Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

In meiner Abhandlung*): „Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern" — habe ich u. a. besonders den Satz urgirt**), dass die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(1)\qquad c_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\varrho} = \frac{d_\nu}{M_\nu^\varrho} \quad (\text{wo } M_{\nu+1} \geqq M_\nu, \quad M_\infty = \infty)$$

für jedes noch so kleine positive ϱ *convergirt*, während der Ausdruck:

$$(2)\qquad d_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}$$

das allgemeine Glied einer *divergenten* Reihe bildet; und ich habe darauf hingewiesen, dass dieser Satz mir als der eigentliche Schlüssel zum tieferen Verständnisse der gesammten Convergenztheorie für Reihen mit positiven Gliedern erscheint. Denn in der That lassen sich daraus nicht nur alle bekannten Convergenzkriterien herleiten und erheblich verallgemeinern, sondern er liefert auch die Möglichkeit, den wahren inneren Zusammenhang zwischen den sogenannten Kriterien erster und zweiter Art einzusehen und namentlich das in seiner merkwürdigen Allgemeinheit bisher völlig isolirt erscheinende *Kummer'sche Convergenzkriterium* als natürliches Glied einer consequenten allgemeinen Convergenztheorie zu erkennen.

Weitere Untersuchungen über unendliche Reihen haben mir nun gezeigt, dass die Bedeutung des obigen Satzes damit noch keineswegs erschöpft ist, dass sich dieselbe vielmehr auch auf die Theorie gewisser, im allgemeinen nur *bedingt convergirender* Reihen, nämlich der sogenannten Dirichlet'schen erstreckt. Dabei sollen — nach

---

*) Math. Ann. Bd. XXXV, p. 297 ff.

**) a. a. O. p. 329.

dem Vorgange des Herrn Dedekind*) — unter letzterer Bezeichnung Reihen von der Form:

$$\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$$

verstanden werden, wo die M_ν wiederum positive, mit ν niemals abnehmende Grössen mit dem Grenzwerthe ∞ bedeuten, während die a_ν ganz beliebige reelle oder complexe Grössen vorstellen. Die beiden Hauptaufgaben, zu deren Behandlung diese Reihen Anlass bieten, nämlich:

1) Hinreichende Bedingungen anzugeben, unter welchen dieselben für $\varrho > 0$ convergiren bezw. divergiren;

2) Die Grenzwerthe ihrer Summen für $\varrho = 0$ zu untersuchen —

lassen sich auf Grundlage des obigen Satzes und auch im übrigen völlig elementar in weiterem Umfange lösen, als dies bisher auf minder einfachem Wege, nämlich mit Hülfe der Integralrechnung geschehen ist.

§ 1.

Ein allgemeines Kriterium für die Convergenz und Divergenz der Reihe $\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$.

Ersetzt man in dem Ausdrucke (1) M_ν durch M_ν^q, wo q *beliebig positiv* sein soll, und schreibt im Nenner statt des Exponenten $q\varrho$, welcher ja an die einzige Bedingung gebunden ist, wesentlich positiv zu sein, wieder ϱ, so folgt, dass auch die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$\frac{M_{\nu+1}^q - M_\nu^q}{M_{\nu+1}^q M_\nu^\varrho}$$

für $\varrho > 0$ stets *convergirt.*

Zerlegt man sodann ϱ irgendwie in zwei wesentlich positive Bestandtheile $\varrho_1 + \varrho_2$ und beachtet, dass für jedes endliche, wenn auch noch so grosse positive p:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lg^p M_n}{M_n^{\varrho_2}} = 0$$

ist, so ergiebt sich, dass auch der Ausdruck:

$$\frac{M_{\nu+1}^q - M_\nu^q}{M_{\nu+1}^q M_\nu^\varrho} \cdot \lg^p M_\nu \quad (q > 0, \ \varrho > 0, \ p < \infty) \tag{3}$$

das allgemeine Glied einer *convergenten* Reihe bildet.

*) Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune-Dirichlet, p. 379.

Ich führe nun die Bezeichnungen ein:

$$A_n^{(\varkappa)} = \sum_0^n {}^\nu a_\nu M_\nu^\varkappa, \quad A^{(\varkappa)} = A_\infty^{(\varkappa)} = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu M_\nu^\varkappa,$$

wo $\varkappa$ eine beliebige positive oder negative Zahl einschliesslich der Null bedeutet; dabei soll in dem letzteren Falle statt $A_n^{(0)}$, $A^{(0)}$ etwas kürzer A_n, A geschrieben werden.

Dies vorausgeschickt, handelt es sich zunächst darum, die Convergenz bezw. Divergenz der Reihe

$$A^{(-\varrho)} = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu M_\nu^{-\varrho}$$

für $\varrho > 0$ zu untersuchen.

In Folge der für jedes beliebige σ geltenden Identität:

$$a_\nu M_\nu^{-\varrho} = (a_\nu M_\nu^\sigma) \,.\, M_\nu^{-(\varrho+\sigma)}$$

ergiebt sich durch partielle Summation:

$$(4) \qquad A_n^{(-\varrho)} = \sum_0^{n-1} {}^\nu A_\nu^{(\sigma)} \{ M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{-(\varrho+\sigma)} \} + A_n^{(\sigma)} M_n^{-(\varrho+\sigma)},$$

oder anders geschrieben:

$$(5) \quad A_n^{(-\varrho)} = \sum_0^{n-1} {}^\nu \frac{A_\nu^{(\sigma)}}{M_\nu^{\varepsilon\varrho+\sigma} \lg^p M_\nu} \left\{ \frac{M_{\nu+1}^{\varrho+\sigma} - M_\nu^{\varrho+\sigma}}{M_{\nu+1}^{\varrho+\sigma} M_\nu^{(1-\varepsilon)\varrho}} \lg^p M_\nu \right\} + \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varrho+\sigma}}.$$

Alsdann zeigt die Vergleichung mit dem Ausdrucke (3), dass der eingeklammerte Factor unter dem Summationszeichen das allg. Glied einer *convergenten* Reihe bildet, wenn über die bisher völlig willkürlichen Zahlen σ und ε derartig verfügt wird, dass:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varrho + \sigma > 0 & \text{also:} \quad \sigma > -\varrho, \\ 1 - \varepsilon > 0 & \text{--} \qquad \varepsilon < 1. \end{cases}$$

Daher wird die fragliche Summe für $n = \infty$ convergiren, sobald der andere Factor, nämlich:

$$\frac{A_\nu^{(\sigma)}}{M_\nu^{\varepsilon\varrho+\sigma} \lg^p M_\nu}$$

stets unter einer endlichen Grenze bleibt. Da unter dieser letzteren Voraussetzung das abgesonderte Glied des Ausdruckes (5):

$$\frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varrho+\sigma}} = \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varepsilon\varrho+\sigma} \lg^p M_n} \cdot \frac{\lg^p M_n}{M_n^{(1-\varepsilon)\varrho}}$$

für $n = \infty$ offenbar verschwindet, so folgt zugleich aus Gl. (4), dass

(7) $$A^{(-\varrho)} = \sum_0^\infty a_\nu M_\nu^{-\varrho} = \sum_0^\infty A_\nu^{(\sigma)} \{M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{-(\varrho+\sigma)}\}$$

wird, wobei die rechts stehende Reihe *unbedingt* convergirt.

Um auch ein *Divergenz*kriterium für die betreffende Reihe zu gewinnen, setze man Gl. (4) in die Form:

(8) $$A_n^{(-\varrho)} = \sum_0^{n-1} \frac{A_\nu^{(\sigma)}}{M_\nu^{\varrho+\sigma}} \cdot \frac{M_{\nu+1}^{\varrho+\sigma} - M_\nu^{\varrho+\sigma}}{M_{\nu+1}^{\varrho+\sigma}} + \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varrho+\sigma}}$$

und man erkennt unter Beachtung des Ausdruckes (2), dass diese Summe für $n = \infty$ divergent wird, wenn:

$$\frac{A_\nu^{(\sigma)}}{M_\nu^{\varrho+\sigma}}$$

stets von Null verschieden ist.

Durch Zusammenfassung dieser Resultate ergiebt sich der folgende Satz:

(I) *Die Reihe* $A^{(-\varrho)} = \sum_0^\infty a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ *convergirt für ein bestimmtes positives* ϱ *in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung, also zum mindesten bedingt, und ihre Summe ist gleich derjenigen der unbedingt convergirenden Reihe:*

$$\sum_0^\infty A_\nu^{(\sigma)} \{M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{(\varrho+\sigma)}\},$$

wenn für:

$$\sigma > -\varrho, \quad \varepsilon < 1, \quad p < \infty$$

der Ausdruck:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varepsilon\varrho+\sigma} \lg^p M_n}$$

nicht unendlich wird.

Die Reihe divergirt, wenn:

$$\lim \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varrho+\sigma}}$$

nicht Null wird.

Dieses wegen der grossen Willkürlichkeit der mit ϱ, σ, ε, p bezeichneten Grössen ausserordentlich allgemeine Kriterium nimmt verschiedene einfachere und darum in vielen Fällen brauchbarere Formen an, wenn man diese Grössen in geeigneter Weise specialisirt. Insbesondere erhält man offenbar ein von ϱ unabhängiges und daher für *jedes* noch so kleine positive ϱ geltendes *Convergenz*kriterium, falls man $\varepsilon = 0$ annimmt und demgemäss die Bedingung $\sigma > -\varrho$ durch $\sigma > 0$ ersetzt, also:

(Ia) *Die Reihe* $A^{(-\varrho)} = \sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ *convergirt für jedes positive* ϱ, *und man hat:*

$$A^{(-\varrho)} = \sum_0^\infty A_\nu^{(\sigma)} \left\{ M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{-(\varrho+\sigma)} \right\},$$

wenn für irgend ein positives σ:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|A_n^{(\sigma)}|}{M_n^\sigma \lg^p M_n} < \infty$$

ist.

Und diese Convergenzbedingung geht durch die specielle Wahl $\sigma = 0$ über in:

(Ib)
$$\lim_{n=\infty} \frac{\left| \sum_0^n {}^{\nu} a_\nu \right|}{\lg^p M_n} < \infty,$$

wobei dann zugleich

$$\sum a_\nu M_\nu^{\varrho} = \sum A_\nu \left\{ M_\nu^{-\varrho} - M_{\nu+1}^{-\varrho} \right\}$$

*wird.**)

Nimmt man in (I) $\sigma = 1$, $\sigma = 0$, so folgt:

(Ic) *Die Reihe* $A^{(-1)} = \sum a_\nu M_\nu^{-1}$ *ist convergent und man hat:*

$$\sum a_\nu M_\nu^{-1} = \sum A_\nu \left\{ M_\nu^{-1} - M_{\nu+1}^{-1} \right\},$$

wenn für $\varepsilon < 1$, $p < \infty$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|A_n|}{M_n^\varepsilon \lg^p M_n} < \infty$$

ist; sie divergirt, falls:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|A_n|}{M_n} > 0.$$

---

*) Setzt man in (Ia) $a_\nu = 1$, so folgt:

Wenn $\sum M_\nu^{-\varrho}$ *nicht für jedes noch so kleine positive* ϱ *convergirt, so kann*

$$\lim \frac{\sum_0^n {}^{\nu} M_\nu^\sigma}{M_n^\sigma \lg^p M_n}$$

für keinen Werth $\sigma > 0$ *und* $p < \infty$ *einen endlichen Grenzwerth besitzen.*

Ersetzt man ferner in (I) a_ν durch $a_\nu M_\nu^{-\sigma}$, so verwandelt sich offenbar $A_\nu^{(\sigma)}$ in A_ν, und es geht daher das betreffende *Con*vergenzkriterium*) in das folgende über:

(II) *Die Reihe* $A^{(-\varrho-\sigma)} = \sum a_\nu M_\nu^{-(\varrho+\sigma)}$ *convergirt für* $\varrho > 0$, $\sigma > -\varrho$, *und man hat:*

$$A^{(-\varrho-\sigma)} = \sum A_\nu \{M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{-(\varrho+\sigma)}\},$$

wenn:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|A_n|}{M_n^{\varepsilon\varrho+\sigma} \lg^p M_n} < \infty \quad \textit{für:} \quad \varepsilon < 1, \ p < \infty.$$

Und hieraus speciell für $\sigma = 1$, $\varepsilon = 0$:

(IIa) *Die Reihe* $A^{(-1-\varrho)} = \sum a_\nu M_\nu^{-(1+\varrho)}$ *convergirt für jedes positive* ϱ, *und man hat:*

$$A^{(-1-\varrho)} = \sum A_\nu \{M_\nu^{-(1+\varrho)} - M_{\nu+1}^{-(1+\varrho)}\},$$

wenn für $\varepsilon < 1$, $p < \infty$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|A_n|}{M_n \lg^p M_n} < \infty$$

ist. —

Von den hier angeführten Sätzen hat Herr Dedekind das Convergenzkriterium (Ia) für $p = 0$ und (Ib) für $p = 1$ mit Hülfe von bestimmten Integralen abgeleitet**). Ferner geht (IIa) für $M_\nu = \nu$, $p = 0$ in einen von Herrn Hölder***) bewiesenen specielleren Satz über.

§ 2.

Ueber den Grenzwerth des Ausdruckes $A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma}$ für $n = \infty$.

Die Willkürlichkeit des Exponenten σ in den Kriterien (I) und (Ia) des vorigen Paragraphen lässt vermuthen, dass der dort auftretende Grenzwerth $A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = M_n^{-\sigma} \sum_0^n {}_\nu\, a_\nu M_\nu^\sigma$ $(n = \infty)$ im Wesentlichen von σ unabhängig ist. In dieser Hinsicht gilt nun der folgende Satz†):

*) Für das Divergenzkriterium liefert diese Substitution offenbar nichts Neues.

**) a. a. O. Supplement IX, § 144.

***) Math. Ann. Bd. XX, p. 545.

†) cf. Dedekind, a. a. O.

Lehrsatz I. *Bleibt* $\lim A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma}$ *für irgend einen positiven Werth* $\sigma = s$ *unter einer endlichen Grenze, so gilt das Gleiche für jeden positiven Werth* σ*; und — dem Falle* $\sigma = 0$ *entsprechend — bleibt* $\lim \frac{A_n}{\lg M_n}$ *unter einer endlichen Grenze.*

Beweis. Es ist:

$$A_n^{(s)} M_n^{-s} = M_n^{-s} \sum_0^n {}_\nu\, a_\nu M_\nu^s = M_n^{-\sigma} \sum_0^n {}_\nu\, a_\nu M_\nu^s M_n^{\sigma-s},$$

$$A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = M_n^{-\sigma} \sum_0^n {}_\nu\, a_\nu M_\nu^\sigma = M_n^{-\sigma} \sum_0^n {}_\nu\, a_\nu M_\nu^s M_\nu^{\sigma-s}$$

und daher:

$$A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} - A_n^{(s)} M_n^{-s} = M_n^{-\sigma} \sum_0^n {}_\nu\, a_\nu M_\nu^s (M_\nu^{\sigma-s} - M_n^{\sigma-s}),$$

woraus durch partielle Summation:

$$(9) \qquad A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} - A_n^{(s)} M_n^{-s} = M_n^{-\sigma} \sum_0^{n-1} {}_\nu\, A_\nu^{(s)} (M_\nu^{\sigma-s} - M_{\nu+1}^{\sigma-s}).$$

Hierbei verschwinden rechts diejenigen Glieder, für welche $M_{\nu+1} = M_\nu$ ist. Die übrig bleibenden transformirt man mit Hülfe der Identität:

$$M_\nu^{\sigma-s} - M_{\nu+1}^{\sigma-s} = \frac{M_\nu^{\sigma-s} - M_{\nu+1}^{\sigma-s}}{M_\nu^\sigma - M_{\nu+1}^\sigma} (M_\nu^\sigma - M_{\nu+1}^\sigma)$$

$$= M_\nu^{-s} \cdot \frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma} - 1} (M_\nu^\sigma - M_{\nu+1}^\sigma),$$

sodass sich ergiebt:

$$(10) \qquad A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} - A_n^{(s)} M_n^{-s}$$

$$= M_n^{-\sigma} \sum_0^{n-1} {}_\nu\, (A_\nu M_\nu^{-s}) \frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma} - 1} (M_\nu^\sigma - M_{\nu+1}^\sigma).$$

Da nun $A_\nu M_\nu^{-s}$ nach Voraussetzung stets unter einer endlichen Grenze bleibt, und das Gleiche für den Ausdruck

$$\frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma} - 1}$$

evident ist*), so folgt aus Gl. (10), dass:

$$|A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} - A_n^{(s)} M_n^{-s}| < C \cdot M_n^{-\sigma} \sum_0^{n-1}{}^{\nu} (M_{\nu+1}^{\sigma} - M_\nu^{\sigma}) < C,$$

(wo C eine positive, endliche Grösse bedeutet), mithin $\lim A_n^{\sigma} M_n^{(-\sigma)}$ mit $\lim A_n^{(s)} M_n^{-s}$ endlich bleibt.

Hieraus ergiebt sich zunächst, dass unter der gemachten Voraussetzung insbesondere auch

$$\lim A_n^{(1)} M_n^{-1}$$

endlich bleibt, und man hat daher, um den zweiten Theil des obigen Satzes zu beweisen, nur noch zu zeigen, dass diese letztere, etwas speciellere Voraussetzung stets auch die Endlichkeit von $\lim \frac{A_n}{\lg M_n}$ nach sich zieht.

Setzt man:

$$A_\nu^{(1)} M_\nu^{-1} = G_\nu^{(1)} \quad \text{und} \quad |G_\nu^{(1)}| \leqq G,$$

so folgt aus

$$A_\nu^{(1)} = G_\nu^{(1)} M_\nu, \quad A_{\nu-1}^{(1)} = G_{\nu-1}^{(1)} M_{\nu-1}$$

durch Subtraction:

$$\begin{aligned} a_\nu M_\nu &= G_\nu^{(1)} M_\nu - G_{\nu-1}^{(1)} M_{\nu-1} \\ &= G_{\nu-1}^{(1)} (M_\nu - M_{\nu-1}) + (G_\nu^{(1)} - G_{\nu-1}^{(1)}) M_\nu, \end{aligned}$$

und hieraus durch Division mit M_ν und Summation über $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_0^n{}^{\nu} a_\nu = \sum_0^{n-1} G_\nu^{(1)} \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} + G_n^{(1)} - G_0^{(1)}. \tag{11}$$

Da nun bekanntlich**):

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} \leqq \lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu,$$

so wird:

---

*) Dies gilt insbesondere auch, wenn $\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}$ durchweg oder stellenweise mit ν über alle Grenzen wächst, da der Exponent σ im Nenner stets grösser ist, als der entsprechende Exponent $\sigma - s$ im Zähler; desgl. wenn $\lim \frac{M_{n+1}}{M_n} = 1$ wird, in welchem Falle der fragliche Ausdruck den Grenzwerth $\frac{\sigma - s}{\sigma}$ besitzt — cf. Lehrsatz II.

**) Math. Ann. Bd. XXXV, p. 317, Formel (d).

$$|A_n| = \left|\sum_0^n {}^\nu a_\nu\right| \leqq |a_0| + G(\lg M_n - \lg M_0) + 2G$$

und somit bleibt $\dfrac{A_n}{\lg M_n}$ endlich. —

Zusatz. Es verdient bemerkt zu werden, dass der eben bewiesene Satz nicht ohne Weiteres umkehrbar ist, d. h. man darf aus der Endlichkeit von $\lim \dfrac{A_n}{\lg M_n}$ *keineswegs* stets auch auf diejenige von $\lim A_n^{(s)} M_n^{-s}$ schliessen, wie sich sofort ergiebt, wenn man das soeben benützte Beweisverfahren umzukehren versucht.

Der zuletzt bewiesene Satz nimmt eine noch prägnantere Form an, wenn der fragliche Grenzwerth nicht blos schlechthin endlich, sondern auch bestimmt ist, und wenn man ausserdem die Grössen M_ν der Beschränkung unterwirft, dass $\lim \dfrac{M_{n+1}}{M_n}$ für $n = \infty$ einen bestimmten Werth c (natürlich $\geqq 1$) besitzen oder unendlich gross werden soll. Es ergiebt sich nämlich:

Lehrsatz II. *Ist*

$$(12) \qquad \lim \frac{M_{n+1}}{M_n} = c, \quad \textit{wo zunächst} \quad c > 1$$

und für irgend ein bestimmtes $s > 0$:

$$(13) \qquad \lim A_n^{(s)} M_n^{-s} = G^{(s)},$$

so hat man für jedes $\sigma > 0$:

$$(14) \qquad \lim A_n^{(\sigma)} M^{-\sigma} = G^{(\sigma)} = \frac{1 - c^{-s}}{1 - c^{-\sigma}} G^{(s)},$$

und es tritt im Falle $\sigma = 0$ *an die Stelle dieser Relation die folgende:*

$$(15) \qquad \lim \frac{A_n}{\lg M_n} = \frac{1 - c^{-s}}{\lg c} G^{(s)} = \frac{1 - c^{-1}}{\lg c} G^{(1)}.$$

Für den Grenzfall $c = 1$ *reduciren sich diese Beziehungen auf:*

$$(14a) \qquad \lim A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = G^{(\sigma)} = \frac{s}{\sigma} G^{(s)},$$

$$(15a) \qquad \lim \frac{A_n}{\lg M_n} = s G^{(s)} = G^{(1)}$$

und für den anderen Grenzfall $c = \infty$:

$$(14b) \qquad \lim A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = G^{(\sigma)} = G^{(s)},$$

$$(15b) \qquad \lim \frac{A_n}{\lg M_n} = 0. —$$

Beweis. Sondert man von der rechts stehenden Reihe in Gl. (9) die ersten m Glieder ab und bezeichnet deren Summe mit S_{m-1}, so wird:

$$(16)\quad A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} - A_n^{(s)} M_n^{-s} = M_n^{-\sigma} S_{m-1} + M_n^{-\sigma} \sum_m^{n-1} {}_\nu A_\nu^{(s)} (M_\nu^{\sigma-s} - M_{\nu+1}^{\sigma-s}).$$

Das zweite Glied der rechten Seite lässt sich dann analog wie in Gl. (10) in die Form bringen:

$$M_n^{-\sigma} \sum_m^{n-1} {}_\nu A_\nu^{(s)} M_\nu^{-s} \frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma} - 1} (M_\nu^\sigma - M_{\nu+1}^\sigma).$$

Da nun:

$$\lim \frac{\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma} - 1} \begin{cases} = \dfrac{c^{\sigma-s} - 1}{c^\sigma - 1} = \dfrac{c^{-s} - c^{-\sigma}}{1 - c^{-\sigma}} & \text{für } c > 1, \\ = \dfrac{\sigma - s}{\sigma} \;{}^{*)} \;\ldots\ldots & \text{für } c = 1, \\ = 0 \;\ldots\ldots & \text{für } c = \infty \end{cases}$$

---

*) Dies folgt aus der bekannten Relation:

$$\lim \frac{(1+\delta)^\varrho - 1}{\delta} = \varrho \quad (\text{für } \delta = 0).$$

Da dieselbe für meine ganze Convergenztheorie geradezu fundamental ist, und mit Rücksicht auf die noch in § 3 aus der nämlichen Grenzwerthrelation zu ziehenden Schlüsse, möchte ich über deren Herleitung hier noch folgendes bemerken.

Wie ich im § 2 meiner Abhandlung über allgemeine Convergenztheorie ausdrücklich erwähnt habe (a. a, O. p. 315), erscheint es mir methodisch zweckmässig, die erforderlichen Hülfsformeln ohne die Anwendung von Beziehungen zwischen *speciellen* Reihenformen (Exponentialreihe etc.), lediglich von der Definition

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

ausgehend, zu entwickeln. Um nun den hier in Frage kommenden Grenzwerth auf derselben Basis, also *ohne* Anwendung der Binomialreihe zu bestimmen, gehe ich aus von den bekannten Beziehungen (a. a. O. p. 316, Gl. (a) und (b)):

$$(1)\qquad x < e^x - 1 < \frac{x}{1-x},$$

$$(2)\qquad \frac{x}{1+x} < \lg(1+x) < x,$$

welche sämmtlich zu gleicher Zeit befriedigt werden, wenn $|x| < 1$.

Es sei nun ϱ eine *positive* endliche Zahl, etwa $\varrho \leqq r$; ferner soll δ gleichfalls positiv und zwar von vornherein so klein angenommen werden, dass $r\delta < 1$ — also um so mehr $r \lg(1+\delta) < 1$ — wird. Wegen:

$$(1+\delta)^\varrho = e^{\varrho \lg(1+\delta)}$$

und ausserdem:

$$\lim A_n^{(s)} M_n^{-s} = G^{(s)},$$

so kann man setzen:

$$A_\nu^{(s)} M_\nu^{-s} \frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma} - 1} \begin{cases} = \vartheta_\nu \cdot \frac{c^{-s} - c^{-\sigma}}{1 - c^{-\sigma}} \cdot G^{(s)} & \text{für } c > 1, \\ = \vartheta_\nu \cdot \frac{\sigma - s}{\sigma} \cdot G^{(s)} & \ldots \; c = 1, \\ = \varepsilon_\nu \cdot G^{(s)} & \ldots \; c = \infty, \end{cases}$$

wo ϑ_ν der Einheit, ε_ν der Null durch Wahl einer passenden unteren Grenze für ν beliebig nahe gebracht werden kann. Bezeichnet man also mit $[\vartheta_\nu]_m^{n-1}$ bezw. $[\varepsilon_\nu]_m^{n-1}$ einen gewissen Mittelwerth aus den Grössen ϑ_ν bezw. ε_ν für $\nu = m, \ldots, (n-1)$, so geht. Gl. (16) jetzt in die folgende über:

---

ist nun nach Ungl. (1)

$$(1+\delta)^\varrho - 1 \begin{cases} > \varrho \lg(1+\delta) \\ < \frac{\varrho \lg(1+\delta)}{1 - \varrho \lg(1+\delta)} \end{cases}$$

und somit nach Ungl. (2) *a fortiori:*

$$(1+\delta)^\varrho - 1 \begin{cases} > \frac{\varrho\delta}{1+\delta}, \\ < \frac{\varrho\delta}{1-\varrho\delta} < \frac{\varrho\delta}{1-r\delta}, \end{cases}$$

also:

$$\frac{\varrho}{1+\delta} < \frac{(1+\delta)^\varrho - 1}{\delta} < \frac{\varrho}{1-r\delta}.$$

Daraus folgt nun in der That, dass der fragliche Ausdruck mit $\lim \delta = +0$ der Grenze ϱ zustrebt, und zwar, wie ich ausdrücklich hervorheben will, *gleichmässig* für alle $\varrho \leqq r$; d. h. setzt man etwa:

$$\frac{(1+\delta)^\varrho - 1}{\delta} = (1+\varepsilon) \cdot \varrho,$$

so kann man eine gewisse obere Grenze für δ angeben, welche ausreicht, um $|\varepsilon|$ für alle möglichen Werthe $\varrho \leqq r$ unter eine Grösse von vorgeschriebener Kleinheit herabzudrücken.

Um den betreffenden Ausdruck auch für negative ϱ, desgl. für negative δ zu behandeln, hat man nur zu beachten, dass:

$$\frac{(1+\delta)^{-\varrho} - 1}{\delta} = -\frac{(1+\delta)^\varrho - 1}{\delta} \cdot \frac{1}{(1+\delta)^\varrho}$$

und:

$$\frac{(1-\delta)^\varrho - 1}{\delta} = \frac{\left(1 + \frac{\delta}{1-\delta}\right)^{-\varrho} - 1}{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \frac{1}{1-\delta}$$

gesetzt werden kann.

$$A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = S_{m-1} M_n^{-\sigma} + A_n^{(s)} M_n^{(-s)}$$

$$+ \begin{cases} [\vartheta_\nu]_m^{n-1} \left(1 - \dfrac{1-c^{-s}}{1-c^{-\sigma}}\right) \cdot G^{(s)} \dfrac{M_m^\sigma - M_n^\sigma}{M_n^\sigma} & \text{für } c > 1, \\ [\vartheta_\nu]_m^{n-1} \left(1 - \dfrac{s}{\sigma}\right) \cdot G^{(s)} \dfrac{M_m^\sigma - M_n^\sigma}{M_n^\sigma} \quad \dots\dots & c = 1, \\ [\varepsilon_\nu]_m^{n-1} \cdot G^{(s)} \dfrac{M_m^\sigma - M_n^\sigma}{M_n^\sigma} \quad \dots\dots\dots\dots & c = \infty \end{cases}$$

und da man die endliche Zahl m so fixiren kann, dass für $\nu \geqq m$ ϑ_ν und um so mehr $[\vartheta_\nu]_m^\infty$ beliebig wenig von der Einheit, ε_ν und $[\varepsilon_\nu]_m^\infty$ beliebig wenig von Null abweichen, so folgt schliesslich für $n = \infty$:

$$G^{(\sigma)} = \lim A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} \begin{cases} = \dfrac{1-c^{-s}}{1-c^{-\sigma}} \cdot G^{(s)} & \text{für } c > 1, & (14) \\ = \dfrac{s}{\sigma} \cdot G^{(s)} \quad \dots\dots & c = 1, & (14\text{a}) \\ = G^{(s)} \quad \dots\dots & c = \infty. & (14\text{b}) \end{cases}$$

Um ferner die Richtigkeit von Gl. (15) zu beweisen, hat man zunächst nach Analogie von Gl. (11):

$$(17) \quad \sum_{m+1}^{n} {}^{\nu}\, a_\nu = \sum_{m}^{n-1} {}^{\nu}\, G_\nu^{(1)} \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} + G_n^{(1)} - G_m^{(1)} \quad (\text{wo } G_\nu^{(1)} = A_\nu^{(1)} M_\nu^{-1}).$$

Nun folgt — im Falle $c > 1$ — aus:

$$\lim \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1}} = 1 - c^{-1},$$

$$\lim (\lg M_{n+1} - \lg M_n) = \lg c,$$

dass:

$$\lim \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1}} = \frac{1-c^{-1}}{\lg c} (\lg M_{n+1} - \lg M_n)$$

und dass also gesetzt werden kann:

$$G_\nu^{(1)} \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} = \vartheta_\nu \cdot G^{(1)} \cdot \frac{1-c^{-1}}{\lg c} (\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu),$$

wo $G^{(1)} = \lim G_n^{(1)}$ und ϑ_ν für hinlänglich grosse Werthe von ν der Einheit beliebig nahe kommt. Darnach erhält man:

$$\sum_{m+1}^{n} {}^{\nu}\, a_\nu = [\vartheta_\nu]_m^{n-1} \frac{1-c^{-1}}{\lg c} \cdot G^{(1)} (\lg M_n - \lg M_m) + G_n^{(1)} - G_m^{(1)}$$

und wenn man jetzt auf beiden Seiten die endliche Summe $\sum_0^m {}^\nu a_\nu$ addirt, die ganze Gleichung durch $\lg M_n$ dividirt und $n = \infty$ werden lässt, schliesslich:

(15) $\frac{A_n}{\lg M_n} = \frac{1 - c^{-1}}{\lg c} G^{(1)}$, also auch $= \frac{1 - c^{-s}}{\lg c} G^{(s)}$ $(c > 1)$.

Im Falle $c = 1$ — also $M_{n+1} \cong M_n$ — hat man bekanntlich*):

$$\frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1}} \cong \lg M_{n+1} - \lg M_n,$$

sodass man die Gleichung (17) mit Hülfe der Substitution:

$$G_\nu^{(1)} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} = \vartheta_\nu \cdot G^{(1)} (\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu)$$

transformiren kann, wo ϑ_ν bei passender Wahl von $\nu \geqq m$ der Einheit beliebig nahe kommt. Alsdann wird:

$$\sum_{m+1}^{n} {}^\nu a_\nu = [\vartheta_\nu]_m^{n-1} \cdot G^{(1)} (\lg M_n - \lg M_m) + G_n^{(1)} - G_m^{(1)}$$

und schliesslich:

(15a) $\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = G^{(1)}$, also auch: $= s \cdot G^{(s)}$ $(c = 1)$.

In dem anderen Grenzfalle $c = \infty$ kann man nach Annahme einer beliebig *grossen* positiven Grösse C die Zahl m so fixiren, dass für $\nu \geqq m$:

$$\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} > c$$

also:

$$\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu > \lg C$$

wird. Da überdies:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu} \leqq 1, \text{ also um so mehr: } < \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{\lg C},$$

so folgt aus Gl. (17), dass:

$$\sum_{m+1}^{n} {}^\nu a_\nu < \frac{G'}{\lg C} (\lg M_n - \lg M_m) + G_n^{(1)} - G_m^{(1)},$$

(wenn G' die obere Grenze der $G_\nu^{(1)}$ für $\nu \geqq m$ bedeutet), und da man C von vornherein beliebig gross nehmen kann, schliesslich:

(15b) $\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = 0$ $(c = \infty)$.

---

*) Math. Annalen, Bd. XXV, p. 318, Formel (9).

Zusatz. Die Vergleichung von (14a) und (14b) mit (14), ebenso von (15a) und (15b) mit (15) zeigt, dass sich für die beiden Grenzfälle $c = 1$ und $c = \infty$ genau dieselben Endresultate ergeben, als wenn man in den (zunächst unter der Voraussetzung $1 < c < \infty$ abgeleiteten) Gleichungen (14) und (15) c gegen die Einheit convergiren bezw. in's Unendliche wachsen lässt. In der That ist ja:

$$\lim \frac{1-c^{-s}}{1-c^{-\sigma}} \begin{cases} = \frac{s}{\sigma} & \text{für } c = 1, \\ = 1 & \text{für } c = \infty, \end{cases} \qquad \lim \frac{1-c^{-s}}{\lg c} \begin{cases} = s & \text{für } c = 1, \\ = 0 & \text{für } c = \infty. \end{cases}$$

§ 3.

Ueber den Grenzwerth von $\varrho \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ für $\varrho = +0$.

Wenn die Reihe $\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ für jedes positive ϱ convergent ist, so convergirt sie offenbar um so schwächer, je kleiner ϱ ist. Für $\varrho = 0$ wird sie im Allgemeinen (d. h. wenn nicht zufällig $\sum a_\nu$ an sich convergirt) divergent. Lässt man nun ϱ von der Seite der positiven Zahlen her der Null zustreben, so vollzieht sich dieser Uebergang von der Convergenz zur Divergenz für die Reihe $\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ in der Weise, dass unter gewissen Voraussetzungen $\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ schliesslich proportional mit $\frac{1}{\varrho}$ oder noch schwächer als $\frac{1}{\varrho}$ wächst, sodass also $\varrho \sum a_\nu M_\nu^{\varrho}$ für $\varrho = +0$ einer bestimmten endlichen Grenze bezw. der Null zustrebt. Zur Klarstellung der verschiedenen, hierbei sich ergebenden Modalitäten dienen die folgenden Sätze.

Lehrsatz I. *Setzt man:*

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} = d_\nu \text{ *)},$$

sodass also $\sum d_\nu$ *divergirt*, $\sum d_\nu M_\nu^{-\varrho}$ *convergirt, so ist:*

$$(18) \quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}^{\nu} d_\nu M_\nu^{-\varrho} \begin{cases} = 1 & \textit{wenn: } (1)\ M_{n+1} \underline{\underline{\backsim}} M_n, \\ = \frac{1-c^{-1}}{\lg c} & \phantom{\textit{wenn: }} (2)\ M_{n+1} \underline{\underline{\backsim}} c.M_n \ (c>1), \\ = 0 & \phantom{\textit{wenn: }} (3)\ M_{n+1} \succ M_n. \end{cases}$$

*) Auf diese Form lässt sich bekanntlich das allgemeine Glied *jeder* beliebigen divergenten Reihe bringen, sofern deren Glieder nur der Bedingung genügen $\leqq 1$ zu sein (cf. Math. Ann. Bd. XXV, p. 322).

Beweis. Es ist identisch:

$$\varrho\, d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \varrho \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho} \cdot \frac{M_{\nu+1}^\varrho}{M_{\nu+1}} \cdot \frac{M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho}{M_{\nu+1}^\varrho M_\nu^\varrho}$$

$$= \varrho \cdot \frac{1 - q_\nu^{-1}}{1 - q_\nu^{-\varrho}} (M_\nu^{-\varrho} - M_{\nu+1}^{-\varrho})$$

wo

$$q_\nu = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}.$$

Ist nun ad (1) $q_n \cong 1$, so convergirt der Factor:

$$\frac{1 - q_\nu^{-1}}{1 - q_\nu^{-\varrho}}$$

für unendlich wachsende ν gegen den Werth $\frac{1}{\varrho}$ und zwar *gleichmässig für alle* ϱ*), die unter einer beliebigen endlichen Grenze liegen. Man kann somit eine endliche positive Zahl m derart fixiren, dass — wenn gesetzt wird:

$$\frac{1 - q_\nu^{-1}}{1 - q_\nu^{-\varrho}} = \frac{\vartheta_\nu}{\varrho},$$

ϑ_ν für alle $\nu \geqq m$ und *jedes* ϱ (etwa < 1) um weniger, als eine beliebig kleine vorzuschreibende Grösse von der Einheit abweicht. Alsdann wird aber:

$$\varrho \cdot \sum_m^\infty{}^{\nu} \alpha_\nu M_\nu^{-\varrho} = [\vartheta_\nu]_m^\infty \cdot \sum_m^\infty{}^{\nu} (M_\nu^{-\varrho} - M_{\nu+1}^{-\varrho}) = [\vartheta_\nu]_m^\infty \cdot M_m^{-\varrho}$$

und daher:

$$(18^1) \quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}^{\nu} d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}^{\nu} d_\nu M_\nu^{-\varrho} = 1 \quad (M_{n+1} \cong M_n).$$

Im Falle (2) benütze man die Ungleichungen**):

*) S. d. Fussnote zum vorigen Paragraphen.

**) Es ist nämlich (cf. Math. Ann. Bd. XXV, p. 316):

$$e^{-x} \begin{cases} < \frac{1}{1+x} & (0 < x \leqq \infty), \\ > 1 - x & (0 < x \leqq \infty) \end{cases}$$

also

$$1 - e^{-x} \begin{cases} > \frac{x}{1+x}, \\ < x \quad \text{u. s. f.} \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-e^{-x}} \begin{cases} < \frac{1}{x} + 1, & (0 < x \leqq \infty) \\ > \frac{1}{x}, & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

woraus:

$$\frac{\varrho}{1-q_\nu^{-\varrho}} = \frac{\varrho}{1-e^{-\varrho \lg q_\nu}} \begin{cases} < \frac{1}{\lg q_\nu} + \varrho, \\ > \frac{1}{\lg q_\nu}, \end{cases}$$

(da man wegen der Endlichkeit von $\lim q_n$ ϱ von vornherein so klein annehmen kann, dass die Grenzbedingung für die zweite Ungleichung, nämlich $\varrho \lg q_\nu \leqq 1$, erfüllt ist). Man kann nun, wenn die positive Grösse ε beliebig klein vorgeschrieben wird, eine positive Zahl m so fixiren, dass für $\nu \geqq m$:

$$c - \varepsilon < q_\nu < c + \varepsilon$$

also auch:

$$\frac{\varrho}{1-q_\nu^{\varrho}} \begin{cases} < \frac{1}{\lg (c-\varepsilon)} + \varrho, \\ > \frac{1}{\lg (c+\varepsilon)} \end{cases}$$

und daher:

$$\varrho \cdot \sum_m^\infty {}^\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} \begin{cases} < \frac{1-(c+\varepsilon)^{-1}}{\lg (c-\varepsilon)} \cdot M_m^{-\varrho}, \\ > \left(\frac{1-(c+\varepsilon)^{-1}}{\lg (c+\varepsilon)} + \varrho \right) M_m^{-\varrho}. \end{cases}$$

Hieraus folgt aber — da ε von vornherein beliebig klein gemacht werden kann — schliesslich:

$$(18^2) \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty {}^\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty {}^\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \frac{1-c}{\lg c} \quad (M_{n+1} \underline{\underline{\backsimeq}} c M_n).$$

Im Falle (3), wo $\lim q_n = \infty$, kann man, wenn C positiv und beliebig *gross* angenommen wird, m so fixiren, dass für $\nu \geqq m$

$$q_\nu > C$$

wird. Da hier jedenfalls noch die *erste* der oben benützten Ungleichungen gilt, so wird für $\nu \geqq m$:

$$\frac{1}{1-q_\nu^{-\varrho}} < \frac{1}{\lg q_\nu} + \varrho < \frac{1}{\lg C} + \varrho$$

und da ausserdem:

$$1 - q_\nu^{-1} \leqq 1$$

so folgt zunächst:

$$\varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu\, d_\nu\, M_\nu^{-\varrho} < \frac{1}{\lg C} \cdot M_m^{-\varrho}.$$

Und da C an gar keine obere Grenze gebunden ist, schliesslich:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, d_\nu\, M_\nu^{-\varrho} = 0 \qquad (M_{n+1} > M_n). \tag{18³}$$

Lehrsatz II. *Ist $\lim g_n = g$, so hat man:*

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, g_\nu\, d_\nu\, M_\nu^{-\varrho} = g \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, d_\nu\, M_\nu^{-\varrho} \tag{19}$$

und zwar auch dann, wenn $g_\nu = g_{\nu,\varrho}$ irgendwie von ϱ abhängt, sofern nur $g_{\nu,\varrho}$ mit wachsendem ν für alle positiven Werthe ϱ, die unter einer gewissen endlichen Grenze r liegen, gleichmässig gegen den Werth g convergirt.

Beweis. In Folge der über die Beschaffenheit von g_ν bezw. $g_{\nu,\varrho}$ gemachten Voraussetzung lässt sich eine Zahl m so bestimmen, dass für $\nu \geqq m$:

$$g_\nu = \vartheta_\nu \,.\, g$$

gesetzt werden kann, wo ϑ_ν beliebig wenig von der Einheit abweicht und zwar *gleichmässig* für alle positiven $\varrho < r$. Daraus ergiebt sich zunächst:

$$\sum_m^\infty{}_\nu\, g_\nu d_\nu\, M_\nu^{-\varrho} = [\vartheta_\nu]_m^\infty \cdot g \cdot \sum_m^\infty{}_\nu\, d_\nu\, M_\nu^{-\varrho}$$

und somit:

$$\begin{aligned}\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, g_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} &= \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu\, g_\nu d_\nu\, M_\nu^{-\varrho} \\ &= g \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu\, d_\nu\, M_\nu^{-\varrho}\end{aligned} \tag{19}$$

d. h. mit Benützung von Lehrsatz I:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, g_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} \begin{cases} = g, \\ = g\,\dfrac{1-c^{-1}}{\lg c}, \\ = 0, \end{cases} \tag{19a}$$

wenn:

$$M_{n+1} \cong M_n,$$
$$M_{n+1} \cong c\,M_n \quad (c > 1),$$
$$M_{n+1} \succ M_n.$$

Zusatz. Dieser Satz gilt offenbar auch, falls $\lim g_n = 0$, und behält auch einen Sinn, falls $\lim g_n = \infty$ und $M_{n+1} \cong M_n$ oder $\cong c\,M_n$. Ferner leuchtet ohne weiteres ein, wie derselbe zu modificiren ist, falls $\lim g_n$ nicht bestimmt ist, sondern irgendwelche Unbestimmtheitsgrenzen besitzt.

Folgerungen aus Lehrsatz I und II. 1) Es ist:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^{1+\varrho}} = \left(\frac{M_\nu}{M_{\nu+1}}\right)^\varrho \cdot \frac{d_\nu}{M_\nu^\varrho}$$

folglich nach dem oben gesagten:

$$(20) \quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^{1+\varrho}} \begin{cases} = 1 & \text{wenn:} \quad M_{n+1} \cong M_n, \\ = \dfrac{1 - c^{-1}}{\lg c}, & \phantom{\text{wenn:}} \quad M_{n+1} \cong c\,.\,M_n, \\ = 0 & \phantom{\text{wenn:}} \quad M_{n+1} \succ M_n. \end{cases}$$

Ferner:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu^{1+\varrho}} = \left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right) \cdot \frac{d_\nu}{M_\nu^\varrho}$$

und somit:

$$(21) \quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu^{1+\varrho}} \begin{cases} = 1 & \text{wenn:} \quad M_{n+1} \cong M_n, \\ = \dfrac{c-1}{\lg c} & \phantom{\text{wenn:}} \quad M_{n=1} \cong c.M_n. \end{cases}$$

Setzt man z. B. $M_\nu = a\nu + b$, also $M_{\nu+1} - M_\nu = a$, so ergiebt sich die von Dirichlet bewiesene*) Relation:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(a\nu + b)^\varrho} = \frac{1}{a}$$

und für $M_\nu = 2^\nu$, also $c = 2$:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu 2^{-\nu\varrho} = \frac{1}{\lg 2}.$$

---

*) Crelle's Journal, Bd. 53, p. 130. Der Beweis wird dort durch Vergleichung der betreffenden Reihe mit

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1+\varrho}}$$

geführt.

2) Ersetzt man in Gl. (21) M_ν durch $\lg_\varkappa M_\nu (\varkappa = 1, 2, \ldots)$, so erhält man zunächst:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}^\nu \frac{\lg_\varkappa M_{\nu+1} - \lg_\varkappa M_\nu}{(\lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} \begin{cases} = 1, & \text{wenn: } \lg_\varkappa M_{n+1} \cong \lg_\varkappa M_n, \\ = \dfrac{c-1}{\lg c}, & \lg_\varkappa M_{n+1} \cong c \lg_\varkappa M_n. \end{cases}$$

Nun ist aber, falls $M_{n+1} \cong M_n$, bekanntlich:*)

$$\frac{\lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n}{\lg_\varkappa M_n} \cong \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n \cdot \lg_1 M_n \cdots \lg_\varkappa M_n}.$$

Im Falle $M_{n+1} \cong c\, M_n$ wird $\lg_1 M_{n+1} \cong \lg_1 M_n$ und daher zunächst:

$$\frac{\lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n}{\lg_\varkappa M_n} \cong \frac{\lg_1 M_{n+1} - \lg_1 M_n}{\lg_1 M_n \cdot \lg_2 M_n \cdots \lg_\varkappa M_n}$$

also wegen:

$$\varkappa \lg M_{n+1} - \varkappa \lg M_n \cong \lg c, \qquad \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n} \cong c - 1$$

schliesslich:

$$\frac{\lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n}{\lg_\varkappa M_n} \cong \frac{\lg c}{c-1} \cdot \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n \lg_1 M_n \cdots \lg_\varkappa M_n}.$$

Mithin ergiebt sich in *beiden* Fällen:

$$(22) \qquad \lim_{\varrho=0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}^\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \lg_1 M_\nu \cdots (\lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} = 1 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots).$$

Dagegen muss nach Satz II:

$$(23) \qquad \lim_{\varrho=0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}^\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{(M_\nu \lg_1 M_\nu \cdots \lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} = 0$$

werden, weil:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{(M_\nu \lg_1 M_\nu \cdots \lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} = \frac{1}{(\lg_1 M_\nu \cdots \lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu^{1+\varrho}}$$

und der erste Factor lediglich durch Wahl von v, unabhängig von ϱ beliebig klein gemacht werden kann.

Darnach ist also z. B.

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_2^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu (\lg \nu)^{1+\varrho}} = 1,$$

*) Math. Ann. Bd. XXV, p. 318, Formel (9).

dagegen:

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \cdot \sum_{2}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{(\nu \lg \nu)^{1+\varrho}} = 0.$$

Lehrsatz III. *Ist* $\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = G$ — (also nach § 1, (Ib) der Reihe $\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ convergent), *so wird auch:*

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu M_\nu^{-\varrho} = G, \quad \textit{falls} \quad M_{n+1} \sim M_n.\text{*)}$$

Beweis. Durch partielle Summation ergiebt sich:

$$\varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu M_\nu^{-\varrho} = \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}^{\nu} A_\nu (M_\nu^{-\varrho} - M_{\nu+1}^{-\varrho})$$

oder anders geschrieben:

$$= \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}^{\nu} \frac{A_\nu}{\lg M_\nu} \left\{ \frac{\lg M_\nu}{M_\nu^\varrho} - \frac{\lg M_{\nu+1}}{M_{\nu+1}^\varrho} \right\}$$

$$+ \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}^{\nu} \frac{A_\nu}{\lg M_\nu} \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho}.$$

Die erste Summe rechts lässt sich offenbar in die Form setzen:

$$\varrho \cdot \left[\frac{A_\nu}{\lg M_\nu}\right]_m^\infty \frac{\lg M_m}{M_m^\varrho}$$

ist also endlich und verschwindet folglich mit ϱ, sodass man zunächst erhält:

$$\text{(24)} \quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu M_\nu^{-\varrho} = \left[\frac{A_\nu}{\lg M_\nu}\right]_m^\infty \lim_{\varrho=0} \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}^{\nu} \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho}$$

wo $\left[\frac{A_\nu}{\lg M_\nu}\right]_m^\infty$ durch Wahl von m dem Werthe G beliebig nahe gebracht werden kann. Ist nun zunächst wiederum $M_{n+1} \cong M_n$, so wird:

$$\lg M_{n+1} - \lg M_n \cong \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n}$$

---

*) cf. Dedekind a. a. O. Daselbst ist nur der Fall $M_{n+1} \cong M_n$ behandelt.

und daraus folgt nach Satz II ohne weiteres, dass alsdann:

$$\lim \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho} = 1 \tag{25}$$

ist.

In dem allgemeineren Falle $M_{n+1} \backsim M_n$ (wobei also $\lim \frac{M_{n+1}}{M_n}$ nicht einmal *bestimmt* $= c$, sondern nur *endlich*, also etwa $\leqq c$ zu sein braucht) hat man:

$$\begin{aligned}\varrho \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho} &= \frac{\varrho \cdot \lg \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}}{M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho} \cdot \frac{M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho}{M_{\nu+1}^\varrho M_\nu^\varrho} \quad M_\nu^\varrho \\ &= \frac{\varrho \lg q_\nu}{q_\nu^\varrho - 1} (M_\nu^{-\varrho} - M_{\nu+1}^{-\varrho}).\end{aligned}$$

Mit Benützung der Ungleichungen:

$$e^x \begin{cases} > 1 + x, \\ < \frac{1}{1-x} \end{cases}$$

also:

$$\frac{x}{e^x - 1} \begin{cases} < 1, & (0 < x \leqq \infty) \\ > 1 - x, & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

ergiebt sich daher:

$$\frac{\varrho \lg q_\nu}{q_\nu^\varrho - 1} \begin{cases} < 1, \\ > 1 - \varrho \lg q_\nu > 1 - \varrho c \end{cases}$$

und daher:

$$\varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho} \begin{cases} < M_m^{-\varrho}, \\ > (1 - \varrho c) \cdot M_m^{-\varrho} \end{cases} \tag{26}$$

woraus, in Verbindung mit Gl. (24), schliesslich:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu M_\nu^{-\varrho} = G \left(\text{d. h.} = \lim \frac{A_n}{\lg M_n}\right). \tag{27}$$

Ist $M_{n+1} \underline{\backsim} M_n$ und:

$$\lim \frac{A_n^{(1)}}{M_n} = G$$

so folgt aus Lehrsatz II des § 2, Gl. (15b), dass alsdann

$$\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = \lim \frac{A_n^{(1)}}{M_n}$$

ist — und es wird somit auch:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu M_\nu^{-\varrho} = \lim \frac{A_n^{(1)}}{M_n}.$$

Ersetzt man jetzt a_ν durch $a_\nu M_\nu^{-1}$, sodass also

$$A_n^{(1)} = \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu M_\nu$$

in A_n übergeht, so resultirt der folgende Satz:*)

Lehrsatz IIIa. *Besitzt*

$$\frac{A_n}{M_n} = \frac{\sum_0^n a_\nu}{M_n}$$

für $n = \infty$ *einen bestimmten Grenzwerth* G, *so ist auch*

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu M_\nu^{-(1+\varrho)} = G$$

falls

$$M_{n+1} \underset{=}{\backsim} M_n.$$

NB. Man kann diesen Satz auch leicht direct beweisen, ohne von den Ergebnissen des § 2 Gebrauch zu machen. Man erhält nämlich durch partielle Summation:

$$\sum_m^\infty{}_\nu\, a_\nu M_\nu^{-(1+\varrho)} = \sum_m^\infty{}_\nu\, A_\nu \left(M_\nu^{-(1+\varrho)} - M_{\nu+1}^{-(1+\varrho)}\right)$$

$$= \left[\frac{A_\nu}{M_\nu}\right]_m^\infty \sum_m^\infty{}_\nu\, \frac{M_{\nu+1}^{1+\varrho} - M_\nu^{1+\varrho}}{M_{\nu+1}^{1+\varrho} M_\nu^\varrho}$$

und erkennt sodann, dass:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu\, \frac{M_{\nu+1}^{1+\varrho} - M_\nu^{1+\varrho}}{M_{\nu+1}^{1+\varrho} M_\nu^\varrho} = 1,$$

---

*) Für $M_\nu = \nu$ ergiebt sich wieder ein speciellerer Satz des Herrn Hölder — a. a. O. p. 545.

da:

$$\frac{M_{\nu+1}^{1+\varrho} - M_\nu^{1+\varrho}}{M_{\nu+1}^{1+\varrho}\, M_\nu^\varrho} = \frac{1 - \left(\dfrac{M_\nu}{M_{\nu+1}}\right)^{1+\varrho}}{1 - \dfrac{M_\nu}{M_{\nu+1}}} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}\, M_\nu^\varrho}$$

gesetzt werden kann, wobei der erste Factor für wachsende ν *gleichmässig* gegen den Werth $1 + \varrho$ convergirt.

München, im Februar 1890.