

## TEOREMI SULLE PIRAMIDI DI $n + 1$ VERTICI DELLO SPAZIO AD $n$ DIMENSIONI.

Nota di **Luigi Brusotti**, in Pavia.

---

Adunanza dell'11 giugno 1905.

---

Il Sig. GURADZE nella sua dissertazione dedicata allo studio dei sistemi lineari di forme fondamentali proiettive (secondo REYE), con una rappresentazione analitica per mezzo di forme bilineari binario-ternarie, binario-quaternarie, ternario-quaternarie, viene incidentalmente a stabilire alcuni notevoli teoremi sui triangoli nel piano e sui tetraedri nello spazio ordinario \*).

I teoremi sulle piramidi di  $n + 1$  vertici nello spazio ad  $n$  dimensioni che sono la naturale estensione di quelli dati dal GURADZE vengono dimostrati nella presente Nota con metodo geometrico, ricorrendo specialmente al concetto di involuppo di seconda classe *apolare (conjugato)* ad una quadrica. Collo stesso metodo è dimostrato in modo semplice il teorema di SCHLÄFLI sulle coppie di piramidi di  $n + 1$  vertici polari-reciproche rispetto ad una quadrica dello spazio ad  $n$  dimensioni \*\*).

---

\*) GURADZE, *Die REYE'sche Geometrie der Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde behandelt mittels einer besonderen Art bilinearer Formen* [Inaugural-Dissertation, Breslau, 1900].

\*\*) SCHLÄFLI, *Erweiterung des Satzes, dass zwei polare Dreiecke perspectivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, LXV (1866), pp. 189-197].

Il Prof. BERZOLARI in un lavoro recentissimo: *Sui sistemi di  $n + 1$  rette dello spazio ad  $n$  dimensioni, situate in posizione di SCHLÄFLI* [questi Rendiconti, t. XX (1905), pp. 229-247] dimostra insieme col teorema di SCHLÄFLI anche il suo inverso, mediante un semplice procedimento analitico.

1. Premetto il teorema:

*Se, in uno spazio (lineare) ad  $n$  dimensioni, un fascio di iperpiani proiettante gli  $n + 1$  vertici di una piramide è proiettivo ad una punteggiata sezione colle facce rispettivamente opposte, esiste una, ed in generale una sola, quadrica rispetto alla quale è coniugata la piramide e sono spazii polari-reciproci. l'asse del fascio ed il sostegno della punteggiata.*

Siano  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  i vertici della piramide,  $\alpha_i$  la faccia opposta ad  $A_i$ ,  $\gamma$  uno spazio lineare ad  $n - 2$  dimensioni,  $g$  una retta, e si supponga:

$$(1) \quad \gamma(A_1 A_2 \dots A_{n+1}) \overline{\wedge} g(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}).$$

All'iperpiano generico ma assegnato  $\mu$  del fascio corrisponda nella proiettività (1) il punto  $M$  di  $g$ . Esiste allora una quadrica  $Q$ , ed in generale una sola, rispetto alla quale la data piramide è coniugata ed il punto  $M$  è polo di  $\mu$ . Se  $g'$  è la retta polare di  $\gamma$  rispetto a  $Q$ , si ha:

$$(2) \quad \gamma(A_1 A_2 \dots A_{n+1}) \overline{\wedge} g'(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1})$$

ed anche in (2) a  $\mu$  corrisponde  $M$ ; onde si deduce:

$$(3) \quad g(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}) \overline{\wedge} g'(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}),$$

essendo  $M$  un punto unito di (3). Segue che, se  $g, g'$  sono rette distinte, le punteggiate (3) sono prospettive e nel centro di prospettiva concorrono gli iperpiani  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}$ , contro l'ipotesi che essi siano le facce di una piramide propriamente detta. La  $g'$  coincide quindi con  $g$  e la quadrica  $Q$  soddisfa alle condizioni dell'enunciato. Reciprocamente, se una quadrica soddisfa a tali condizioni, rispetto ad essa è coniugata la piramide ed è  $M$  polo di  $\mu$ , onde la quadrica coincide con  $Q$ . Il teorema è così dimostrato \*).

\*) Una semplice dimostrazione analitica dello stesso teorema è la seguente. Si assuma la piramide come fondamentale supponendo che  $A_i$  sia il punto di coordinate (proiettive, omogenee) tutte nulle all'infuori della  $x_i$ . Nella proiettività posta fra la punteggiata ( $g$ ) ed il fascio ( $\gamma$ ) ai punti di coordinate:

$$y_1 y_2 \dots y_{n+1};$$

$$z_1 z_2 \dots z_{n+1};$$

$$y_1 + z_1, y_2 + z_2 \dots y_{n+1} + z_{n+1}$$

corrispondano rispettivamente gli iperpiani di coordinate:

$$v_1 v_2 \dots v_{n+1};$$

$$w_1 w_2 \dots w_{n+1};$$

$$v_1 + w_1, v_2 + w_2 \dots v_{n+1} + w_{n+1};$$

al punto di coordinate  $y_r + \lambda z_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n + 1$ ) corrisponderà allora l'iperpiano

2. Un fascio di iperpiani si dirà *in involuzione* con una punteggiata di sostegno  $g$ , se la punteggiata sezione del fascio con  $g$  è in involuzione colla data. In particolare se  $g$  si appoggia all'asse  $\gamma$  del fascio in un punto  $P$  ed è quindi con  $\gamma$  in un iperpiano  $\pi$ , il fascio sarà in involuzione colla punteggiata quando è proiettivo a questa in modo che a  $\pi$  corrisponda  $P$ . Un fascio d'iperpiani proiettivo ad una punteggiata si dirà pure in involuzione con questa quando il sostegno della punteggiata giace nell'asse del fascio. Ciò posto dal teorema che precede si deduce il corollario:

*Se, in uno spazio ad  $n$  dimensioni, un fascio d'iperpiani proiettante gli  $n + 1$  vertici di una piramide è proiettivo ad una punteggiata sezione colle facce rispettivamente opposte, il fascio e la punteggiata sono in involuzione \*).*

3. Vengo ora ad enunciare il teorema la cui dimostrazione è il principale oggetto di questa Nota \*\*).

*Date, in uno spazio ad  $n$  dimensioni, due piramidi di  $n + 1$  vertici, per ogni spazio  $\gamma$  ad  $n - 2$  dimensioni esiste una ed in generale una sola retta  $g$  secante le facce delle due piramidi in una punteggiata proiettiva al fascio proiettante da  $\gamma$  i vertici rispettivamente opposti. Il fascio e la punteggiata sono in involuzione.*

di coordinate  $v_r + \lambda w_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n + 1$ ). Ma in particolare al punto  $g\alpha_i$ , pel quale è  $y_i + \lambda z_i = 0$ , onde  $\lambda = -\frac{y_i}{z_i}$ , corrisponde l'iperpiano  $\gamma A_i$  pel quale è  $v_i + \lambda w_i = 0$ , onde  $\lambda = -\frac{v_i}{w_i}$ . Ne segue:

$$\frac{y_i}{z_i} = \frac{v_i}{w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1)$$

od anche:

$$\frac{v_i}{y_i} = \frac{w_i}{z_i} = \rho_i$$

indicando con  $\rho_i$  il valore comune ai due rapporti.

Rispetto alla quadrica:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i x_i^2 = 0,$$

e ad essa sola, è conjugata la piramide e sono ad un tempo spazii polari-reciproci  $g$  e  $\gamma$ .

\*) Per  $n = 2$  si ha in sostanza il noto teorema sull'involuzione determinata dalle coppie di lati opposti di un quadrangolo sopra una retta.

\*\*) Per  $n = 2, 3$  vedi GURADZE loc. cit., pp. 39-47.

Siano infatti:

$$(A) \equiv A_1 A_2 \dots A_{n+1}$$

$$(B) \equiv B_1 B_2 \dots B_{n+1}$$

le due piramidi,  $\alpha_i$  la faccia opposta ad  $A_i$  in  $(A)$ ,  $\beta_i$  la faccia opposta a  $B_i$  in  $(B)$ ,  $\gamma$  uno spazio ad  $n-2$  dimensioni.

Il sistema lineare  $\infty^{n-1}$  delle quadriche passanti per  $\gamma$  e per i vertici di  $(A)$  ed il sistema lineare  $\infty^{n-1}$  delle quadriche passanti per  $\gamma$  e per i vertici di  $(B)$  in generale non hanno alcuna quadrica in comune, quindi *appartengono* ad un sistema  $S$  lineare  $\infty^{2n-1}$ . Gli involuppi di seconda classe apolari a tutte le quadriche di  $S$  formano dunque un si-

stema  $\Sigma$  lineare  $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ . Fanno parte di  $\Sigma$  gli involuppi che si spezzano in coppie di stelle coi centri coniugati rispetto a tutte le quadriche di  $S$  e quindi in particolare coi centri in punti arbitrari dello spazio  $\gamma$ . Segue che  $\Sigma$  contiene il sistema lineare  $\Theta$  degli involuppi due volte *specializzati* avvenuti per *nuclei* le quadriche di  $\gamma^*$ ; e, poichè gli involuppi di  $\Theta$  (come le quadriche di  $\gamma$ ) sono in numero  $\frac{(n-2)(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - 1$  volte infinito, così il sistema  $\Sigma$  si può ritenere determinato da  $\Theta$  e da un suo involuppo  $\Phi$  fuori di  $\Theta$ .

Le quadriche spezzantisi nelle coppie di iperpiani  $\alpha_i, \gamma A_i; \beta_i, \gamma B_i$ , giacendo in  $S$ , sono apolari rispetto a tutti gli involuppi di  $\Sigma$ , onde sono  $\alpha_i, \gamma A_i; \beta_i, \gamma B_i$  coppie di iperpiani coniugati rispetto a tutti questi involuppi. Se è dunque  $g$  la retta polare di  $\gamma$  rispetto a  $\Phi$  (retta in generale individuata perchè  $\Phi$  non è in  $\Theta$ ), si deduce:

$$g(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n+1}) \overline{\wedge} \gamma(A_1 A_2 \dots A_{n+1}, B_1 B_2 \dots B_{n+1}),$$

essendo inoltre le due forme in involuzione. La retta  $g$  soddisfa dunque alle condizioni espresse nell'enunciato.

Sia ora:

$$(1) \quad g'(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n+1}) \overline{\wedge} \gamma(A_1 A_2 \dots A_{n+1}, B_1 B_2 \dots B_{n+1});$$

dico che  $g'$  coincide con  $g$ . Intanto, per il corollario del n° 2, le forme (1) sono in involuzione. Segue che è determinato il sistema  $\Sigma'$  lineare  $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$  degli involuppi di seconda classe rispetto ai quali la pun-

\*) Per le denominazioni qui usate cfr. SEGRE, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* [Mem. R. Acc. delle Scienze, di Torino (2), XXXVI], parte 1<sup>a</sup>, § 1, n° 22.

teggiata ed il fascio (I) sono polari-reciproci; inoltre rispetto a tali involuppi sono coppie d'iperpiani coniugati  $\alpha_i, \gamma A_i; \beta_i, \gamma B_i$ . Gli involuppi di  $\Sigma'$  sono dunque apolari alle quadriche spezzantisi nelle coppie di iperpiani  $\alpha_i, \gamma A_i; \beta_i, \gamma B_i$ , quindi a tutte le quadriche di  $S$ . In altri termini  $\Sigma'$  coincide con  $\Sigma$ , onde anche  $g'$  coincide con  $g$ .

4. Il teorema del n° precedente si può completare colle osservazioni che seguono. Si supponga che per  $\gamma$  e per i vertici delle piramidi  $(A)(B)$  passino  $\infty^b$  quadriche (in particolare,  $b = 0$ , una sola quadrica); in tal caso il sistema  $\infty^{n-1}$  delle quadriche passanti per  $\gamma$  e per i vertici di  $(A)$  ed il sistema  $\infty^{n-1}$  delle quadriche passanti per  $\gamma$  e per i vertici di  $(B)$  appartengono ad un sistema lineare d'infinità  $2n - b - 2$  che indico con  $[S]$ . Gli involuppi di seconda classe apolari a tutte le quadriche di  $[S]$  formano un sistema lineare  $[\Sigma]$  d'infinità  $\frac{n(n-1)}{2} + b + 1$  contenente quello  $\Theta$  degli involuppi aventi per nucleo quadriche di  $\gamma$ . I sistemi lineari  $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$  giacenti in  $[\Sigma]$  e contenenti  $\Theta$  sono in numero  $b + 1$  volte infinito e ciascuno di essi è del tipo del sistema  $\Sigma$  (n° 3), onde conduce all'esistenza di una retta  $g$  tale che sia:

$$g(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n+1}) \overline{\wedge} \gamma(A_1, A_2 \dots A_{n+1}, B_1, B_2 \dots B_{n+1}).$$

Reciprocamente, ogni retta  $g$  soddisfacente a tale condizione individua uno di tali sistemi, onde si conclude:

*In uno spazio ad  $n$  dimensioni, se per i vertici  $A_1, A_2 \dots A_{n+1}, B_1, B_2 \dots B_{n+1}$  di due piramidi e per uno spazio  $\gamma$  ad  $n - 2$  dimensioni passano  $\infty^b$  quadriche, esistono  $\infty^{b+1}$  rette, ciascuna delle quali sega le facce delle due piramidi in una punteggiata proiettiva al fascio proiettante da  $\gamma$  i vertici rispettivamente opposti. Il fascio e la punteggiata sono in involuzione.*

5. Se si svolgono le considerazioni duali di quelle del n° 3, si giunge ad una corrispondenza biunivoca (con elementi eccezionali) fra le rette e gli spazi ad  $n - 2$  dimensioni dello spazio ad  $n$  dimensioni, essendo corrispondenti una retta  $g$  ed uno spazio  $\gamma$  per i quali sia:

$$g(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n+1}) \overline{\wedge} \gamma(A_1, A_2 \dots A_{n+1}, B_1, B_2 \dots B_{n+1}).$$

Nel caso particolare che esista una quadrica  $Q$  rispetto alla quale

è coniugata *ciascuna* delle piramidi  $(A)(B)$ , la corrispondenza si identifica coll'ordinaria polarità rispetto a  $Q$  \*).

In ogni caso se la retta  $g$  si appoggia allo spazio intersezione di  $\alpha_{r_1}, \alpha_{r_2} \dots \alpha_{r_i}, \beta_{s_1}, \beta_{s_2} \dots \beta_{s_j}$  lo spazio  $\gamma$  corrispondente è in un iperpiano collo spazio  $A_{r_1}, A_{r_2} \dots A_{r_i}, B_{s_1}, B_{s_2} \dots B_{s_j}$ , e reciprocamente. Ed invero se nella punteggiata di sostegno  $g$  coincidono i punti  $g\alpha_{r_1}, g\alpha_{r_2} \dots g\alpha_{r_i}, g\beta_{s_1}, g\beta_{s_2} \dots g\beta_{s_j}$ , nel fascio proiettivo d'asse  $\gamma$  coincidono gli iperpiani  $\gamma A_{r_1}, \gamma A_{r_2} \dots \gamma A_{r_i}, \gamma B_{s_1}, \gamma B_{s_2} \dots \gamma B_{s_j}$ ; e reciprocamente.

Si supponga in particolare che le due piramidi si possano riferire in modo che ogni retta secante le intersezioni di  $n$  coppie di facce omologhe seghi pure l'intersezione della rimanente coppia. Dico che ogni spazio ad  $n - 2$  dimensioni secante le congiungenti di  $n$  coppie di vertici omologhi sega pure la congiungente la rimanente coppia. Siano infatti  $(A)(B)$  riferibili nel modo detto, essendo vertici omologhi  $A_i$  e  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ) e si consideri uno spazio  $\gamma$  ad  $n - 2$  dimensioni secante le rette:

$$A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n;$$

si deve dimostrare che  $\gamma$  sega pure  $A_{n+1} B_{n+1}$ . Invero la retta  $g$  corrispondente di  $\gamma$ , per l'osservazione precedente, dovrà appoggiarsi alle intersezioni:

$$\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \dots, \alpha_n \beta_n,$$

quindi, per ipotesi, anche ad  $\alpha_{n+1} \beta_{n+1}$ . Ed allora, per la stessa osservazione,  $\gamma$  sega appunto  $A_{n+1} B_{n+1}$ .

Il teorema reciproco si dimostra in modo duale \*\*).

6. La proposizione colla quale si chiude il n° precedente è strettamente legata al teorema di SCHLÄFLI, che viene qui dimostrato con un procedimento assai semplice:

*In uno spazio ad  $n$  dimensioni, se due piramidi*

$$(A) \equiv A_1 A_2 \dots A_{n+1}$$

$$(B) \equiv B_1 B_2 \dots B_{n+1}$$

*sono polari-reciproche rispetto ad una quadrica, in modo che la faccia  $\alpha_i$*

\*) Per  $n = 3$  cfr. GURADZE, loc. cit., pag. 53.

\*\*) Per  $n = 3$  si hanno due tetraedri iperboloidici. Una retta  $\gamma$  secante le congiungenti  $A_i B_i$  ha in questo caso per corrispondenti le infinite rette  $g$  secanti le intersezioni  $\alpha_i \beta_i$  (cfr. GURADZE, pag. 52), il che concorda coll'osservazione del n° 4.

opposta in  $(A)$  ad  $A_i$  abbia per polo  $B_i$ , ogni spazio ad  $n - 2$  dimensioni secante  $n$  delle congiungenti  $A_i B_i$  si appoggia anche alla rimanente.

Siano  $(A)(B)$  polari-reciproche nel modo fissato rispetto ad una quadrica, che considero come inviluppo e indico con  $\Phi$ . Sia inoltre  $\gamma$  uno spazio ad  $n - 2$  dimensioni che si appoggia alle congiungenti  $A_i B_i$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ ; dico che si appoggia anche alla  $A_{n+1} B_{n+1}$ .

Intanto, essendo  $B_i$  polo di  $\alpha_i$ , le  $n$  coppie di iperpiani

$$\gamma B_i \equiv \gamma A_i, \quad \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sono coppie di iperpiani coniugati rispetto a  $\Phi$ , od in altri termini l'inviluppo  $\Phi$  è apolare alle  $n$  quadriche spezzantisi in tali coppie di iperpiani. Ma le  $n$  quadriche, come linearmente indipendenti, determinano il sistema lineare  $\infty^{n-1}$  delle quadriche passanti per  $\gamma$  e per gli  $n+1$  punti  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ , onde segue che  $\Phi$  è apolare a tutte le quadriche del sistema ed in particolare a quella che si spezza negli iperpiani  $\gamma A_{n+1}$ ,  $\alpha_{n+1}$ . Sono dunque  $\gamma A_{n+1}$ ,  $\alpha_{n+1}$  iperpiani coniugati rispetto a  $\Phi$  ed il polo  $B_{n+1}$  di  $\alpha_{n+1}$  giace su  $\gamma A_{n+1}$ . È così dimostrato che  $\gamma$  sega  $A_{n+1} B_{n+1}$ .

In modo correlativo (od anche ricorrendo alle considerazioni in fine del n° 5) si dimostra il teorema duale.

7. Si può facilmente stabilire che, in uno spazio ad  $n$  dimensioni, esiste uno ed un solo spazio ad  $n - 2$  dimensioni dal quale  $2n + 1$  punti generici assegnati sono proiettati negli iperpiani di un fascio proiettivo ad un dato gruppo di  $2n + 1$  elementi di un ente razionale  $\infty^1$  \*). Ed infatti gli spazii ad  $n - 2$  dimensioni dello spazio ad  $n$  dimensioni sono  $\infty^{2n-2}$  e sono  $2n - 2$  gli invarianti assoluti di un gruppo di  $2n + 1$  elementi dell'ente  $\infty^1$ . Dati dunque i  $2n + 1$  punti  $A_1 A_2 \dots A_{2n+1}$ , esisterà un numero finito di spazii ad  $n - 2$  dimensioni aventi la proprietà voluta, almeno in generale. Ma dico che ne esiste uno solo; ed invero se ne esistessero due  $\gamma, \gamma'$  sarebbe:

$$\gamma(A_1 A_2 \dots A_{2n+1}) \bar{\wedge} \gamma'(A_1 A_2 \dots A_{2n+1}),$$

onde gli spazii  $\gamma, \gamma'$  ed i punti  $A_i$  sarebbero su di una quadrica  $n - 3$  volte (almeno) specializzata; ed allora ciascuno degli infiniti spazii ad  $n - 2$  dimensioni della quadrica appartenenti alla serie di  $\gamma, \gamma'$  godrebbe della proprietà richiesta.

---

\*) Per  $n = 2, 3$  cfr. GURADZE, pp. 55-61.

La corrispondenza fra rette e spazii ad  $n - 2$  dimensioni considerata al n° 5, fornisce un metodo generale per la determinazione dello spazio in questione \*).

Sia  $S_n$  lo spazio ad  $n$  dimensioni in cui giacciono i punti  $A_1 A_2 \dots A_{2n+1}$  e, rappresentato l'ente razionale su una retta  $g'$  di uno spazio  $S'_n$  ad  $n$  dimensioni, si indichino con  $H'_1 H'_2 \dots H'_{2n+1}$  i punti del gruppo. Condotti in  $S'_n$  e rispettivamente per  $H'_1 H'_2 \dots H'_{n+1}$  in modo generico gli iperpiani  $\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{n+1}$ , si riferiscano  $S'_n$  ed  $S_n$  proiettivamente in modo che ad  $\alpha'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ) corrisponda la faccia  $\alpha_i$  opposta ad  $A_i$  nella piramide  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ , il che si può fare in infinite maniere. Nella collineazione posta, a  $g'$  corrisponde una retta  $g$ , ad  $H'_r$  ( $r = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ) un punto  $H_r$  di  $g$  ed è in particolare  $H_i = g \alpha_i$  per  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ . Gli iperpiani:

$$\begin{aligned} & H_{n+2} A_{n+3} \dots A_{2n+1}, \\ & A_{n+2} H_{n+3} \dots A_{2n+1}, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & A_{n+2} A_{n+3} \dots H_{2n+1} \end{aligned}$$

si tagliano in un punto  $A_{2n+2}$ . Lo spazio  $\gamma$  corrispondente a  $g$  nella corrispondenza determinata dalle piramidi:

$$\begin{aligned} & A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1} \\ & A_{n+2} A_{n+3} \dots A_{2n+1} A_{2n+2} \end{aligned}$$

è lo spazio richiesto. Ed infatti è:

$$\gamma(A_1 A_2 \dots A_{2n+1}) \overline{\wedge} H_1 H_2 \dots H_{2n+1},$$

onde pure:

$$\gamma(A_1 A_2 \dots A_{2n+1}) \overline{\wedge} H'_1 H'_2 \dots H'_{2n+1}.$$

Pavia, 7 giugno 1905.

LUIGI BRUSOTTI.

---

\*) I metodi seguiti per  $n = 2, 3$  non pare si possano estendere in modo semplice.