a(\beta-\gamma)(\beta-\delta),$$
$$A(a-b)(c-d) = (m\nu-n\mu)^2.a(\alpha-\beta)(\gamma-\delta).$$

Ces relations montrent que les quantités θ se réproduisent dans toutes les transformées, multipliées par le déterminant de la substitution; ainsi les coefficients de l'équation dont elles dépendent, sont des ***invariants*** de la forme proposée. Ces coefficients sont d'ailleurs des fonctions entières de a, b, c, b', a'; donc d'après la proposition de Mr. *Sylvester*, ils s'expriment à fonction entière des quantités i et j. L'équation cherchée est ainsi de la forme suivante:

$$\theta^3+\varrho i\theta+\sigma j = 0;$$

ϱ et σ étant numériques. En effet, le coefficient de θ^2 doit être nul, puisqu'il n'existe pas d'invariants de premier degré, et les deux autres ne peuvent être que proportionnels respectivement à i et j, qui sont les seuls invariants du second et du troisième degré. Pour trouver ϱ et σ, considérons un cas particulier, p. ex. celui de la forme $(1,0,-1,0,0\widehat{)}(x,y)^4$; on a alors: $i=3$, $j=1$; $\theta_1=-1$, $\theta_2=\frac{1}{2}$, $\theta_3=\frac{1}{2}$, et par suite l'identité: $(\theta-\frac{1}{2})^2(\theta+1)=\theta^3+3\varrho\theta+\sigma$, d'où: $\varrho=-\frac{1}{4}$, $\sigma=+\frac{1}{4}$. L'équation en θ est donc généralement

$$4\theta^3-i\theta+j = 0.$$

Le *discriminant* de la forme proposée se ramène immédiatement au discriminant de cette équation en θ, car on tire des relations (*B.*):

$$\theta_1-\theta_2=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\gamma)(\beta-\delta),\qquad \theta_1-\theta_3=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\theta)(\beta-\gamma),$$
$$\theta_2-\theta_3=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\beta)(\delta-\gamma),$$

donc:

$$(\theta_1-\theta_2)^2(\theta_1-\theta_3)^2(\theta_2-\theta_3)^2=\frac{a^6}{4^6}(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2$$
$$=\frac{1}{4^2}(i^3-27j^2).$$

Cette expression si importante, se présente ainsi immédiatement sous la forme remarquable que lui a donnée Mr. *Cayley*. Dans le cas où elle est *négative,* deux des racines de la forme biquadratique sont imaginaires, et les deux autres réelles. Mais si elle est *positive,* elles peuvent être toutes réelles, ou toutes imaginaires.

En général, le produit des carrés des différences des racines d'une équation du degré quelconque, est positif ou négatif suivant que le nombre des racines imaginaires de cette équation est $\equiv 0$ ou $\equiv 2$ Mod. 4. La condition nécessaire et suffisante pour que le premier cas ait lieu, consiste en ce que les trois valeurs distinctes du carré de la fonction résolvante, c. à d. les trois quantités $b^2-ac+a\theta_1$, $b^2-ac+a\theta_2$, $b^2-ac+a\theta_2$ soient positives. Or leur somme est $3(b^2-ac)$, la somme de leurs produits deux à deux est $3(b^2-ac)^2-\frac{1}{4}ia^2$, et nous prouverons plus loin que leur produit est un carré; donc pour qu'elles soient positives, il suffit d'écrire:

$$b^2-ac>0,\quad 12(b^2-ac)^2-ia^2>0.$$

L'on obtient ainsi sous la forme la plus simple, et indépendamment du théorème de Mr. *Sturm,* les conditions de réalité des racines de l'équation générale du 4^e degré.

III.

Relation entre les formes, f, g, h; et conséquences de cette relation dans la théorie des fonctions elliptiques.

L'équation remarquable qui existe entre la forme proposée f et ses deux covariants g et h, savoir:

$$(A.) \qquad 4g^3 - if^3 g - jf^3 = h^2,$$

peut être obtenue par plusieurs méthodes. Celle que nous employons la rattachera à ce fait bien connu, et qui nous reste à établir que le produit des trois valeurs distinctes du carré de la fonction résolvante, qui aura l'expression

$$4(b^2 - ac + a\theta_1)(b^2 - ac + a\theta_2)(b^2 - ac + a\theta_3) = 4(b^2 - ac)^3 - ia^2(b^2 - ac) - ja^3,$$

est un *carré parfait.*

Partons pour celà de l'identité suivante:

$$(a, b, c, b', a')\widehat{\ }(x - by, ay)^4$$
$$= (a, 0, -a(b^2 - ac), a(a^2b' - 3abc + 2b^3), ia^3 - 3a(b^2 - ac)^2)\widehat{\ }(x, y)^4,$$

où le second membre est une transformée par une substitution au déterminant a, de la forme proposée. Il en résulte pour l'invariant J de cette transformée, la valeur: $J = ja^6$. Or en calculant directement J, on trouve:

$$J = a^3\{4(b^2 - ac)^3 - ia^2(b^2 - ac) - (a^2b' - 3abc + 2b^3)^2\},$$

et en égalant cette expression à ja^6, il vient:

$$4(b^2 - ac)^3 - ia^2(b^2 - ac) - ja^3 = (a^2b' - 3abc + 2b^3)^2;$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

L'équation (A.) s'en déduit de la manière suivante. Posons

$$(a, b, c, b', a')\widehat{\ }(mx + \mu y, nx + \nu y)^4 = (A, B, C, B', A')\widehat{\ }(x, y)^4,$$

m et n étant des quantités arbitraires, et μ et ν étant telles que le déterminant de la substitution est $m\nu - n\mu = 1$. Relativement à la transformée ainsi obtenue, nous aurons:

$$4(B^2 - AC)^3 - iA^2(B^2 - AC) - jA^3 = (A^2B' - 3ABC + 2B^3)^2;$$

car les invariants i et j seront restés les mêmes. J'ajoute que les quantités A, $B^2 - AC$, $A^2B' - 3ABC + 2B^3$, deviendront respectivement: f, g, h, en y mettant m et n au lieu de x et y, de sorte que nous tomberons précisément sur la relation à démontrer.

Soit en effet $\varphi(a, b, c, b', a'; x, y)$ l'une quelconque des formes f, g, h; nous aurons, comme il a été dit (§. I.), la relation caractéristique pour les covariants:

$$(m\nu - n\mu)^K \varphi(a, b, c, b', a'; mx + \mu y, nx + \nu y) = \varphi(A, B, C, B', A'; x, y),$$

ou seulement:

$$\varphi(a, b, c, b', a', mx + \mu y, nx + \nu y) = \varphi(A, B, C, B', A'; x, y),$$

puisque le déterminant de la substitution est *l'unité*. Faisons dans cette identité $x = 1$, $y = 0$, le second membre se réduira au coefficient de la puissance la plus élevée de x, c. à d. en supposant successivement $\varphi = f, g, h$, aux quantités A, $B^2 - AC$, $A^2B' - 3ABC + 2B^3$. Or dans les mêmes circonstances le premier membre représente les formes f, g, h, l'orsqu'on y met les quantités arbitraires m et n, au lieu des indéterminées x et y; ainsi que nous voulions le démontrer.

La relation

$$4g^3 - if^2g - jf^3 = h^2$$

trouve une application immédiate à la théorie des *fonctions elliptiques*. Mettons la sous la forme:

$$\sqrt{\left[4\left(\frac{g}{f}\right)^3 - i\left(\frac{g}{f}\right) - j\right]} = \frac{h}{f^2}\sqrt{f},$$

en divisant par f^3 et extrayant la racine carrée des deux membres. Considérons ensuite, l'indéterminée x comme une variable indépendante, et faisons $y = 1$; il suit du principe algébrique de *Jacobi* pour la transformation des intégrales elliptiques que la substitution rationnelle

$$z = \frac{g}{f} = \frac{(b^2 - ac, bc - ab', 3c^2 - 2bb' - aa', b'c - a'b, b'^2 - a'c \widehat{)} (x, 1)^4}{(a, b, c, b', a' \widehat{)} (x, 1)^4}$$

donnera:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(4z^3 - iz - j)}} = M \int \frac{dx}{\sqrt{((a, b, c, b', a' \widehat{)} (x, 1)^4)}};$$

M étant une constante. Mettons encore $z \cdot \frac{j}{i}$ au lieu de z, l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{(4z^3 - iz - j)}}$ sera ramenée à la suivante: $\int \frac{dz}{\sqrt{(\varrho z^3 - z - 1)}}$; ϱ désignant la constante $\frac{4j^2}{i^3}$. Ainsi nous avons la réduction de l'intégrale elliptique la plus générale à une autre plus simple où n'entre qu'un seul *paramètre*. Et l'on voit immédiatement que toutes les intégrales liées à la proposée $\int \frac{dx}{\sqrt{((a, b, c, b', a' \widehat{)} (x, 1)^4)}}$, par une substitution linéaire quelconque: $x = \frac{mX + \mu}{nX + \nu}$, conduiront absolument à la même intégrale réduite, le rapport $\frac{j^2}{i^3}$ conservant la même valeur, dans toutes ces transformées.

Seconde partie.

Théorie arithmétique des formes biquadratiques.

I.

De la forme quadratique sur laquelle repose la théorie de la réduction.

Je considérerai spécialement dans ce qui va suivre les formes quadratiques *réelles*, et je me propose d'exposer à leur égard, l'application de la méthode générale que j'ai donnée dans mon mémoire sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. Cette application aurait dû trouver immédiatement place à la suite de ce mémoire, mais alors je n'avais pu encore réussir à lever plusieurs difficultés dont la solution sera maintenant très facile, en se fondant sur les résultats que j'ai donnés ici dans la première partie. Dans une autre occasion j'essayerai de traiter aussi les formes *biquadratiques*, qui ont des racines *imaginaires*, et qui me semblent devoir donner lieu à une étude intéressante.

Soit comme précédemment:

$$f = (a, b, c, b', a' \widehat{)} (x, y)^4 = a(x-\alpha y)(x-\beta y)(x-\gamma y)(x-\delta y);$$

les racines α, β, γ, δ, étant *réelles*. Le principe arithmétique de la théorie de la réduction, repose sur la considération de la forme quadratique

$$\varphi = t(x-\alpha y)^2 + t'(x-\beta y)^2 + t''(x-\gamma y)^2 + t'''(x-\delta y)^2,$$

où les quantités t, t', t'', t''', sont des variables *réelles* et *positives*. Nommons Δ *l'invariant* de cette forme, et S la substitution à coefficients entiers, propre à la réduire pour un système donné de valeurs des quantités t. En effectuant dans f, cette substitution S, on aura une transformée:

$$F = (A, B, C, B', A' \widehat{)} (x, y)^4,$$

dont les coefficients vérifieront les conditions suivantes:

$$(a.) \qquad AA' < \frac{1}{144} \cdot \frac{a^2 \Delta^2}{t t' t'' t'''}, \quad BB' < \frac{1}{144} \cdot \frac{a^2 \Delta^2}{t t' t'' t'''}, \quad C^2 < \frac{1}{144} \cdot \frac{a^2 \Delta^2}{t t' t'' t'''},$$

qu'on doit considérer en valeur absolue. Ces conditions que j'ai données dans le mémoire précité (§. V. 4°.), conduisent à considérer attentivement la fonction

$$T = \frac{a^2 \Delta^2}{t\,t'\,t''\,t'''},$$

et à rechercher les valeurs réelles et positives des variables t, pour lesquelles elle prend la plus petite valeur possible. J'ai établi que ce minimum avait une valeur constante dans toutes les transformées équivalentes à la forme proposée, ce qui m'a permis de la prendre comme définition de l'invariant de la forme biquadratique. J'ai démontré aussi que φ devenait un covariant de f, lorsqu'on y remplacerait t, t', etc. par les valeurs speciales qui fournissent le minimum de T. Ce sont ces diverses conséquences de ma méthode générale, que je vais développer seulement pour le cas particulier des formes biquadratiques. Je les ferai précéder de ces deux remarques.

Premièrement, aux inégalités

$$AA' < \tfrac{1}{144} T, \quad BB' < \tfrac{1}{144} T, \quad C^2 < \tfrac{1}{144} T$$

on peut joindre les suivantes:

$$AB'^2 < \frac{1}{12^3} T^{\frac{3}{2}}, \quad A'B^2 < \frac{1}{12^3} T^{\frac{3}{2}},$$

qui se tirent de la même analyse, afin, par exemple, d'obtenir une limite pour le coefficient B, si l'on suppose $B' = 0$; l'inégalité $BB' < \tfrac{1}{144} T$ ne pouvant plus alors être employée. On généralisera très facilement cette remarque, qui est essentielle pour prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini de formes F, dont les coefficients vérifient un pareil système d'inégalités. Dans le cas présent, il n'y a à faire d'autre restriction, que de supposer qu'on n'ait jamais simultanément $A = 0$, $B = 0$, ou: $A' = 0$, $B' = 0$, c. à d. que la forme quadratique n'a pas de racines *doubles;* comme on le voit aisément. Il est d'ailleurs inutile d'exclure le cas des racines commensurables, qui pourrait donner A ou $A' = 0$.

La *seconde* observation qui me reste à faire est relative à cette opération arithmétique de la réduction de la forme quadratique φ, pour tous les systèmes de valeurs des variables t, t', t'', t''', qui joue un rôle essentiel dans ma méthode. Divisons cette forme par le coefficient du premier terme, de sorte qu'elle devienne: $x^2 - 2\xi xy + \eta y^2$, en posant:

$$\xi = \frac{\alpha t + \beta t' + \gamma t'' + \delta t'''}{t + t' + t'' + t'''}, \quad \eta = \frac{\alpha^2 t + \beta^2 t' + \gamma^2 t'' + \delta^2 t'''}{t + t' + t'' + t'''}.$$

Au lieu des quantités t, on pourra faire varier ξ et η; alors, ce qui caractérisera, pour une forme donnée, l'opération dont nous nous occupons, est l'étendue des valeurs que pourront recevoir ces nouvelles variables lorsque les quantités passeront par tous les états de grandeur. Or la forme analytique de ξ et η, rappelle immédiatement les expressions connues pour les coordonnées du point d'application de la résultante d'un système de forces parallèles. Considérons donc sur un plan, quatre points A, B, C, D, rapportés à des axes rectangulaires, et ayant pour abscisses α, β, γ, δ et pour ordonnées α^2, β^2, γ^2, δ^2. Le quadrilatère $ABCD$ sera inscriptible dans une *parabole*, comme on le voit aisément, et par suite sera convexe. Si donc on applique aux divers sommets A, B, C, D, des forces parallèles et de même sens, respectivement représentées par t, t', t'', t''', le point d'application de leur résultante, sera situé dans son intérieur, et y pourra occuper une position quelconque, suivant les valeurs des composantes. Les quantités ξ et η, représentent donc les coordonnées d'un tel point; ce qui donne une image très nette des divers états de grandeur par lesquels elles devront passer, pour correspondre à toutes les valeurs possibles que doivent prendre les quantités t, t', t'', t''', dans la forme φ.

II.

Détermination du minimum de la fonction T.

On trouve aisément pour l'invariant de la forme quadratique φ, l'expression

$$\begin{aligned}\varDelta = tt'(\alpha-\beta)^2 + tt''(\alpha-\gamma)^2 + tt'''(\alpha-\delta)^2 + t't''(\beta-\gamma)^2 + t't'''(\beta-\delta)^2 \\ + t''t'''(\gamma-\delta)^2.\end{aligned}$$

Cela posé, formons les équations $\dfrac{dT}{dt}=0$, $\dfrac{dT}{dt'}=0$, $\dfrac{dT}{dt''}=0$, $\dfrac{dT}{dt'''}=0$; on verra qu'elles se réduisent aux suivantes:

$$2t\frac{d\varDelta}{dt}-\varDelta=0,\quad 2t'\frac{d\varDelta}{dt'}-\varDelta=0,\quad 2t''\frac{d\varDelta}{dt''}-\varDelta=0,\quad 2t'''\frac{d\varDelta}{dt'''}-\varDelta=0.$$

Maintenant prenons la somme de deux d'entre elles, et retranchons en la somme des deux autres. Il résultera de là trois combinaisons linéaires distinctes, que voici:

$$tt'(\alpha-\beta)^2=t''t'''(\gamma-\delta)^2,\quad tt''(\alpha-\gamma)^2=t't'''(\beta-\delta)^2,\quad tt'''(\alpha-\delta)^2=t't''(\beta-\gamma)^2.$$

Avant d'en écrire les diverses solutions, faisons cette substitution:

$$t=\frac{\tau}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)},\quad t'=\frac{-\tau'}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)},\quad t''=\frac{\tau''}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)},$$

$$t'''=\frac{-\tau'''}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)},$$

il viendra plus simplement:

$$\tau\tau'=\tau''\tau''',\quad \tau\tau''=\tau'\tau''',\quad \tau\tau'''=\tau'\tau''.$$

Cela posé, comme nous avons seulement à déterminer les rapports des inconnues, prenons par exemple $\tau=1$. On trouvera ces quatre systèmes de valeurs:

$$1^{\circ}.\ \begin{cases}\tau\ =+1,\\ \tau'\ =+1,\\ \tau''\ =+1,\\ \tau'''=+1,\end{cases}\quad 2^{\circ}.\ \begin{cases}\tau\ =+1,\\ \tau'\ =-1,\\ \tau''\ =+1,\\ \tau'''=-1,\end{cases}\quad 3^{\circ}.\ \begin{cases}\tau\ =+1,\\ \tau'\ =+1,\\ \tau''\ =-1,\\ \tau'''=-1,\end{cases}\quad 4^{\circ}.\ \begin{cases}\tau\ =+1,\\ \tau'\ =-1,\\ \tau''\ =-1,\\ \tau'''=+1.\end{cases}$$

Or il est essentiel de rechercher celui qui donne pour t, t', t'', t''' des quantités *positives,* comme l'exige la question. Supposons à cet effet, que α, β, γ, δ représentent les racines de la forme biquadratique, rangées par ordre croissant de grandeur. Il est aisé de voir que le premier système conduit seul à des solutions *positives* et que les trois autres doivent être écartés. Effectivement, si l'on fait pour un instant:

$$\chi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta),$$

les quantités t, auront alors pour valeurs:

$$t=+\frac{1}{\chi'(\alpha)},\quad t'=-\frac{1}{\chi'(\beta)},\quad t''=+\frac{1}{\chi'(\gamma)},\quad t'''=-\frac{1}{\chi'(\delta)}.$$

et l'on sait bien qu'on obtient des résultats alternativement positifs et négatifs, en substituant dans la fonction dérivée la série constante des racines. Nous sommes donc conduit à cette expression remarquable de la forme quadratique φ, que nous écrivons en introduisant le facteur $\frac{1}{a}$, savoir:

$$\varphi = \frac{1}{a}\left\{\frac{(x-\alpha y)^2}{\chi'(\alpha)}-\frac{(x-\beta y)^2}{\chi'(\beta)}+\frac{(x-\gamma y)^2}{\chi'(\gamma)}-\frac{(x-\delta y)^2}{\chi'(\delta)}\right\},$$

et il nous reste à former son invariant $\varDelta$, afin d'obtenir la valeur minimum de la fonction T.

Les quantités ξ et η, dont il a été question précédemment, représentent pour cette forme φ, les coordonnées du point d'intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$.

A cet effet, nous observerons qu'on a par une formule connue:

$$\frac{(x-\alpha y)^2}{\chi'(\alpha)}+\frac{(x-\beta y)^2}{\chi'(\beta)}+\frac{(x-\gamma y)^2}{\chi'(\gamma)}+\frac{(x-\delta y)^2}{\chi'(\delta)}=0,$$

d'où résulte cette autre expression de φ:

$$\varphi=\frac{2}{a}\left\{\frac{(x-\alpha y)^2}{\chi'(\alpha)}+\frac{(x-\gamma y)^2}{\chi'(\gamma)}\right\}.$$

Or on en tire sans difficulté:

$$\Delta=\frac{4}{a^2}\frac{(\alpha-\gamma)^2}{\chi'(\alpha)\chi'(\gamma)}.$$

On a d'ailleurs:

$$t\,t'\,t''\,t'''=\frac{1}{a^4\chi'(\alpha)\chi'(\beta)\chi'(\gamma)\chi'(\delta)},$$

donc:

$$T=\frac{a^2\Delta^2}{t\,t'\,t''\,t'''}=16a^2(\alpha-\gamma)^4\cdot\frac{\chi'(\beta)\chi'(\delta)}{\chi'(\alpha)\chi'(\gamma)},$$

et en supprimant les facteurs communs: $T=16a^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2$.

Nous retrouvons ainsi les invariants fondamentaux des formes biquadratiques, comme coefficients de l'équation du troisième degré qui déterminerai T en fonction de a, b, c, b', a'. Au fond c'est l'équation en θ, que nous avons trouvée dans la première partie, en traitant la résolution algébrique de l'équation du 4^e degré, qui se présente de nouveau. Nous avons en effet trouvé: $\theta_1-\theta_2=\frac{1}{4}a(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$, donc: $T=16^2(\theta_1-\theta_2)^2$; ce qui peut s'exprimer en fonction entière de la troisième racine θ_3. Les considérations suivantes vont nous conduire aux covariants g et h, de sorte que le système complet des éléments analytiques de la théorie des formes biquadratiques, résultera naturellement des principes sur lesquels nous avons fondé la théorie arithmétique de la réduction.

III.

Expression par les coefficients de f, de la forme quadratique φ qui correspond au minimum de T.

Nous allons d'abord vérifier à posteriori que la forme

$$\varphi=\frac{1}{a}\left\{\frac{(x-\alpha y)^2}{\chi'(\alpha)}-\frac{(x-\beta y)^2}{\chi'(\beta)}+\frac{(x-\gamma y)^2}{\chi'(\gamma)}-\frac{(x-\delta y)^2}{\chi'(\delta)}\right\}$$

qui correspond ainsi au minimum de T est un ***covariant*** de f; comme nous le savons par la théorie générale. Soit à cet effet:

$$(a, b, c, b', a')\!\frown\!(mx+\mu y, nx+\nu y)^4$$
$$=(A, B, C, B', A')\!\frown\!(x, y)^4=A(x-\mathfrak{a}y)(x-\mathfrak{b}y)(x-\mathfrak{c}y)(x-\mathfrak{d}y)$$

et Φ, la même forme que φ, par rapport à la transformée $(A, B, C, B', A')\widehat{\ }(x,y)^4$. En posant:

$$X(x) = (x-\mathfrak{a})(x-\mathfrak{b})(x-\mathfrak{c})(x-\mathfrak{d})$$

on aura:

$$\Phi = \frac{1}{A}\left\{\frac{(x-\mathfrak{a}y)^2}{X'(\mathfrak{a})} - \frac{(x-\mathfrak{b}y)^2}{X'(\mathfrak{b})} + \frac{(x-\mathfrak{c}y)^2}{X'(\mathfrak{c})} - \frac{(x-\mathfrak{d}y)^2}{X'(\mathfrak{d})}\right\}.$$

Or au moyen des valeurs données (1^{re} partie II.) pour A, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, on trouvera immédiatement

$$\begin{aligned}
mx+\mu y-\alpha(nx+\nu y) &= (m-\alpha n)(x-\mathfrak{a}y),\\
mx+\mu y-\beta(nx+\nu y) &= (m-\beta n)(x-\mathfrak{b}y),\\
mx+\mu y-\gamma(nx+\nu y) &= (m-\gamma n)(x-\mathfrak{c}y),\\
mx+\mu y-\delta(nx+\nu y) &= (m-\delta n)(x-\mathfrak{d}y),
\end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned}
\frac{(m-\alpha n)^2}{a\chi'(\alpha)} &= \frac{1}{AX'(\mathfrak{a})}\cdot\frac{1}{(m\nu-n\mu)^3},\\
\frac{(m-\beta n)^2}{a\chi'(\beta)} &= \frac{1}{AX'(\mathfrak{b})}\cdot\frac{1}{(m\nu-n\mu)^3},\\
\frac{(m-\gamma n)^2}{a\chi'(\gamma)} &= \frac{1}{AX'(\mathfrak{c})}\cdot\frac{1}{(m\nu-n\mu)^3},\\
\frac{(m-\delta n)^2}{a\chi'(\delta)} &= \frac{1}{AX'(\mathfrak{d})}\cdot\frac{1}{(m\nu-n\mu)^3};
\end{aligned}$$

d'où résulte qu'on obtient $\frac{1}{(m\nu-n\mu)^3}\Phi$, en mettant dans φ, $mx+\mu y$, et $nx+\nu y$, au lieu de x et y.

Cela posé, pour évaluer φ au moyen des coefficients de f, nous observerons que la fonction résolvante

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta$$

varie ou conserve sa valeur pour les mêmes permutations des racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, que la forme φ, de sorte que suivant l'expression de *Lagrange* on a ainsi deux fonctions semblables de ces racines. Or nous avons précédemment obtenu (1^{re} partie II.) le carré de la fonction résolvante en fonction de la quantité θ, d'où il suit que le carré de φ s'exprimera rationnellement par les coefficients de la forme proposée f, et cette même quantité θ. Mais il importe de fixer avec précision celle des trois quantités que nous avons désignées par θ_1, θ_2, θ_3, qui entrera ainsi dans l'expression de φ^2. Et d'abord les trois valeurs $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$, $(\alpha+\delta-\gamma-\beta)^2$, $(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2$, s'expriment respectivement par θ_1, θ_2, θ_3; c'est donc la racine θ_3 que nous aurons à employer, et qu'il faut essayer de caractériser, de manière à la faire reconnaître sans ambiguité.

Rappelons à cet effet les relations:

$$\theta_1-\theta_2=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\gamma)(\beta-\delta),\qquad \theta_1-\theta_3=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\delta)(\beta-\gamma),$$
$$\theta_2-\theta_3=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\beta)(\delta-\gamma).$$

Comme nous avons supposé les racines α, β, γ, δ rangées par ordre croissant de grandeur, on voit qu'on aura:

$$\theta_1-\theta_2>0,\qquad \theta_1-\theta_3>0,\qquad \theta_2-\theta_3<0,$$

si le coefficient a est *positif*, et s'il est *négatif*:

$$\theta_1-\theta_2<0,\qquad \theta_1-\theta_3<0,\qquad \theta_2-\theta_3>0;$$

donc dans les deux cas, θ_3 est la racine moyenne, comprise entre les deux autres θ_1 et θ_2.

Ce point important établi, voici comment on obtiendra φ^2. De la seconde des expressions précédemment données, savoir:

$$\varphi=\frac{2}{a}\left\{\frac{(x-\alpha y)^2}{\chi'(\alpha)}+\frac{(x-\gamma y)^2}{\chi'(\gamma)}\right\},$$

on concluera aisément:

$$\varphi=\frac{2}{a^2(\alpha-\beta)(\delta-\gamma).(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}\cdot\big(a(\alpha-\beta+\gamma-\delta),\ a(\beta\delta-\alpha\gamma),$$
$$a(\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta-\alpha\beta\delta-\beta\gamma\delta)\big)(x,y)^2.$$

Le facteur irrationnel $\frac{2}{a^2(\alpha-\beta)(\delta-\gamma).(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}$, est un ***invariant***, comme égal à $\frac{1}{8(\theta_1-\theta_3)(\theta_2-\theta_3)}$; ainsi la forme plus simple

$$\psi=\big(a(\alpha-\beta+\gamma-\delta),\ a(\beta\delta-\alpha\gamma),\ a(\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta-\alpha\beta\delta-\beta\gamma\delta)\big)(x,y)^2$$

sera un ***covariant*** de f, aussi bien que φ. Or le carré de son premier terme s'obtient de suite par la formule

$$a^2(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2=16(b^2-ac+a\theta_3).$$

On en conclut le résultat suivant, auquel nous voulions parvenir, savoir:

$$\psi^2=16(g+\theta_3 f),$$

f étant la forme proposée, et g le ***covariant*** dont nous avons donné la définition au commencement de ce mémoire. En effet, on peut dire en général, que deux covariants d'une même forme, qui ont leurs premiers termes égaux, sont par cela seul, nécessairement identiques. C'est une conséquence immédiate de ce que nous avons établi (1^{re} partie III.), en déduisant les fonctions f, g et h, seulement de leurs premiers termes a, b^2-ac, et $a^2b'-3abc+2b^3$. Nous sommes ainsi ramenés par une voie nouvelle à la considération du covariant g, et aussi à la relation importante:

$$4g^3-if^2g-jf^3=4(g+\theta_1 f)(g+\theta_2 f)(g+\theta_3 f)=h^2.$$

Chacun des facteurs $g+\theta_1 f$, $g+\theta_2 f$, $g+\theta_3 f$, se trouve être en effet, le carré d'une forme quadratique analogue à ψ. (Cette propriété a été aussi obtenue par Mr. *Cayley*, qui m'en a donné recemment communication; elle est le point de départ de la méthode de résolution de l'équation générale du 4^e degré, dont j'ai parlé au commencement de ce mémoire.) Ainsi leur produit est bien un carré parfait. En même temps, nous obtenons la décomposition en trois facteurs du second degré, du covariant h, d'où l'on peut conclure la résolution de l'équation $h=0$.

IV.

Des questions arithmétiques dont les résultats précédents donnent la solution.

Étant proposées deux formes biquadratiques f et f', on pourra reconnaître si elles sont équivalents, ou non, en calculant leurs transformées réduites F et F'. Pour obtenir ces transformées réduites, on formera l'équation en θ, qui sera la même pour f et f'; car on doit d'abord supposer à ces deux formes les mêmes *invariants*. Cela fait, on choisira la racine moyenne de cette équation en θ, et on en déduira les deux formes quadratiques ψ et ψ', en extrayant la racine carrée des fonctions $f+\theta g$, $f'+\theta g'$.

La réduite F s'obtiendra en effectuant dans f, la substitution à coefficient entiers et au déterminant *un*, propre à réduire ψ, et la réduite F', en effectuant dans f', la substitution propre à réduire ψ'. Maintenant il suit de notre théorie la condition nécessaire et suffisante pour que f et f' soient *équivalentes* et que F et F' soient *identiques*.

En second lieu, si l'on propose de calculer le système complet des formes réduites qui ont les mêmes *invariants* i et j, on déduit de la valeur minimum de T, ci-dessus obtenue, savoir: $T=16^2.(\theta_1-\theta_2)^2$, où θ_1 et θ_2 désignent la plus grande et la plus petite racine de l'équation en θ, la règle suivante:

On calculera tous les systèmes de nombres entiers A, B, C, B', A', qui vérifient en valeur absolue les conditions:

$$AA' < (\tfrac{4}{3})^2(\theta_1 - \theta_2)^2, \quad BB' < (\tfrac{4}{3})^2(\theta_1 - \theta_2)^2, \quad C' < \tfrac{4}{3}(\theta_1 - \theta_2),$$
$$AB'^2 < (\tfrac{4}{3})^3(\theta_1 - \theta_2)^3, \quad A'B^2 < (\tfrac{4}{3})^3(\theta_1 - \theta_2).$$

Ces systèmes, en nombre évidemment fini, donneront autant de formes F, F', F'', etc. On choisira les réduites destinées à représenter définitivement les classes distinctes de mêmes invariants, en calculant les formes quadratiques $\sqrt{(F+\theta_3 G)}$, $\sqrt{(F'+\theta_3 G')}$, etc. et conservant seulement celles des formes F, F', etc. auxquelles correspondront ainsi des formes quadratiques réduites, où le coefficient moyen ne surpasse pas celui de x^2, qui lui même ne doit pas surpasser celui de y^2.

Dans une autre occasion, j'espère pouvoir présenter des applications numériques de cette théorie; je me bornerai maintenant à remarquer cette circonstance que pour les formes quadratiques à facteurs réelles, l'invariant j est essentiellement limité par la valeur donnée de i. Effectivement, comme le discriminant $i^3 - 27j^2$ doit être positif, il faut qu'on ait $j^2 < \frac{1}{27}i^3$; on peut donc dire que toutes les formes biquadratiques à racines réelles $(a, b, c, b', a')\widehat{\ }(x, y)^4$, pour lesquelles la fonction $aa' - 4bb' + 3c^2$ a une valeur donnée, sont réductibles à un nombre fini de classes distinctes.

Paris, Juillet 1854.