Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen.

Von Felix Klein in München.

(Mit einer lithogr. Tafel.)

Im Verfolg meiner Untersuchungen über die Transformation der elliptischen Functionen behandele ich im Nachstehenden die Transformation *elfter* Ordnung. Es ist dabei mein besonderes Ziel gewesen, die Gleichung *elften* Grades, welche in diesem Falle auftritt, in einfachster Form explicite herzustellen. Im XIV^ten Bande dieser Annalen, p. 423—424, habe ich bereits gezeigt, dass man dieser Gleichung folgende Gestalt geben kann:

$$J = F(z),$$

wo $F(z)$ eine *ganze* Function elften Grades der Unbekannten z mit nur numerischen Coefficienten ist, die einen cubischen Factor dreifach enthält, während $(F(z) - 1)$ einen biquadratischen Doppelfactor besitzt. Aber zugleich bemerkte ich, dass diese Angaben noch nicht zur vollen Bestimmung der Function F ausreichen. Ich combinire daher mit den damaligen Betrachtungen nunmehr ein im XV^ten Bande pag. 277 für einen beliebigen Transformationsgrad ausgesprochenes Resultat. *Dasselbe lehrt bei* $\frac{n-1}{2}$ *Variablen* y *ein System von Collineationen kennen, welches mit der Gruppe der Modulargleichung isomorph ist.* Dementsprechend giebt es ein „Problem der y", bei uns vom 660^ten Grade, und eine geeignete Specialisirung desselben liefert zunächst in übersichtlichster Weise die Galois'sche Resolvente 660^ten Grades der Modulargleichung, dann weiter die gewollte Gleichung elften Grades, und zwar in zwei Formen, von denen jede ihre Vorzüge hat und deren eine eben jene $J = F(z)$ ist. Ich habe in § 10. die so gefundenen Resultate zusammengestellt. Die folgenden Paragraphen vermitteln sodann den Uebergang zu der einfachen Multiplicatorgleichung *zwölften* Grades, die ich Bd. XV, pag. 88, angab, und liefern so die Möglichkeit, die neuen Gleichungen elften und 660^ten Grades auf transcendentem Wege zu lösen.

Die hiermit aufgezählten Resultate habe ich bereits, doch ohne Beweis, in zwei an Herrn Brioschi gerichteten Briefen vom 9. April und 11. Juni 1879, von denen der eine der *Accademia dei Lincei*, der andere dem *Istituto Lombardo* vorgelegt wurde, veröffentlicht; andererseits habe ich die ganze Entwickelung, wie ich sie hier gebe, im Laufe des verflossenen Sommersemesters in einer Vorlesung über algebraische Gleichungen zum Vortrag gebracht.

§ 1.

Ueber gewisse elfblättrige Riemann'sche Flächen*).

Die Wurzel z der Gleichung

$$J = F(z), \tag{1}$$

von der soeben die Rede war, ist, wie ich l. c. zeigte, so in Bezug auf J verzweigt, dass bei $J = \infty$ sämmtliche elf Blätter im Cyklus zusammenhängen, bei $J = 0$ dreimal drei, bei $J = 1$ viermal zwei. Nun behauptete ich ebendort, *dass es nicht weniger als zehn wesentlich verschiedene Riemann'sche Flächen giebt, welche dieselbe Eigenschaft besitzen* (von denen aber nur zwei bei der Transformationstheorie in Betracht kommen). Es ist heute meine nächste Aufgabe, diese Behauptung auf dem damals bereits angedeuteten, rein geometrischen Wege zu beweisen.

Die elf Blätter der Riemann'schen Fläche will ich vorab, wie ich es früher that, der Anschaulichkeit halber zur Hälfte schraffiren, nämlich soweit sie die positive Halbebene J überdecken. Sodann zerschneide man die Blätter sämmtlich längs desjenigen Stückes der reellen Axe J, welches im Endlichen von $J = 0$ bis $J = 1$ reicht. Unsere Fläche geht dann, wie aus der vorausgesetzten Multiplicität der Verzweigungspunkte folgt, in eine einfach zusammenhängende, einfach berandete Fläche über, deren Blätter nach wie vor bei $J = \infty$ im Cyklus verbunden sind. Offenbar kann man dieselbe durch stetige Deformation in das Innere eines Kreises ausbreiten, das von einem beliebigen seiner Punkte aus in 22 abwechselnd schraffirte und nicht schraffirte Sectoren zerlegt ist. Will man die Punkte $J = 0$ als Ecken gestalten und die zwischen ihnen befindlichen Stücke der Kreisperipherie geradlinig zeichnen, so hat man das Elfeck der Figur (8) auf der meiner früheren Arbeit (Bd. XIV) beigegebenen Tafel.

Die so hergestellte Figur modificire ich nun mit Rücksicht auf den speciellen hier vorliegenden Zweck in der Art, wie es Figur a auf der diesesmal beigefügten Tafel versinnlichen soll. Statt das *Innere*

*) Dieser Paragraph knüpft unmittelbar an die schon soeben citirte Arbeit an: *Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen*, Ann. XIV, p. 417—427.

des Elfecks als Abbildung der zerschnittenen Fläche zu betrachten, wähle ich das *Aeussere* desselben und ersetze die früher im Mittelpunkte zusammenlaufenden 22 Halbdiagonalen durch ebensoviele ins Unendliche auslaufende gerade Linien. Ausserdem habe ich zur Bezeichnung der verschiedenen Blätter in die nicht schraffirten Felder die Ziffern $1, 2, \cdots, 11$ hineingesetzt.

Will man nun wissen, wie viele verschiedene elfblättrige Flächen es giebt, welche die von uns verlangte Lage und Multiplicität der Verzweigungspunkte besitzen, so ist die Frage augenscheinlich die (Annalen XIV, pag. 424): *Auf wie viele Weisen ist es möglich, die 22 Halbkanten der in Figur a vorhandenen inneren Begränzung derart zu einem aus* 11 *Stücken bestehenden, doppelt überdeckten Linienzuge zusammenzubiegen, dass von den* 11 *Punkten* $J=0$ *dreimal drei und von den* 11 *Punkten* $J=1$ *viermal zwei zusammenkommen?* — Die Figur b (die wohl ohne besondere Erläuterung verständlich ist) soll an einem Beispiele erläutern, wie dieses Zusammenbiegen gemeint ist.

Die so formulirte Frage wird durch die Schemata I, $\cdots$, VI (auf der beigegebenen Tafel) beantwortet. Dieselben sollen nur die Gestalt des elfgliedrigen Linienzuges in jedem Falle angeben. Die mit kleinen Kreisen bezeichneten Punkte entsprechen allemal $J=0$, die durch gerade Striche markirten $J=1$. Das Schema V bezieht sich auf den in Figur b dargestellten Fall; die Schemata I sind, meinen früheren Erläuterungen zufolge, die einzigen, welche auf die aus der Transformationstheorie hervorgehenden Gleichungen elften Grades passen. —

Es giebt, diesen Schematen nach, in der That *zehn* Möglichkeiten der Zusammenbiegung. Dass es auch nicht mehr giebt, ist ebenso evident; denn offenbar gelingt es nicht, noch andere elfgliedrige Linienzüge der von uns gewünschten Art herzustellen. — Somit ist der zu Eingang des Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen.

§ 2.

Gruppe der Monodromie.

Es wird sich nunmehr darum handeln, unter diesen zehn Fällen diejenigen beiden, welche allein für die Transformationstheorie Bedeutung haben, durch ein einfaches Kriterium zu kennzeichnen. Ich wähle als solches die *Gruppe der Monodromie**). Wenn man J in seiner Ebene beliebige geschlossene Wege beschreiben lässt, so werden, wie man weiss, in den beiden in Betracht kommenden Fällen die 11 Wurzeln der Gleichung $J=F(z)$ nur auf 660 Weisen vertauscht, und diese 660 Vertauschungen bilden die bekannte Gruppe, welche Galois zu-

*) Hermite in den Comptes Rendus von 1851.

erst auffand und über die Betti*) die ersten ausführlichen Untersuchungen veröffentlichte. Diese Gruppe enthält nur solche Vertauschungen, deren Periode 1, 2, 3, 5, 6, 11 ist; und diesen Umstand will ich hier dazu benutzen, um zu zeigen, dass die Gruppe der Monodromie in den acht für uns unbrauchbaren Fällen eine andere ist, *dass also die beiden in Betracht kommenden Flächen durch ihre Verzweigungspunkte und die Gruppe der Monodromie zusammen völlig charakterisirt sind.*

Der betr. Nachweis stellt sich in sämmtlichen Fällen durchaus analog. Ich erläutere daher nur den Fall der Figur b (Schema V). Man lasse J in seiner Ebene einmal den Unendlichkeitspunkt umkreisen, eine Operation, die ich S nennen will. Dann gehen (wie die Figur aufweist) die Wurzeln

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$$

bei richtig gewähltem Bewegungssinne in folgende über:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 1.$$

Andererseits lasse man J den Punkt $J = 1$ umkreisen, eine Operation, die T heissen soll. So wird aus

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,$$

wie wieder die Figur zeigt, resp.

$$2,\ 1,\ 10,\ 4,\ 9,\ 7,\ 6,\ 8,\ 5,\ 3,\ 11.$$

Jetzt mache man zuerst die Operation T, dann dreimal die Operation S. So entsteht aus

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,$$

bez.

$$5,\ 4,\ 2,\ 7,\ 1,\ 10,\ 9,\ 11,\ 8,\ 6,\ 3;$$

die Operation TS^3 vertauscht also folgende Wurzeln cyklisch:

$$(1,\ 5)\ (2,\ 4,\ 7,\ 9,\ 8,\ 11,\ 3)\ (6,\ 10).$$

Diese Cyklen enthalten bez. 2 und 7 Buchstaben; die Periode von TS^3 ist also 14, und die Gruppe der Monodromie von der Gruppe der 660 Substitutionen verschieden, was zu beweisen war**).

§ 3.

Die Gruppe der 660 y-Substitutionen.

Den soeben bewiesenen Satz benutze ich jetzt in der Art, dass ich mich fortan mit einem Probleme beschäftige, welches jedenfalls die richtige Gruppe von 660 Vertauschungen besitzt; *gelingt es mir dann, im Verlaufe der Untersuchung auf eine Gleichung $J = F(z)$ zu kommen, wo $F(z)$ einen cubischen Factor cubisch und $(F(z) - 1)$ einen*

*) Annali di Scienze matematiche etc. di Tortolini, t. IV (1853).

**) Auch in den anderen Fällen genügt es, die Operation TS^3 zu betrachten.

biquadratischen Factor doppelt enthält, so habe ich die gesuchte Gleichung gefunden.

Zu diesem Zwecke betrachte ich das System von 660 Collineationen bei 5 Variablen, von dem schon in der Einleitung die Rede war. Indem ich die quadratischen Reste modulo 11 als Indices wähle und so ordne, wie sie aus einem derselben durch Multiplication mit 4 hervorgehen, nenne ich die Variablen

$$y_1,\ y_4,\ y_5,\ y_9,\ y_3.$$

Die 660 Collineationen erwachsen dann durch Wiederholung und Combination der folgenden zwei Operationen $\left(\varrho = e^{\frac{2i\pi}{11}}\right)$:

$$(2)\left\{\begin{array}{ll} S) & y_1' = \varrho y_1,\quad y_4' = \varrho^4 y_4,\quad y_5' = \varrho^5 y_5,\quad y_9' = \varrho^9 y_9,\quad y_3' = \varrho^3 y_3, \\ T) & \left\{\begin{array}{l} \sqrt{-11}\cdot y_1' = (\varrho^9-\varrho^2)y_1 + (\varrho^4-\varrho^7)y_4 + (\varrho^3-\varrho^8)y_5 \\ \qquad\qquad + (\varrho^5-\varrho^6)y_9 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_4' = (\varrho^4-\varrho^7)y_1 + (\varrho^3-\varrho^8)y_4 + (\varrho^5-\varrho^6)y_5 \\ \qquad\qquad + (\varrho^1-\varrho^{10})y_9 + (\varrho^9-\varrho^2)y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_5' = (\varrho^3-\varrho^8)y_1 + (\varrho^5-\varrho^6)y_4 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_5 \\ \qquad\qquad + (\varrho^9-\varrho^2)y_9 + (\varrho^4-\varrho^7)y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_9' = (\varrho^5-\varrho^6)y_1 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_4 + (\varrho^9-\varrho^2)y_5 \\ \qquad\qquad + (\varrho^4-\varrho^7)y_9 + (\varrho^3-\varrho^8)y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_3' = (\varrho^1-\varrho^{10})y_1 + (\varrho^9-\varrho^2)y_4 + (\varrho^4-\varrho^7)y_5 \\ \qquad\qquad + (\varrho^3-\varrho^8)y_9 + (\varrho^5-\varrho^6)y_3, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

denen sich als einfachste Combination die cyklische Vertauschung zugesellt:

$$(2\text{b})\quad C)\quad y_1' = y_4,\quad y_4' = y_5,\quad y_5' = y_9,\quad y_9' = y_3,\quad y_3' = y_1.$$

Und zwar lassen sich sämmtliche 660 Collineationen durch die beiden Symbole angeben:

$$C^\alpha S^\beta,\qquad C^\alpha S^\beta T S^\gamma,$$

wo man dem α die fünf Werthe 0, 1, 2, 3, 4, dem β und dem γ die 11 Werthe 0, 1, 2, $\cdots$, 10 zu ertheilen hat. —

Diesem Substitutionssysteme entspricht im Sinne meines letzten Aufsatzes (Annalen XV, pag. 256) ein „*Problem der y*", welches in allgemeinster Fassung so lautet: *Es sind sämmtliche ganze Functionen der y, die sich bei den* 660 *Collineationen* (2) *nicht ändern, ihrem Zahlenwerthe nach gegeben; man soll die unbekannten y berechnen.* Diess Problem hat jedenfalls die gewünschte Galois'sche Gruppe, und mit ihm werde ich mich daher jetzt eine Zeit lang beschäftigen.

§ 4.

Ungeändert bleibende ganze Functionen der y.

Es ist nicht meine Absicht, alle ungeändert bleibenden ganzen Functionen der y mitzutheilen; dies würde jedenfalls eine weitläufige und vielleicht eine schwierige Aufgabe sein. Vielmehr definire ich nur drei solche Functionen, die ich später gebrauche. Die erste ist die Function *dritten* Grades:

$$\nabla = y_1^2 y_9 + y_4^2 y_3 + y_5^2 y_1 + y_9^2 y_4 + y_3^2 y_5, \tag{3}$$

offenbar die niedrigste ungeändert bleibende Function. Die zweite ist ihre *Hesse'sche Determinante* vom fünften Grade:

$$H = \begin{vmatrix} y_9 & 0 & y_5 & y_1 & 0 \\ 0 & y_3 & 0 & y_9 & y_4 \\ y_5 & 0 & y_1 & 0 & y_3 \\ y_1 & y_9 & 0 & y_4 & 0 \\ 0 & y_4 & y_3 & 0 & y_5 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

deren erste Unterdeterminanten später von Interesse werden. Die dritte ist eine *Function elften Grades:*

$$C = (y_1^{11} + y_4^{11} + y_5^{11} + y_9^{11} + y_3^{11}) \cdots, \tag{5}$$

die man etwa definiren kann als numerisches Multiplum der Summe der elften Potenzen derjenigen 660 Werthe, deren y_1 bei den 660 Collineationen theilhaftig wird. Mit Rücksicht auf das erste in (5) angegebene Glied finde ich:

$$C = \frac{11}{124} (\Sigma y^{11}). \tag{5b}$$

Aus C und ∇ werde ich später die rationale Function 33^{ten} Grades und nullter Dimension:

$$\frac{C^3}{\nabla^{11}}$$

zusammensetzen.

§ 5.

Elfwerthige ganze Functionen der y.

Um die niedrigsten elfwerthigen Functionen der y zu finden beginne ich damit, aus der Gesammtheit der Collineationen (2) eine Untergruppe vom Index 11 (die sonach 60 Substitutionen enthält) auszuscheiden. Dies geschieht leicht, wenn man die eindeutige Beziehung benutzt, welche zwischen den 660 Collineationen und denjenigen ganzzahligen linearen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv R \pmod{11},$$

die modulo 11 verschieden sind, besteht, und dann die Betti'schen Formeln heranzieht, welche ich Annalen XIV, p. 419 reproducirt habe.

Offenbar kann man die beiden Collineationen S, T den folgenden beiden ω-Substitutionen entsprechend setzen:

$$\omega' = \omega + 1, \qquad \omega' = -\frac{1}{\omega},$$

(aus denen wieder alle anderen durch Wiederholung und Combination hervorgehen). Dann entsprechen den cyklischen Vertauschungen C^α der fünf y:

$$(y_1, y_4, y_5, y_9, y_3),$$

wie man leicht findet, die Wiederholungen von

$$\omega' = 4\omega.$$

Nun erwächst nach den genannten Formeln eine Untergruppe vom Index 11, wenn man die Substitution

$$\omega' = 4\omega$$

mit folgender Substitution von der Periode 2 verbindet:

$$\omega' = \frac{\omega - 2}{\omega - 1} = \frac{-1}{\omega - 1} + 1;$$

die Untergruppe enthält dann von selbst die Substitution

$$\omega' = -\frac{1}{\omega}.$$

Indem wir zu den y zurückgehen, haben wir also die cyklische Vertauschung C der y mit der Collineation $S^{-1}TS$ zu combiniren. Die entstehende Untergruppe umfasst von selbst die Collineation T.

Aber man kennt von vorneherein eine sehr einfache Function der y, die bei den Operationen C und T invariant bleibt: das ist die *Summe* der y:

$$p_\infty = y_1 + y_4 + y_5 + y_9 + y_3. \tag{6}$$

Wendet man auf sie die Collineation $S^{-1}TS$ an, so kommt nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} p_0 = \frac{1}{\sqrt{-11}} \{ & y_1(2(\varrho^7 - \varrho^1) + (\varrho^9 - \varrho^{10})) \\ & + y_4(2(\varrho^6 - \varrho^4) + (\varrho^3 - \varrho^7)) \\ & + y_5(2(\varrho^2 - \varrho^5) + (\varrho^1 - \varrho^6)) \\ & + y_9(2(\varrho^8 - \varrho^9) + (\varrho^4 - \varrho^2)) \\ & + y_3(2(\varrho^{10} - \varrho^3) + (\varrho^5 - \varrho^8))\}, \end{aligned} \tag{7}$$

und vertauscht man hier die fünf y cyklisch, so entstehen noch vier weitere Ausdrücke, die

(8) $$p_1, p_2, p_3, p_4$$

genannt werden sollen. — Da p_∞ bei 10 Collineationen der Untergruppe ungeändert bleibt, so ist es gegenüber der Gesammtheit ihrer Collineationen sechswerthig; *d. h. die sechs Ausdrücke p werden bei den 60 Collineationen der Untergruppe unter sich permutirt.* Die symmetrischen Functionen der sechs p bleiben also bei sämmtlichen Collineationen der Untergruppe ungeändert; sie sind also gegenüber den 660 Collineationen (2) elfwerthig, sie müssten denn zu den überhaupt ungeändert bleibenden Functionen gehören.

Demnach berechne man, um möglichst niedrige elfwerthige Functionen zu haben, die niedrigsten nicht verschwindenden symmetrischen Functionen der p, also etwa die Summe der Quadrate und die Summe der Cuben. So findet man folgende Functionen:

1) *Die Function zweiten Grades:*

$$(9)\qquad \begin{aligned}\varphi_0 = {} & (y_1^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_9^2 + y_3^2)\\ & - (y_1 y_9 + y_4 y_3 + y_5 y_1 + y_9 y_4 + y_3 y_5)\\ & + \frac{-1+\sqrt{-11}}{2}(y_1 y_4 + y_4 y_5 + y_5 y_9 + y_9 y_3 + y_3 y_1),\end{aligned}$$

2) *Die Function dritten Grades:*

$$(10)\qquad \begin{aligned}f_0 = {} & (y_1^3 + y_4^3 + y_5^3 + y_9^3 + y_3^3)\\ & + 3(y_1^2 y_3 + y_4^2 y_1 + y_5^2 y_4 + y_9^2 y_5 + y_3^2 y_9)\\ & - 3(y_1 y_4 y_9 + y_4 y_5 y_3 + y_5 y_9 y_1 + y_9 y_3 y_4 + y_3 y_1 y_5)\\ & + \frac{1+\sqrt{-11}}{2}(y_1^2 y_5 + y_4^2 y_9 + y_5^2 y_3 + y_9^2 y_1 + y_3^2 y_4)\\ & - \frac{1+\sqrt{-11}}{2}(y_1 y_4 y_5 + y_4 y_5 y_9 + y_5 y_9 y_3 + y_9 y_3 y_1 + y_3 y_1 y_4)\\ & - (1+\sqrt{-11})(y_1^2 y_4 + y_4^2 y_5 + y_5^2 y_9 + y_9^2 y_3 + y_3^2 y_1).\end{aligned}$$

Die Function φ_0 stimmt mit $\frac{-1+\sqrt{-11}}{12}\,\Sigma p^2$ überein; die Function f_0 ist von $\frac{-\sqrt{-11}\,\Sigma p^3}{6}$ nur um ein Glied verschieden, das ein numerisches Multiplum von ∇ (3) ist. — Die elf Werthe, welche φ_0 oder f_0 bei den 660 Collineationen annimmt, und die ich φ_ν, bez. f_ν nennen will, erwachsen aus φ_0 und f_0, wenn man der Collineation S^ν entsprechend statt $y_{\varkappa^2}$ einträgt $\varrho^{\varkappa^2 \nu} \cdot y_{\varkappa^2}$. — Aendert man in diesen Formeln das Vorzeichen von $\sqrt{-11}$, so bekommt man Ausdrücke φ_ν', f_ν', welche ebenfalls elfwerthig sind und die sich auf die zweite Serie von Untergruppen vom Index 11 bezieht, die Betti l. c. ebenfalls angiebt. Da sich aber für sie alle Betrachtungen ganz geradeso gestalten, wie für die φ_ν, f_ν, so werde ich sie in der Folge durchaus bei Seite lassen. — Als elfwerthige Functionen nullter Dimension werde ich später

$$\frac{f_\nu}{\nabla} \text{ und } \frac{\varphi_\nu}{\nabla^{\frac{2}{3}}}$$

gebrauchen.

§ 6.

Specialisirung des y-Problems.

Für unseren speciellen Zweck bedürfen wir nicht des *allgemeinen* Problems der y: in der Schlussgleichung $J = F(z)$, die wir suchen, soll nur der *eine* Parameter J vorkommen. Es handelt sich also darum, aus der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der $y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3$ nunmehr in richtiger Weise eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, *eine Curve*, auszuscheiden, die bei den 660 Collineationen in sich übergeht, und das specielle auf sie bezügliche Problem der y durchzuführen.

Von dieser Curve wissen wir, *dass sie das Bild der Galois'schen Resolvente der Transformationsgleichung sein muss.* Nun ist, wie ich früher ausführte (Ann. XIV, p. 151) die Galois'sche Resolvente vorgestellt durch eine Riemann'sche Fläche, die 660-blättrig über der Ebene J ausgebreitet ist und deren Blätter bei $J = 0$ zu je 3, bei $J = 1$ zu je 2, bei $J = \infty$ zu je 11, sonst aber nirgends zusammenhängen, deren Geschlecht also $= 26$ ist. Auf unserer Curve muss es dementsprechend eine rationale Function J geben, welche jeden Werth in 660 und nur in 660 solchen Punkten annimmt, die durch die 660 Collineationen auseinander hervorgehen; es darf unter diesen Gruppen von je 660 zusammengehörigen Punkten nur drei geben, welche aus einer geringeren Zahl von mehrfach zählenden Punkten bestehen: eine Gruppe von 220 dreifach zählenden Punkten, eine von 330 zweifach zählenden und eine von 60 elffach zählenden. Das Geschlecht der Curve ist natürlich auch gleich 26. — Beachten wir ferner die Gleichung (1) $J = F(z)$. Sie sagt vor allen Dingen aus, dass es auf unserer Curve eine rationale Function z giebt, welche jeden Werth in 60 und nur in solchen 60 Punkten annimmt, die durch die Collineationen einer Untergruppe vom Index 11 auseinander hervorgehen. Die weiteren Eigenschaften der Function F: dass $F(z)$ eine rationale *ganze* Function elften Grades ist, dass es einen cubischen Factor cubisch und $F(z) - 1$ einen biquadratischen Factor doppelt enthalten soll, sind blosse Consequenzen des Gesagten*). Dass $F(z)$ eine ganze

---

*) Vergl. bei diesen Ueberlegungen die analogen Betrachtungen für die Transformation siebenter Ordnung, welche ich Annalen XIV, p. 434, 456 etwas ausführlicher entwickelt habe.

Function elften Grades ist, ergiebt sich daraus, dass die 660 einem beliebigen Werthe von J entsprechenden Punkte sich gegenüber den 60 Collineationen der Untergruppe in $11 \cdot 60$ spalten, dass aber die 60 Punkte $J = \infty$ alle auseinander durch die Collineationen der Untergruppe hervorgehen. Die anderen Eigenschaften folgen aus dem Verhalten der 220 Punkte $J = 0$ und der 330 Punkte $J = 1$. Es giebt unter den 660 Collineationen, wie bekannt, $2 \cdot 55$ von der Periode 3, 55 von der Periode 2*). Bei jeder Collineation von der Periode 3 bleiben daher 4 Punkte $J = 0$ fest, bei jeder Collineation von der Periode 2 6 Punkte $J = 1$. Aber die Untergruppe vom Index 11 enthält $2 \cdot 10$ Collineationen von der Periode 3, 15 von der Periode 2. Die 220 Punkte $J = 0$ sondern sich also ihr gegenüber in $2 \cdot 20 + 3 \cdot 60$ und die 330 Punkte $J = 1$ in $3 \cdot 30 + 4 \cdot 60$. Und eben dies wird durch die gemeinten Eigenschaften von F ausgesagt.

Wenn es also gelingt, eine Raumcurve zu finden, auf welcher die Function J in der angegebenen Weise, auf welcher überdies eine Function z existirt, so muss sie von selbst zu einer Gleichung $J = F(z)$ hinleiten, die alle charakteristischen Eigenschaften besitzt und also die von uns gesuchte Gleichung ist.

Jetzt ist die niedrigste nur von den Verhältnissen der y abhängige rationale Function, die bei den 60 Collineationen einer Untergruppe ungeändert bleibt, nach § 5.:

$$z = \frac{f_\nu}{\nabla}, \tag{11}$$

eine Function vom dritten Grade. Sie soll, will ich voraussetzen, diejenige Function sein, welche auf unserer Curve jeden Werth in 60 Punkten annimmt; ich werde also die Hypothese machen, *dass unsere Curve von der 20^{ten} Ordnung sei, und weder auf $f_\nu = 0$, noch auf $\nabla = 0$ gelegen sei, noch auch dem gemeinsamen Schnitte von $f_\nu = 0$, $\nabla = 0$ begegne.* Ich will ferner annehmen, *dass sie nicht auf $C = 0$ liegt und auch nicht dem Schnitte von $C = 0$, $\nabla = 0$ begegnet.* Dann ist $\frac{C^3}{\nabla^{11}}$ eine Function, welche jeden Werth in 660 zusammengehörigen Punkten annimmt; für $C = 0$ erhält man nur 220 getrennte Punkte, für $\nabla = 0$ nur 60. Man sieht: *es müsste $J = k \cdot \frac{C^3}{\nabla^{11}}$ gesetzt werden*, wo k eine numerische Constante ist. Nun sage ich: *Wenn nur das Geschlecht unserer Curve gleich 26 ist, so giebt es von selbst ausser der Gruppe der dreifach zählenden 220 Punkte und der Gruppe der elffach zählenden 60 nur noch eine Gruppe von mehrfach zählenden Punkten, nämlich*

*) Vergl. hier und im Folgenden bei solchen Angaben die betr. Capitel in Serret's Traité d'algèbre supérieure, vol. II.

von 330 zweifach zählenden. Denn denken wir uns die Curve als Riemann'sche Fläche 660-blättrig über der Ebene J ausgebreitet, so bekommen wir, wegen der 660 Transformationen der Curve in sich, bei denen J ungeändert bleibt, jedenfalls eine *reguläre* Verzweigung (Annalen XIV, p. 458), und wenn also irgendwo ν Blätter zusammenhängen, so hängen an dieser Stelle alle Blätter zu je ν zusammen. Man hat also

$$2p-2=660\left(-2+\sum\frac{\nu-1}{\nu}\right),$$

wo sich die Summe rechter Hand auf die verschiedenen Stellen der Ebene J bezieht, an denen Verzweigungen stattfinden. Soll nun $p=26$, ein Werth von ν gleich 3, ein anderer gleich 11 sein, so kann, wie man sofort zeigt, nur noch *ein* drittes ν unter dem Summenzeichen vorkommen, und dieses muss gleich 2 sein. Auch können wir, durch zweckmässige Wahl von k, erreichen, dass J an der betr. Stelle gleich 1 wird.

Man sieht, wie sich alle diese Hypothesen zusammenschliessen. *Es gilt, in dem Raume der y eine Curve von der 20ten Ordnung und dem Geschlechte 26 zu finden, welche bei den 660 Collineationen in sich übergeht, und weder auf $f_\nu=0$, noch auf $\nabla=0$, noch endlich auf $C=0$ gelegen ist, auch nicht dem Schnitte von $f_\nu=0$ und $\nabla=0$, oder dem Schnitte von $C=0$ und $\nabla=0$ begegnet.*

§ 7.

Die Doppelcurve von $H=0$.

Falls unsere Curve 20ter Ordnung existirt, muss sie jedenfalls auf der Fläche (4): $H=0$ liegen*). Denn sonst gäbe es mit $H=0$ 100 Schnittpunkte, und diese 100 Punkte müssten durch die 660 Collineationen unter sich permutirt werden, was unmöglich ist. — Nun erinnere man sich der Untersuchungen, vermöge deren man in der gewöhnlichen Raumgeometrie zeigt, dass die Hesse'sche einer Fläche dritter Ordnung 10 Knotenpunkte besitzt. Man setzt zu dem Zwecke gleichzeitig alle ersten Unterdeterminanten der Hesse'schen Determinante gleich Null. Genau so kann man bei 5 Variabelen verfahren und erhält dann durch bekannte Methoden den allgemeinen Satz: *dass bei 5 Variablen die Hesse'sche einer Fläche dritter Ordnung eine Doppelcurve von der 20ten Ordnung und dem Geschlechte 26 besitzt.* Es wird also

---

*) Ich nenne *Fläche* jede Mannigfaltigkeit, die durch *eine* Gleichung dargestellt wird, also im vorliegenden Falle eine Mannigfaltigkeit von 3 Dimensionen, *Curve* ein Gebiet von nur einer Dimension.

auch, falls nicht besondere Verhältnisse störend einwirken, die Fläche $H = 0$ eine solche Doppelcurve besitzen, und diese Doppelcurve wird durch die 660 Collineationen in sich übergehen, da die Fläche $H = 0$ es thut. Kann man zweifeln, dass eben diese Doppelcurve die von uns gesuchte Curve ist? Dabei ist freilich Zweierlei noch nachzuweisen: nämlich erstens, dass die im allgemeinen Falle richtigen Zahlen 20 und 26 für Ordnung und Geschlecht im besonderen Falle keine Modification erfahren, und zweitens, dass unsere Curve auch die anderen, negativen Eigenschaften besitzt, welche wir angegeben haben.

Indem ich dem Beweise, zu dem ich mich sofort wende, vorgreife, spreche ich schon hier den Satz aus:

Die von uns gesuchte Curve 20^{ter} *Ordnung ist die Doppelcurve der Hesse'schen Fläche* $H = 0$.

Zum Beweise bilde man zunächst alle Unterdeterminanten von H und setze sie gleich Null. So bekommt man ein Gleichungssystem, welches ich

$$H_{ik} = 0 \tag{12}$$

nennen will, und dessen Gleichungen aus folgenden drei

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1 , \\ 0 = y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9 , \\ 0 = y_4^3 y_9 + y_9^3 y_5 + y_3^3 y_1 \end{array}\right. \tag{13}$$

durch cyklische Permutation der y hervorgehen.

Ich will nun die fünf Punkte, in denen vier von den fünf y verschwinden, als die Punkte I, IV, V, IX, III bezeichnen. Dann sieht man sofort:

Die fünf Punkte I, IV, V, IX, III *gehören unserer Curve an.*

Und da sie den Flächen (5): $C = 0$ und $f_\nu = 0$ (§ 5.): offenbar nicht angehören, so folgt:

Unsere Curve liegt weder auf $C = 0$ *noch auf* $f_\nu = 0$.

Setzt man in (13) und die übrigen Gleichungen $H_{ik} = 0$ für eins der y den Werth Null, so folgt, dass noch drei, übrigens beliebige y verschwinden müssen. Daher:

Jede Ebene $y_{k^2} = 0$ *schneidet unsere Curve nur in vier Punkten, nämlich in denjenigen vier unter den fünf Punkten* I, IV, V, IX, III, *welche nicht nach dem Index von* y_{k^2} *benannt sind.*

Man lasse nunmehr in einem der fünf Punkte, etwa im Punkte III, eine Reihenentwickelung eintreten, indem man $y_3 = 1$, $y_5 = dt$ setzt. Dann bekommt man aus den Gleichungen $H_{ik} = 0$ bis auf Glieder von höherer als der zehnten Ordnung:

$$y_1 = dt^{10}, \quad y_4 = dt^6, \quad y_5 = dt, \quad y_9 = - dt^3, \quad y_3 = 1,$$

und also für das Verhalten der y in sämmtlichen fünf Punkten folgende Tabelle:

(14)

	y_1	y_4	y_5	y_9	y_3
I	1	dt^{10}	dt^6	dt	$-dt^3$
IV	$-dt^3$	1	dt^{10}	dt^6	dt
V	dt	$-dt^3$	1	dt^{10}	dt^6
IX	dt^6	dt	$-dt^3$	1	dt^{10}
III	dt^{10}	dt^6	dt	$-dt^3$	1

Man sieht:

Die fünf Punkte sind einfache Punkte unserer Curve.

Dann aber vor Allem:

Die Curve ist von der 20^{ten} *Ordnung.*

Denn die Summe der beim einzelnen y in der Tabelle vorkommenden Exponenten von dt ist $3 + 1 + 6 + 10 = 20$.

Jeder unserer fünf Punkte bleibt bei der Collineation S: $y'_{k^2} = \varrho^{k^2} y_{k^2}$ ungeändert, bei der cyklischen Vertauschung C der y werden sie unter einander permutirt. Es entstehen aus den 5 Punkten bei den 660 Collineationen daher nur 60. In ihnen sämmtlich verschwindet ∇, weil es z. B. in I verschwindet. Dagegen verschwindet ∇ nicht identisch. Denn tragen wir in ∇ z. B. die auf I bezügliche Reihenentwickelung (14) ein, so kommt (mit dem von uns gewählten Maasse der Genauigkeit) $\nabla = dt$. Also:

$\nabla = 0$ *hat mit unserer Curve* 60 *und nur* 60 *Schnittpunkte gemein, und in diesen verschwindet weder* C *noch* f_ν.

Um alle charakteristischen Eigenschaften der von uns gesuchten Curve beisammen zu haben, bleibt nur noch zu zeigen, *dass das Geschlecht gleich* 26 *ist.* Dies gelingt sehr einfach durch die Betrachtung gewisser Ungleichheiten. Sicher ist p kleiner als das Geschlecht der allgemeinen Durchdringungscurve dreier Flächen vierter Ordnung: denn unsere Doppelcurve bildet ja nur einen Theil einer solchen. Dies giebt in bekannter Weise*):

$$p < 71.$$

Andererseits ist p jedenfalls nicht kleiner als das Geschlecht einer in gerade Linien zerfallenen Curve; also:

$$p \geqq -19.$$

*) Durch Aufstellung der überall endlichen Differentiale.

Endlich aber lässt sich, wie ich im vorigen Paragraphen zeigte, folgende Gleichung anschreiben:

$$2p-2=660\left(-2+\sum\frac{\nu-1}{\nu}\right).$$

Hier muss, wegen des Schnittes mit $C=0$ *ein* ν gleich 3, und wegen des Schnittes mit $\nabla=0$ ein anderes ν gleich 11 genommen werden. Nähme man nun kein drittes ν dazu, so würde

$$2p-2=-280,\quad p=-139$$

sein. Nähme man aber das dritte ν gleich 3 oder noch grösser, oder nähme man gar mehrere ν an, so käme:

$$2p-2\geqq 160,\quad p\geqq 81.$$

Also ist nur noch ein ν da; dasselbe ist gleich 2; *und p wird* $=26$, was zu beweisen war.

§ 8.

Die Gleichung $J=F(z)$.

Jetzt ist es eine einfache Rechenaufgabe, die Gleichung $J=F(z)$ zu bilden. Wir haben

$$(15)\qquad J=k\cdot\frac{C^3}{\nabla^{11}},\qquad z_\nu=\frac{f_\nu}{\nabla}$$

zu setzen und zunächst mit unbestimmten Coefficienten anzuschreiben*):

$$(16)\qquad J=k\cdot(z^2+Az+B)\,(z^3+az^2+bz+c)^3,$$

oder auch:

$$(16\text{b})\quad J-1=k\,(z^3+\mathsf{A}z^2+\mathsf{B}z+\Gamma)\,(z^4+\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z+\delta)^2.$$

Sodann trage man eine der Reihenentwickelungen (14) in C, ∇ und f_ν ein. So kommt bis auf Glieder von höherer als der zehnten Dimension:

$$(17)\quad\begin{cases} \qquad\qquad C=1,\qquad \nabla=dt,\\ f_\nu=\varrho^{9\nu}+\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\varrho^{2\nu}\cdot dt^2-2\varrho^{4\nu}\cdot dt^3+\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\varrho^{6\nu}\cdot dt^4\\ \qquad +(1+\sqrt{-11})\cdot dt^5-\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\cdot\varrho^{10\nu}\cdot dt^6+3\varrho^{\overset{3}{\cancel{8}}\nu}\cdot dt^8\\ \qquad +2\varrho^{5\nu}\cdot dt^9-(1+\sqrt{-11})\varrho^{7\nu}\cdot dt^{10}.\end{cases}$$

Dies in (16) und (16b) eingesetzt giebt mit einer grossen Zahl von Controlen:

---

*) Das hier rechter Hand stehende k ist in der That dasselbe, wie das k in (15). Denn in $\frac{C^3}{\nabla^{11}}$ wie in z^{11} kommt im Zähler das Glied y_1^{33} mit $+1$ multiplicirt vor.

$$(18) \qquad A = -3, \quad B = 5 - \sqrt{-11}, \quad a = 1, \quad b = -3\,\frac{1+\sqrt{-11}}{2},$$
$$c = \frac{7-\sqrt{-11}}{2};$$

$$(18\text{b}) \qquad \mathsf{A} = 4, \quad \mathsf{B} = \frac{7-5\sqrt{-11}}{2}, \quad \Gamma = 4 - 6\sqrt{-11}, \quad \alpha = -2,$$
$$\beta = 3\cdot\frac{1-\sqrt{-11}}{2}, \quad \gamma = 5+\sqrt{-11}, \quad \delta = -3\cdot\frac{5+\sqrt{-11}}{2},$$

und die beiden so erhaltenen Werthe von J und $J-1$ stimmen in der That überein (was wieder eine Menge von Bestätigungen einschliesst), wenn

$$(19) \qquad k = -\frac{1}{1728}$$

gesetzt wird.

Daher lautet die fertige Gleichung $J = F(z)$ folgendermassen:

$$(20) \quad \begin{aligned} J:J-1:1 = {} & \left(z^2 - 3z + (5-\sqrt{-11})\right)\cdot \\ & \cdot\left(z^3 + z^2 - 3\cdot\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\cdot z + \frac{7-\sqrt{-11}}{2}\right)^3 \\ & : \left(z^3 + 4z^2 + \frac{7-5\sqrt{-11}}{2}\cdot z + (4-6\sqrt{-11})\right)\cdot \\ & \cdot\left(z^4 - 2z^3 + 3\cdot\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\cdot z^2 + (5+\sqrt{-11})z - 3\cdot\frac{5+\sqrt{-11}}{2}\right)^2 \\ & : -1728. \end{aligned}$$

§ 9.

Die zweite Form der Gleichung elften Grades.

Neben die so gewonnene Gleichung stellt sich nun noch eine zweite, ebenfalls sehr einfache, wenn man nicht von der elfwerthigen Function *dritten* Grades f_ν (10), sondern von der Function *zweiten* Grades φ_ν (9) ausgeht. Ich beweise zunächst den Satz:

Vermöge der Relationen $H_{ik} = 0$ (12) reduciren sich alle bei den 660 Collineationen ungeändert bleibenden ganzen Functionen der y auf ganze Functionen von ∇ und C.

Eine ungeändert bleibende Function der y, gleich Null gesetzt, stellt eine Fläche vor, welche entweder unsere Curve enthält — und dann wird die Function vermöge der $H_{ik} = 0$ identisch Null sein — oder dieselbe in solchen Punkten schneidet, die bei den 660 Collineationen unter einander permutirt werden. Unter ihnen können sich eine gewisse Anzahl von Malen die 60 Punkte $\nabla = 0$ finden, ebenso beliebig oft die 220 Punkte $C = 0$, dann irgendwelche Gruppen von 660 getrennten Punkten, die durch $C^3 - \lambda\nabla^{11} = 0$ dargestellt sind, wo λ eine geeignete Constante bedeutet. Dagegen kann die Gruppe der 330 Punkte $J=1$ nur eine *paare* Anzahl von Malen auftreten, weil die Gesammtzahl der Punkte durch 20 theilbar sein muss, 330 aber nur durch 10 theilbar ist. *Doppeltzählend* wird diese Gruppe aber auch durch eine Combination von C und ∇ dargestellt, nämlich, da $J=1$ ist, durch $C^3+1728\,\nabla^{11}=0$; sämmtliche Schnittpunkte also können mit der richtigen Multiplicität ausgeschnitten werden, indem man eine geeignete ganze Function von ∇ und C gleich Null setzt, was zu beweisen war. —

Daher genügen vermöge der Relationen $H_{ik}=0$ die elf φ_ν einer Gleichung elften Grades, deren Coefficienten ganze Functionen von ∇ und C sind.

Mit Rücksicht auf den Grad der in Betracht kommenden Functionen können wir sofort mit unbestimmten Zahlenfactoren anschreiben:

$$(21)\quad \varphi^{11}+\alpha\nabla^2\cdot\varphi^8+\beta\nabla^4\cdot\varphi^5+\gamma\nabla C\cdot\varphi^4+\delta\nabla^6\cdot\varphi^2+\varepsilon\nabla^3C\cdot\varphi + \zeta\cdot C^2=0.$$

Die Zahlenfactoren bestimmt man wieder vermöge der Reihenentwickelungen (14). Man hat ihnen zufolge:

$$(22)\qquad \varphi_\nu=\varrho^{6\nu}-\varrho^{8\nu}\cdot dt+\varrho^{10\nu}\cdot dt^2+\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\varrho^\nu\cdot dt^3 + \frac{1-\sqrt{-11}}{2}\varrho^{3\nu}\cdot dt^4+\cdots$$

und findet also:

$$(23)\quad \alpha=-22,\quad \beta=11(9-2\sqrt{-11}),\quad \gamma=11,\quad \delta=88\sqrt{-11},\quad \varepsilon=\frac{11(-3+\sqrt{-11})}{2},\quad \zeta=-1.$$

Ich will noch

$$(24)\qquad \frac{\varphi_\nu}{\nabla^{2/3}}=\xi_\nu$$

setzen und für $\frac{C^3}{\nabla^{11}}$ einführen: $-1728\,J=-1728\,\frac{g_2{}^3}{\Delta}$. *Dann erhält die neue Gleichung elften Grades folgende Form:*

$$(25)\quad \xi^{11}-22\cdot\xi^8+11(9-2\sqrt{-11})\xi^5-11\cdot\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi^4+88\sqrt{-11}\cdot\xi^2 -11\cdot\frac{-3+\sqrt{-11}}{2}\cdot\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi-\frac{144g_2{}^2}{\sqrt[3]{\Delta^2}}=0.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, wie diese Gleichung mit Gleichung (20) zusammenhängt. Die Fläche $\varphi_\nu=0$ schneidet aus unserer Curve 40 Punkte aus, die sich bei den 60 Collineationen der Untergruppe unter einander permutiren. Dies können, dem Früheren zufolge, nur diejenigen $2 \cdot 20$ Punkte sein, welche je bei 2 Collineationen von der Periode 3 festbleiben, d. h. dieselben Punkte, für welche man nach Gleichung (20) hatte:

$$z^2 - 3z + (5 - \sqrt{-11}) = 0.$$

In der That zeigen die Reihenentwickelungen (14), dass folgende Relation besteht (natürlich immer vermöge der $H_{ik} = 0$):

$$\varphi_\nu^3 = f_\nu^2 - 3f_\nu \nabla + (5 - \sqrt{-11})\nabla^2, \tag{26}$$

und *dass man also von der Gleichung* (25) *zu der Gleichung* (20) *kommt, indem man setzt:*

$$\xi^3 = z^2 - 3z + (5 - \sqrt{-11}). \tag{27}$$

Die directe Verification dieser Angabe, die wieder eine Reihe von Controlen für die Zahlencoefficienten einschliesst, hat keinerlei Schwierigkeit.

§ 10.

Zusammenstellung der bisherigen Resultate.

Fassen wir zusammen, so sind wir für *die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen* nunmehr zu folgenden Resultaten gekommen:

1) *Die Galois'sche Resolvente* 660^{ten} *Grades lässt sich folgendermassen anschreiben:* Man unterwerfe die fünf Verhältnissgrössen

$$y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3$$

den 15 Relationen $H_{ik} = 0$ (vergl. (12) resp. (13)) und setze: *)

$$\frac{-C^3}{1728\,\nabla^{11}} = J,$$

wo ∇ die Function dritten Grades (2), C die Function elften Grades (4) bezeichnet. — Hat man *ein* Lösungssystem dieser Gleichungen gefunden, so ergeben sich alle anderen durch die Collineationen des § 3.

2) *Es giebt zwei einfachste Formen der Resolvente elften Grades.* Die eine, von uns zu Anfang allein betrachtete, lautet (20):

---

*) Wollte man nicht die Verhältnisse der y, sondern die y selbst betrachten, so könnte man schreiben:

$$C = 12 g_2, \quad \nabla = -\sqrt[11]{\Delta},$$

man müsste dann also g_2 und $\sqrt[11]{\Delta}$ adjungiren.

$$
\begin{aligned}
J:J-1:1 = {} & \left(z^2-3z+(5-\sqrt{-11})\right)\cdot \\
& \cdot\left(z^3+z^2-3\cdot\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\cdot z+\frac{7-\sqrt{-11}}{2}\right)^3 \\
& :\left(z^3+4z^2+\frac{7-5\sqrt{-11}}{2}\cdot z+(4-6\sqrt{-11})\right)\cdot \\
& \cdot\left(z^4-2z^3+3\cdot\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\cdot z^2+(5+\sqrt{-11})z-3\cdot\frac{5+\sqrt{-11}}{2}\right)^2 \\
& :-1728;
\end{aligned}
$$

ihre 11 Wurzeln sind durch die Formel gegeben:

$$z_\nu = \frac{f_\nu}{\nabla},$$

wo f_ν durch Gleichung (10) definirt ist.

Die zweite Form wird durch (25) vorgestellt:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \xi^{11}-22\cdot\xi^8+11(9-2\sqrt{-11})\cdot\xi^5-11\cdot\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi^4+88\cdot\sqrt{-11}\cdot\xi^2 \\
& -11\cdot\frac{-3+\sqrt{-11}}{2}\cdot\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi-\frac{144g_2^2}{\sqrt[3]{\Delta^2}};
\end{aligned}
$$

und ihre Wurzeln sind:

$$\xi_\nu = \frac{\varphi_\nu}{\nabla^{\frac{2}{3}}},$$

unter φ_ν die Functionen (9) verstanden.

§ 11.

Zusammenhang mit der Gleichung zwölften Grades.

Ich wünsche nun noch zu zeigen, wie die Grössen y mit der Multiplicatorgleichung zwölften Grades, die ich neuerdings mittheilte*), zusammenhängen und wie man dementsprechend das vorstehend formulirte Problem 660^{ten} Grades, resp. die Gleichungen elften Grades auf transcendentem Wege lösen kann. Ich setze zunächst die ausgerechnete Gleichung zwölften Grades noch einmal her:

$$
\begin{aligned}
(28)\quad & \mathrm{z}^{12}-90\cdot 11\cdot\sqrt[2]{\Delta}\cdot\mathrm{z}^6+40\cdot 11\cdot 12g_2\cdot\sqrt[3]{\Delta}\cdot\mathrm{z}^4-15\cdot 11\cdot 216g_3\cdot\sqrt[4]{\Delta}\cdot\mathrm{z}^3 \\
& +2\cdot 11\cdot(12g_2)^2\cdot\sqrt[6]{\Delta}\cdot\mathrm{z}^2-12g_2\cdot 216g_3\cdot\sqrt[12]{\Delta}\cdot\mathrm{z}-11\cdot\Delta=0,
\end{aligned}
$$

und gebe vor allen Dingen an, wie sich ihre Wurzeln als Functionen des Periodenverhältnisses $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\omega$ des elliptischen Integrals, resp. als

*) Vergl. diese Annalen XV, p. 88.

Functionen von $q = e^{i\pi\omega}$ darstellen lassen. Bekanntlich ist (28) eine Jacobi'sche Gleichung. Setzt man dementsprechend:

$$(29)\quad \begin{cases} \sqrt{z_\infty} = \sqrt{-11} \cdot A_0\,, \\ \sqrt{z_\nu} = A_0 + \varrho^\nu A_1 + \varrho^{4\nu} A_4 + \varrho^{5\nu} A_5 + \varrho^{9\nu} A_9 + \varrho^{3\nu} A_3\,, \\ \qquad (\nu = 0,\, 1,\, \cdots 10) \end{cases}$$

(worin ich nur dadurch von der Jacobi'schen Bezeichnung abweiche, dass ich als Indices der A die quadratischen Reste modulo 11 verwende), so erhält man auf bekanntem Wege für *ein* Werthsystem der A folgende Formeln.

$$(30)\quad \begin{cases} \mu A_0 = q^{\frac{121}{132}} \cdot \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+55h+22}\,, \\ \mu A_1 = q^{\frac{1}{132}} \cdot \left\{ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+h} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+43h+14} \right\} \\ \mu A_4 = q^{\frac{37}{132}} \cdot \left\{ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+13h+1} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+31h+7} \right\} \\ \mu A_5 = q^{\frac{49}{132}} \cdot \left\{ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+37h+10} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+7h} \right\} \\ \mu A_9 = q^{\frac{97}{132}} \cdot \left\{ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+19h+2} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+25h+4} \right\} \\ \mu A_3 = q^{\frac{25}{132}} \cdot \left\{ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+49h+18} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+61h+28} \right\} \end{cases}$$

wo μ den Proportionalitätsfactor $\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}$ bedeutet.

Solcher Werthsysteme giebt es $660 \cdot 24$, nämlich 660 wegen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichung, und 24 wegen der in (28) vorkommenden zwölften Wurzel und der in (29) stehenden Quadratwurzel. Aber man sieht leicht, dass sich je 24 Werthsysteme nur durch eine 24te Einheitswurzel unterscheiden, *dass also die Verhältnisse der A blos 660-werthig sind.* In der That, lässt man in den Formeln (30) ω um 11 Einheiten wachsen, so erhalten sämmtliche A eine vierundzwanzigste Einheitswurzel, aber diese ist bei allen A dieselbe, und rührt nur von dem rechter Hand gemeinsam auftretenden Factor $q^{\frac{1}{132}}$ her. — Ebenso waren, nach den früheren Betrachtungen, die Verhältnisse der y 660-werthig. Es ergiebt sich also die Möglichkeit: *die Verhältnisse der y durch die Verhältnisse der A und diese* *durch jene rational auszudrücken*, und dies ist die präcise Formulirung des Problems, mit dem wir uns jetzt noch zu beschäftigen haben.

§ 12.

Zugehörige Formeln.

Die Betrachtungen, welche nöthig sind, um das äusserst einfache Resultat abzuleiten, fasse ich in eine Reihe einzelner Bemerkungen zusammen. Dabei will ich ausdrücklich betonen, dass ich wohl kaum zu diesem Gedankengange geführt worden wäre, hätte nicht bei den Transformationsgraden 5 und 7 ein ganz ähnliches Resultat vorgelegen*).

1) Die 660 Werthsysteme der $A_0 : A_1 : A_4 : A_5 : A_9 : A_3$ ergeben sich nach meiner Darstellung im XV. Bande dieser Annalen p. 276 aus einem derselben durch 660 a priori bekannte Collineationen, aus denen ich folgende zwei herausgreife:

$$(31)\quad \left\{ \begin{array}{lllll} S' & A_0' = A_0, & A_1' = \varrho A_1, & A_4' = \varrho^4 A_4, & A_5' = \varrho^5 A_5, \\ & & & A_9' = \varrho^9 A_9, & A_3' = \varrho^3 A_3, \\ C' & A_0' = A_0, & A_1' = A_4, & A_4' = A_5, & A_5' = A_9, \\ & & & A_9' = A_3, & A_3' = A_1. \end{array} \right.$$

2) Die eindeutige Zuordnung zwischen den Verhältnissen der A und den Verhältnissen der y lässt sich auf 660 verschiedene Weisen treffen. Denn hat man eine solche Zuordnung durchgeführt, so kann man nachträglich die y oder die A noch einer beliebigen der 660 Collineationen unterwerfen. Daher kann man es jedenfalls erreichen, dass den Wiederholungen von S:

$$y_1' = \varrho y_1, \quad y_4' = \varrho^4 y_4, \quad y_5' = \varrho^5 y_5, \quad y_9' = \varrho^9 y_9, \quad y_3' = \varrho^3 y_3$$

die Wiederholungen von S' und den cyklischen Vertauschungen

$$(y_1\, y_4\, y_5\, y_9\, y_3)$$

die Wiederholungen von C' entsprechen.

3) Ich sage nun, dass unter dieser Voraussetzung der cyklischen Substitution C:

$$y_1' = y_4, \quad y_4' = y_5, \quad y_5' = y_9, \quad y_9' = y_3, \quad y_3' = y_1$$

nothwendig die cyklische Vertauschung C' selbst, nicht irgend eine Wiederholung derselben entspricht. Denn sei etwa:

$$\frac{A_1}{A_0} = R\,(y_1, y_4, y_5, y_9, y_3),$$

*) Wie sich das analoge Theorem bei beliebigem Transformationsgrade gestaltet, beabsichtige ich demnächst zu zeigen. [illegible]

wo R eine rationale Function von nullter Dimension sein soll. Multipliciren wir jetzt, der Collineation S entsprechend, jedes y_{k^2} mit ϱ^{k^2}, so erhält R, nach Voraussetzung, irgend eine elfte Einheitswurzel ϱ^ν als Factor. Nun bilden wir, indem wir die Collineation C anwenden:

$$R(y_4, y_5, y_9, y_3, y_1).$$

Schreiben wir jetzt statt y_{k^2} bez. $\varrho^{k^2} \cdot y_{k^2}$, so muss $\varrho^{4\nu}$ als Factor vortreten. Daher kann $R(y_4, y_5, y_9, y_3, y_1)$ nur gleich $\frac{A_4}{A_0}$ sein, was zu beweisen war.

4) Die fünf Punkte I, IV, V, IX, III (vergl. § 7.) waren auf der y-Curve dadurch charakterisirt, dass sie gleichzeitig bei der Collineation S (und ihren Wiederholungen) ungeändert bleiben. Ihnen werden auf der Curve der A (wenn diese geometrische Redeweise gestattet ist!) fünf Punkte entsprechen, welche die Substitution S' zulassen. *Offenbar sind es diejenigen fünf Punkte, in denen A_0 und vier der übrigen A verschwinden.* Denn erstens bleiben diese Punkte, wie evident ist, bei der Collineation S' ungeändert, und zweitens gehören sie der Curve der A an. Hebt man nämlich aus den Ausdrücken rechter Hand in (30) zunächst den gemeinsamen Factor $q^{\frac{1}{132}}$ fort und setzt dann $q = 0$, so erhält man

$$A_0 = 0, \quad A_1 \gtrless 0, \quad A_4 = A_5 = A_9 = A_3 = 0,$$

so dass unsere Behauptung für einen der fünf Punkte richtig ist; aus dem einen Punkte gehen aber die vier anderen durch die cyklische Vertauschung C' hervor. Ich werde diese Punkte I′, IV′, V′, IX′, III′ nennen.

5) Den Bemerkungen 2), 3) zufolge kann man den Punkt I einem beliebigen der Punkte I′ · · · III′ zuordnen; hat man aber z. B. I dem IV′ entsprechend gesetzt, so correspondiren IV, V, IX, III nothwendig dem V′, IX′, III′, I′.

6) A_0 kann nur in den Punkten I′ · · · III′ zu Null werden. Denn wenn A_0 gleich Null ist, so ist nach Gch. (29) eine der Wurzeln z gleich Null, also, nach (28), $\Delta = 0$ oder $J = \infty$. Es giebt 60 Punkte $J = \infty$, aber nur in 5 derselben kann die einzelne Wurzel z gleich Null sein. Denn in den 5 Punkten I′ · · · III′ verschwindet, (29) zufolge, nur z_∞, keine der anderen Wurzeln z_ν.

7) Nachdem ich in (30) rechter Hand den gemeinsamen Factor $q^{\frac{1}{132}}$ weggehoben, will ich $q^{\frac{2}{11}} = -ds$ setzen. Dann erweisen sich die

$$A_0, A_1, A_4, A_5, A_9, A_3$$

in erster Annäherung proportional zu:

$$- ds^5,\ 1,\ - ds^7,\ - ds^2,\ ds^{15},\ ds.$$

Dies giebt folgende Tabelle für das Verhalten der A in den Punkten $I' \cdots III'$:

(32)

	A_0	A_1	A_4	A_5	A_9	A_3
I′	$-ds^5$	1	$-ds^7$	$-ds^2$	$+ds^{15}$	$+ds$
IV′	$-ds^5$	$+ds$	1	$-ds^7$	$-ds^2$	$+ds^{15}$
V′	$-ds^5$	$+ds^{15}$	$+ds$	1	$-ds^7$	$-ds^2$
IX′	$-ds^5$	$-ds^2$	$+ds^{15}$	$+ds$	1	$-ds^7$
III′	$-ds^5$	$-ds^7$	$-ds^2$	$+ds^{15}$	$+ds$	1

8) *Die Curve der A hat die 25^{te} Ordnung.* Denn die Summe der Exponenten von ds in der auf A_0 bezüglichen Colonne der vorstehenden Tabelle ist 25. Aber auch die Summe der Exponenten von ds in einer auf ein beliebiges anderes A bezüglichen Colonne ist 25. *Also werden die anderen A ebenfalls ausser in den Punkten $I' \cdots III'$ nirgendwo gleich Null.*

Insbesondere ergiebt sich:

$$A_0^5 + A_1 A_4 A_5 A_9 A_3 = 0, \tag{33}$$

eine Relation, von der Brioschi gelegentlich Gebrauch macht*).

9) Man bilde jetzt folgende Verhältnisse der y:

$$\frac{y_4}{y_5},\ \frac{y_5}{y_9},\ \frac{y_9}{y_3},\ \frac{y_3}{y_1},\ \frac{y_1}{y_4}.$$

Da die y nirgendwo ausser in den Punkten $I \cdots III$ Null werden, so erhält man für das Null- und Unendlichwerden dieser Functionen folgende Tabelle (vergl. (14)):

(34)

I	$+dt^4$	$+dt^5$	$-dt^{-2}$	$-dt^3$	$+dt^{-10}$
IV	$+dt^{-10}$	$+dt^4$	$+dt^5$	$-dt^{-2}$	$-dt^3$
V	$-dt^3$	$+dt^{-10}$	$+dt^4$	$+dt^5$	$-dt^{-2}$
IX	$-dt^{-2}$	$-dt^3$	$+dt^{-10}$	$+dt^4$	$+dt^5$
III	$+dt^5$	$-dt^{-2}$	$-dt^3$	$+dt^{-10}$	$+dt^4$

*) Sopra una classe di equazioni modulari. Annali di Matematica, ser. 2, t. IX; p. 167 ff.

10) Andererseits bilde man folgende Verhältnisse der A:

$$-\frac{A_0}{A_1},\quad -\frac{A_0}{A_4},\quad -\frac{A_0}{A_5},\quad -\frac{A_0}{A_9},\quad -\frac{A_0}{A_3}.$$

Sie werden nur in den Punkten I' ··· III' Null oder unendlich, und zwar findet man aus (32) folgendes Schema:

(35)

I'	$+ds^5$	$-ds^{-2}$	$-ds^3$	$+ds^{-10}$	$+ds^4$
IV'	$+ds^4$	$+ds^5$	$-ds^{-2}$	$-ds^3$	$+ds^{-10}$
V'	$+ds^{-10}$	$+ds^4$	$+ds^5$	$-ds^{-2}$	$-ds^3$
IX'	$-ds^3$	$+ds^{-10}$	$+ds^4$	$+ds^5$	$-ds^{-2}$
III'	$-ds^{-2}$	$-ds^3$	$+ds^{-10}$	$+ds^4$	$+ds^5$

11) Jetzt ordne man dem I das IV', und also, nach 5), dem IV, V, IX, III resp. das V', IX', III', I' zu. Dann werden, wie ein Blick auf die Tabellen lehrt,

$$\frac{y_4}{y_5},\quad \frac{y_5}{y_9},\quad \frac{y_9}{y_3},\quad \frac{y_3}{y_1},\quad \frac{y_1}{y_4}$$

und

$$-\frac{A_0}{A_1},\quad -\frac{A_0}{A_4},\quad -\frac{A_0}{A_5},\quad -\frac{A_0}{A_9},\quad -\frac{A_0}{A_3}$$

an entsprechenden Stellen und in demselben Maasse Null und Unendlich, und sind demnach resp. einander gleich zu setzen. *Man hat also folgende Formeln, die das von uns gestellte Problem erledigen und die in §. 10. zusammengestellten Resultate im angegebenen Sinne ergänzen:*

$$(36)\qquad \frac{y_4}{y_5} = -\frac{A_0}{A_1},\quad \frac{y_5}{y_9} = -\frac{A_0}{A_4},\quad \frac{y_9}{y_3} = -\frac{A_0}{A_5},\quad \frac{y_3}{y_1} = -\frac{A_0}{A_9},$$
$$\frac{y_1}{y_4} = -\frac{A_0}{A_3}.$$

Ebenhausen, den 15. August 1879.